大韓數學教育學會誌 數學教育學研究 第 13 卷 第 3 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIII, No.3, 365-382. August 2003

수학 영재교육 자료의 개발과 적용 사례 연구

이 경 화*

본 연구는 수학적으로 재능이 있는 학생에게 수학적 사고 경험을 제공하고 수학적 능력을 보다 발전시킬 수 있는 교육 자료를 개발하고 적용·관찰하는 것을 목표로 한다. 먼저 크루테츠키의 연구에서 제시하는 수학 영재아의 특성을 확인하고 그것이 지도 상황과 어떻게 관련을 맺도록 해야 하는가를 강완(1994)의 연구를 토대로 알아본다. 두 번째로 수학적 사고력의 함양을 강조한 폴리아의 이론을 토대로 교육 자료가 갖추어야 할 조건을 살펴본다. 크루테츠키의 연구는 수학적으로 재능이 있는 학생의 특징을 이해할 수 있게 하며, 폴리아의 이론은 영재교육 자료가 어떤 구조로, 어떤 특성에 따라 개발되어야 하는가에 대한 시사점을 제공한다. 이러한 이론적 검토에 기초하여 동일 주제를 4차에 걸쳐서 구체화한 교육 자료를 소개하고 실제로 적용한 결과도 제시한다.

Ⅰ. 들어가는 말

최근 들어 영재교육에 관한 관심이 고조되고 있다. 지역마다 거점학교 또는 중심학교가 지정되면서 연구모임이 활성화되고 영재교육 자료를 개발하거나 입수하려는 노력도 적극적으로 이루어지고 있다. 나귀수(1999: 785)는 수학 영재교육이 다음 두 가지 의미를 갖는다고 설명한다. 첫째, 수학 영재 개인적 측면에서 갖는 의미로서, 수학 영재들이 가지고 있는 잠재적인 수학적 능력을 최대한 발휘할 수 있도록 도와줌으로써 학생들 각자의 수준에 맞는 수학적 힘을 양성할 수 있도록 하는 것이다. 둘째, 사회적 측면에서 갖는 의미로서, 장차 과학·기술 분야에 종사하면서 21세기 정보화 사회를 이끌어 갈 국가의 주역인 수학 영재들에게 내실 있는 수학교육을 제공함으로써 선도적인 과학·기술 문명이 싹틀 수 있는 토대를 마련하는 것이다. 이 두 가지 의미를 본래의 취지에 맞게 반영하여 교육 자료를 개발하는 것이 필요하다.

너무 기본적이고 대략적이기는 하지만 개발된 영재교육 자료를 이 두 가지 기준에 비추어 평가할 수도 있다. 학생의 수학적 능력을 발휘하도록 얼마나 도왔는가? 내실 있는 수학교육을 제공하는 자료인가? 영재교육에 대한 경험이 쌓이면 여기서 한 발 더 나아가 교육 자료를 평가하는 세부적인 기준을 마련하고 이를 고려하여 교육 자료를 지속적으로 개선하는 노력이 필요할 것이다. 본 연구의 주된 내용이 바로 이렇게 본래의 취지에 맞는 교육 자료를 개발하기 위하여 노력하고 적용한 사례를 소개하는 것이다. 연구 문제를 질문의 형태로 표현

* 청주교대, opalil@cje.ac.kr

하면 다음과 같다. 첫째, 수학 영재교육 자료를 개발하기 위하여 고려해야 하는 수학적 능력의 정의와 특성, 자료가 갖추어야 할 특성은 어떤 것인가? 둘째, 개발한 영재교육 자료를 적용한 후 어떻게 수정하고 보완할 것인가?

II. 수학 영재교육 자료의 개발과 적용 관점

영재교육 자료는 무엇보다 각 학생의 수학적 재능이 충분히 발휘되고 발전될 수 있도록 개발되어야 할 것이다. 수학적 재능에 대한 연구는 크루테츠키(Krutetskii, V. A.)에 의하여 이루어졌다. 이하에서는 먼저 크루테츠키의 연구에서 제시하는 수학 영재아의 특성을 확인하고 그것이 지도 상황과 어떻게 관련을 맺도록 해야 하는가를 강완(1994)의 연구를 토대로 알아보고자 한다. 두 번째로 수학적 사고력의 함양을 강조한 폴리아의 이론을 살펴볼 것이다. 크루테츠키의 연구는 수학적으로 재능이 있는 아동의 특징을 이해할 수 있게 하지만 교육 자료의 개발에 대한 직접적인 시사점은 제공하지 않는 반면, 폴리아의 이론은 영재교육 자료가 갖추어야 할 조건에 대하여 보다 직접적인 시사점을 제공한다.

1. 수학 영재아의 특성을 고려한 자료 개발과 적용

크루테츠키는 수학적으로 천부적인 재능을 보인 학생들의 문제해결 과정, 생활 태도, 성격 등을 장기간에 걸쳐 관찰, 분석하여 다음과 같은 결론을 내리고 있다(강완, 1994, 140-141에서 재인용). 영재아들은 수학적 사실을 일반화하여 법칙을 발견한다. 또한 사고 기능이 유연하여 한 조작에서 다른 조작으로 신속하게 전이하며 사고의 가역성도 갖추고 있다. 쉽고, 명백하고,

<표 II-1> 문제 해결 과정에서의 수학적 재능의 표현

	수학적으로 재능이 있는 학생이 보여주는 수학적 능력의 특성
정보 수집	수학적 사실을 형식화하여 인식하고, 문제의 형식과 구조를 파악하는 능력
정보 처리	양적, 공간적 관계와 수, 문자, 기호 등의 영역에서 논리적으로 사고하는 능역 및 수학적 기호를 사용하여 사고하는 능력
	수학적 대상, 관계, 연산을 신속하고 광범하게 일반화하는 능력
	수학적 사고과정과 사용된 연산 관계를 단축시키는 능력 및 압축된 구조로 사고하는 능력
	수학적 사고에서의 사고과정의 유연성
	명백하고, 간단하며, 경제적이고 합리적인 해결 방법을 찾는 노력
	사고과정의 전후 방향을 신속하고 자유롭게 전환 재구성하는 능력(사고과정의 가역성)
정보 파지	수학적 기억력, 즉, 수학적 관계, 유형적 특성, 논증의 골격, 문제 풀이 방법, 접근 방법 등에 대한 일반화된 기억

경제적인 해결책을 열망하며, 주변에서 볼 수 있는 특수한 수학적 개념을 초보적인 형태로 형식화하기도 한다. 이를 표로 정돈하여 나타내면 <표 Ⅱ-1>과 같다.

강완(1994)은 위와 같은 크루테츠키의 연구 결과를 토대로 영재아에게 제공할 수 있는 학습활동의 종류를 다음과 같이 제시하였다.

(1) 주어진 소재에 맞추어 문제 만들기
(2) 부족한 정보를 채워서 문제 만들기
(3) 과잉 정보를 덜어내어 문제 만들기
(4) 도형에 관한 통찰력 기르기
(5) 문제의 유형 분류하기
(6) 형식화 연습
(7) 주어진 유형으로 문제 만들기
(8) 문자 산수 (cryptarithmetic)
(9) 다양한 풀이 찾기
(10) 변형된 문제 풀기
(11) 사고의 재구성
(12) 순행-역행 문제
(13) 논리적 추론
(14) 비현실적인 문제
(15) 자기 제약 암시 문제(강완, 1994: 143)

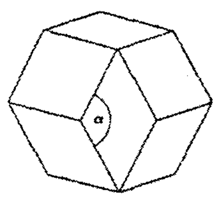
강완에 의하면, 이들 활동은 다음과 같은 특징을 갖고 있다. 활동 (1), (2), (3)은 문제 안에 주어진 구체적 사실들과 그들의 관계를 인식하는 능력을 기르기 위한 목적으로 제공되는 활동이다. 활동 (4)는 주어진 도형과 그 배경으로부터 기하적 요소를 추출하는 능력을, 활동 (5), (8)은 일반화하는 능력과 추론과정을 단축하는 능력을, 활동 (7), (14)는 문제에 대한 일반화된 인지 능력을 목표로 한 활동이다. 또한 활동 (9), (10), (11), (16)은 사고의 유연성과 풀이의 우아함을 추구하는 능력을, 활동 (12)는 사고과정의 가역성을 돕기 위한 것이고, 활동 (13)은 추론 능력을 돕기 위한 것이다.

강완(1994)의 연구는 크루테츠키가 파악한 수학적 능력 또는 수학 영재아의 특성을 활동 또는 문제를 통하여 발전시키려는 시도라고 할 수 있다. 이는 흥미 있는 소재, 개방적 탐구 활동, 다양한 만들기 자료 도입, 다양한 탐구 과정 경험, 경쟁과 협동의 조화, 스스로 학습할 수 있도록 구성, 적성과 능력에 따라 선택하여 활동할 수 있도록 구성, 지 · 덕 · 체 교육의 조화, 교과 통합적 접근, 시간과 공간적 제약의 극복, 활용의 편의성 제공(김주훈 외, 1996) 등으로 제시되는 일반 영재교육 자료 개발 지침에 비하여 훨씬 구체적이고 수학 영재교육에 직접적으로 관련되는 시사점을 제공한다. 그러나 각 활동을 어떻게 연결하고 구조화하여 두 시간 또는 세 시간 동안 적용할 수 있는 교육 자료를 개발할 것인가의 문제에 대해서는 시사하는 바가 많지 않다. 이에 대해서는 폴리아의 연구를 참고할 수 있으며, 다음절에서 이에 관하여 알아볼 것이다.

2. 개연적 추리를 가능하게 하는 자료의 개발과 적용

폴리아는 수학적 탐구가 두 가지 형태의 추리 즉, 논증적 추리와 개연적 추리로 이루어지는데, 논증적 추리는 '안전하고, 논쟁의 여지가 없으며, 최종적'임에 비해 개연적 추리는 '모험적이고, 논쟁의 여지가 있으며, 잠정적'인 추리라고 설명하였다(정은실, 1993: 59). 폴리아는 개연적 추리를 통하여 수학적인 추측을 하고 이를 탐구하여 타당성을 확인하는 과정이 수학

활동에서 매우 중요하다는 것을 강조하였다. 이러한 관점은 수학 영재아를 대상으로 하는 수업에서 그들의 잠재력을 확인하고 발전시킴에 있어서 상당히 중요한 시사점을 제공한다. 특히, 개연적 추리는 유추, 특수화, 일반화, 관찰을 통한 추측 등의 사고 과정이 긴밀하게 연결되고 발전되면서 이루어지는 것이어서 영재교육 자료의 개발에 직접적으로 시사하는 바가 있다. 폴리아(1965: 149)에 의하면, 유추는 개연적 추리를 생성하는 한 가지 원천이다. 예를 들어, 다각형과 다면체는 유사한 탐구 대상이다. 그런데 다각형이 다면체보다 더 간단하기 때문에 다각형에 관한 문제가 그에 해당하는 다면체에 관한 문제보다 훨씬 더 쉽다. 그러므로 다면체에 관한 탐구를 다각형에 대한 탐구 경험에서 유추하는 것이 필요하다. 예를 들어, 삼각형의 내각의 합이 항상 180° 라는 것에서부터 다면체에 관하여 이와 유사한 성질이 성립하는지 생각해볼 수 있다.



[그림 Ⅱ-1] 면각

탐구는 목표를 분명하게 진술하는 것에서 시작된다. 다면체의 각의 합에 관하여 무엇을 탐구할 것인가? 폴리아는 다면체의 각 면의 내각인 면각(face angle)을 도입하고, 이 각의 합을 구하는 것으로 목표를 정할 수 있다고 설명한다. [그림 Ⅱ-1]과 같이 나타낼 때 모든 면각의 합은 $\sum\alpha$로 나타낼 수 있다. 이제 다양한 예를 관찰함으로써 $\sum\alpha$에 관한 특별한 성질을 확인한다. 모든 예에 대하여 일관된 성질을 확인하기 어려울 때에는 관점을 바꿀 수 있다. 이 단계에서 한 꼭지점에 모여 있는 다각형의 각의 합을 구해 볼 수 있으며, 그 값을 정확하게는 모르지만 평면각인 2π보다는 작을 것이고, 결국 V를 주어진 다면체의 꼭지점의 개수라고 하면

$$\sum\alpha < 2\pi V$$

라는 것을 확인할 수 있다. 여기서 다시 다양한 예를 관찰하면 단지 $2\pi V$가 $\sum\alpha$보다 크다는 것을 아는 것에 그치지 않고 다음과 같은 식이 성립한다는 것도 확인하게 된다.

$$2\pi V - \sum\alpha = 4\pi$$

이제 일반적인 볼록 다면체에 대하여 이런 규칙이 성립할 것이라고 '추측'할 수 있으며, 결국 다음과 같이 표현된 식의 타당성을 확인하는 단계로 넘어갈 수 있다.

$$\sum\alpha = 2\pi V - 4\pi \quad \cdots\cdots \text{①}$$

n각기둥과 n각뿔 등 여러 다면체에 대하여 다시 이 값을 구하고 '일반화'를 시도할 수 있다. 결국 $\sum\alpha = 2\pi(E - F)$라는 것을 알 수 있으며, $\sum\alpha$를 없애면 다음과 같은 식을 얻게 된다(앞의 책: 150-154).

$$F + V = E + 2 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

폴리아는 앞의 예를 통하여, 규칙, 패턴 또는 법칙을 발견하는 가장 중요한 토대가 관찰이며, 특히, 좋은 제안 또는 통찰력을 가지고 관찰할 때 가치 있는 결과를 얻을 수 있다고 설명한다. 관찰을 통하여 증명까지는 이르지 못해도 임시적인 일반화, 추측을 할 수 있다는 것이다. 추측한 후에는 특수한 경우에 적용하고 그 결과를 확인한 후, 추측을 좀더 신뢰하게 되며 좀더 정확하고 체계적인 방법으로 증명할 수 있게 된다. 폴리아는 앞의 예를 통해 탐구 문제가 갖추어야 할 세 가지 특징을 다음

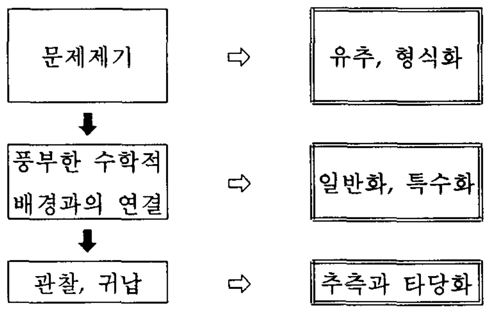
과 같이 제시한다.

(1) 학생이 문제 제기에 함께 참여할 수 있도록 해야 한다.
(2) 고립된 것이 아니라 다른 많은 문제를 관련짓게 하는 풍부한 배경을 가지는 것이어야 한다.
(3) 관찰하고 추측하며, 귀납적으로 논증하는 것, 곧 개연적으로 추리함으로써 해결하도록 하는 문제여야 한다(앞의 책: 156-158).

폴리아가 제시한 탐구 문제, 탐구 과정의 특성은 크루테츠키가 제시한 사고 과정의 유연성, 압축, 형식화 등과 밀접하게 연결된다. 특히, 크루테츠키가 제시한 세 단계에서 각각 수학적으로 재능이 있는 학생이 자신의 재능을 발휘할 기회를 제공한다. <정보 수집> 단계에서 제공한 '다면체의 각의 합에 관한 성질'이라는 주제는 '탐구할 수학적 사실을 형식화하여 인식하는가 그렇지 않은가'를 파악할 수 있게 한다. 다면체의 각 면의 내각인 면각을 도입하고 면각의 합을 구해보는 활동은 문제를 제기하고 형식화하여 구조적으로 탐구하게 한다. <정보 처리> 단계에서 $\sum \alpha$ 와 $2\pi V$의 비교를 통한 추측, 일반화 과정은 수학적으로 재능이 있는 학생들이 흥미를 유지하면서 해결 과정에 참여하게 한다. 오일러가 발견했던 볼록 다면체에 대한 성질은 <정보 파지> 단계에서 할 수 있는 일반화된 기억 등을 가능하게 한다. 폴리아가 제시한 문제는 고립된 것이 아니라 계속적으로 긴밀하게 연결되고 다양한 탐구활동을 가능하게 하는 구조화된 것이기 때문에 수학 영재아가 수학을 의미 있게 배우고 경험하게 한다. 이렇게 크루테츠키가 제시한 수학적 재능아의 특성을 발휘할 수 있는 기회를 풍부하게 제공한다는 점에서 폴리아가 제공한 문제와 탐구 방법은 영재교육 자료의 개발에 중요한 시사점을 제공하는 것으로 판단된다.

3. 영재교육 자료 개발과 적용의 관점

앞서 살펴본 폴리아의 이론을 바탕으로 영재교육 자료가 갖추어야 할 조건을 그림으로 표현하면 [그림 Ⅱ-2]와 같다.



[그림 Ⅱ-2] 영재교육 자료가 갖추어야 할 조건

폴리아가 제시한 예는 다음과 같이 [그림 Ⅱ-2]의 과정을 충실하게 따르고 있음을 확인할 수 있다. 먼저 교사가 일방적으로 문제를 제시하기보다는 학생들이 다각형에 대한 수학적 지식으로부터 '유추'하여 다면체에 관한 문제를 제기하면서, 수학적 탐구가 가능한 형태로 '형식화'하도록 하였다. 이어서 여러 종류의 다면체에 대한 탐구를 통하여 면각의 개념을 도입하고 수학적으로 정돈하면서 한 가지 측면이 아니라 여러 가지 가능성을 생각하게 하였다는 점에서 '풍부하게 배경화'하고 있음을 알 수 있다. 다양한 다면체의 수학적 특성을 관찰하고 자료화하여 특수한 예로부터 일반화를 시도하였으며, 귀납적인 추론에 머무르지 않고 수학적으로 증명하는 수준까지 시도하였다. 영재교육 자료가 이와 같은 특성을 만족시킨다면 학생들이 수학

적으로 사고하고 수학적인 잠재력을 발전시킬 수 있을 것이다.[1] 개발된 영재교육 자료는 반드시 적용을 통하여 수정·보완해야 할 것이다. 수학적 재능을 가진 학생에 대한 크루테츠키의 연구 결과를 참고하여 개발된 영재교육 자료를 적용할 때 학생들이 어떤 반응을 보이고 그 반응의 의미는 무엇인가를 파악함으로써 보다 의미 있는 자료로 바꾸는 노력이 필요하다. 개발된 영재교육 자료를 적용하면서 학생들이 보이는 반응을 해석할 관점을 다음과 같이 그림으로 표현할 수 있다.

정보 수집	⇨	문제의 형식과 구조 파악 양상 관찰
⬇		
정보 처리	⇨	논리적 사고, 압축, 유연성, 가역성, 일반화, 합리성 등이 표현되는지 관찰
⬇		
정보 파지	⇨	일반화, 관계적 이해, 표현 양상 관찰

[그림 II-3] 영재교육 자료 적용 후 관찰의 관점

영재교육 자료는 다른 수업 자료와 마찬가지로 복합적이고 역동적인 수업 현상을 충분히 예측하고 반영하여 의미 있게 개발되어야 할 것이다. 특히 학생들이 압축적이고 유연한 사고를 충분히 즐기고 발전시킬 수 있도록 해야 하기 때문에 보통의 수업 자료보다 수업 내용에 대한 철저한 기초 연구를 필요로 한다. 고립된 문제를 열거하는 것이 아니라 폴리아가 제시한 예처럼 치밀하게 연결되고 확장적인 사고를 유도하는 문제를 개발하고 조직하며, 적용 과정에 대해서도 구체적으로 예상하고 관찰을 통해 보완하는 노력이 필수적이다. 이러한 관점에 따르려고 노력하면서 개발한 영재교육 자료와 실제로 수업한 내용을 다음절에서 소개할 것이다.

III. 수학 영재교육 자료 개발과 적용 사례

이하에서는 연구자가 폴리아의 이론을 반영하여 개발한 교육 자료와 실제로 수업을 통하여 수정·보완한 자료를 소개할 것이다. 각 교육 자료를 적용하면서 관찰한 반응을 녹화 또는 녹음 자료에 기초하여 분석도 할 것이다. 수업은 15명 이상 17명 이하로 이루어진 초등학교 5학년 수학 영재반 학생들을 대상으로 이루어졌다. 1999년부터 2002년까지 모두 8회에 걸쳐서 수업하였으며, 이 중 5회의 수업을 녹화 또는 녹음하였고, 나머지 수업에 대해서는 관찰노트를 작성하였다.

1. 축구공에 숨어 있는 수학: 1차 개발 자료

교육 자료의 제목은 '축구공에 숨어 있는 수학'이었으며, 수업목표는 '축구공을 비롯한 다양한 종류의 다면체를 탐구하여 오일러의 다면

1) 물론 <그림 II-2>의 내용은 일반적인 수학교육에서도 적용될 수 있다. 본 고에서는 일반적인 수학교육과 수학 영재아를 대상으로 하는 교육을 구분하는 것에 초점을 두지 않았다. 두 가지 교육을 구분하는 것은 본 고의 논의 범위를 벗어난다. 본 고의 주된 관심은 수학적으로 재능이 있어서 속도와 깊이가 뛰어난 학생들이 각자의 재능을 충분히 발휘하면서 수학하는 즐거움을 느낄 수 있도록 그리고 수학적 재능을 더욱 발전시킬 수 있도록 자료를 개발하는 것이다.

체 정리[2)]를 발견하는 것'이었다. 초등학교에서 배우는 다면체는 정다면체, 각기둥, 각뿔, 각뿔대 정도에 그치기 때문에 주변에서 쉽게 볼 수 있고 흥미도 유발하는 소재인 축구공을 도입하면 다면체에 대한 이해를 확장할 수 있고 오일러 정리를 발견하는 데 도움도 되리라고 생각하였다.

1차 개발 자료에 포함된 주요 활동 내용은 다음 <표 Ⅲ-1>과 같다. 주로 사용한 교구는 폴리드론으로, 이것은 입체를 만들기 편하게 되어 있고 무엇보다 전개도를 머릿속에서 상상하면서 입체를 만들기 때문에 여러 가지 다면체의 성질을 파악하고 관련짓기에도 좋다. 이 점을 적극적으로 활용하여 축구공을 만들고 꼭지점, 모서리, 면의 개수를 세며, 다른 공모양 다면체에 대해서도 같은 종류의 활동을 하도록 하였다. 이러한 활동이 각각 실제로 수업 장면에서는 어떤 내용으로 다루어지고 유추, 일반화, 특수화를 통한 개연적 추리와 얼마나 연결되었는지, 크루테츠키의 연구에서 나타난 것과 유사하게 수학적 재능을 발휘한 사례가 있는지 살펴보고자 한다.

<활동 1>에서는 학생들 스스로 축구공을 만들며 탐구문제를 제기할 기회를 제공하기로 계획하였다. 다각형에서 꼭지점과 변의 개수를 구할 수 있듯이, 축구공 다면체[3)]의 꼭지점, 모서리, 면의 개수를 구할 수 있음을 문제의 형태로 제기할 수 있을 것으로 기대하였다. <활동 2>에서는 앞서 제기한 문제를 실제로 해결하기 위하여 노력하고 이 과정에서 사고의 형식화, 압축, 수학화 등이 일어나도록 계획하였다. <활동 3>, <활동 4>에서는 관찰과 귀납을 통하여 수학적 성질을 추측하고 그 타당성을 확인하도록 하였다.

실제로 수업하면서 관찰한 바에 따르면, <활동 1>의 단계에서는 축구공 모양의 다면체를 만드는 과정에 예상보다 많은 시간을 소비하면서 면, 꼭지점, 모서리의 개수를 구한다는 문제를 제대로 제기하지 못하였다. 조별로 하나씩의 축구공을 만들려면 축구공 모양의 입체가 어떤 성질을 만족시키는지에 관하여 먼저 토론해야 하는데 실제로는 일단 만들어보고 잘못되면 고치는 식으로 행동하는 경우가 많았다. 정오각형과 정육각형이 사용된다는 것을 알면서

<표 Ⅲ-1> 축구공에 숨어있는 수학: 1차 개발 자료

	활동 내용	유의점
활동 1	폴리드론을 이용하여 축구공 만들기	조별로 협동하여 1개만 만들도록
활동 2	축구공의 면, 꼭지점, 모서리의 개수 알아보기	개수를 구하는 방법 찾기
활동 3	다양한 종류의 다면체를 각 조별로 만들고, 면, 꼭지점, 모서리의 개수 알아보기	사진자료 제공 폴리드론 이용
활동 4	다면체의 면, 꼭지점, 모서리의 개수 사이의 관계 알아보기	귀납 추론

2) 널리 알려진 바와 같이, 다면체에서 꼭지점의 개수를 V, 모서리의 개수를 E, 면의 개수를 F라 할 때, $V-E+F=2$라는 것이 곧 이 정리의 내용이다.

3) 정오각형과 정육각형을 이용하여 축구공 모양으로 만든 다면체를 줄여서 축구공 다면체로 불렀다. 다면체의 뜻은 설명해 주었다.

도 어떤 규칙이 있는지 미리 예측하지는 못하였다. "정오각형 주변에는 어떤 도형이 있나요?", "정육각형 주변에는 어떤 도형이 있나요?" 등의 질문을 통하여 사고 방향을 체계화하려고 노력하였으나 활동에 주목하면서 충실한 의사소통이 되지 않았다. 축구공 다면체를 만들면서 알게 된 것을 발표하도록 하자, '정십이면체를 잡아 늘리고 정육각형을 사이사이에 끼운다', '정오각형의 꼭지점이 곧 축구공 전체의 꼭지점 개수이다', '정오각형보다 정육각형의 개수가 더 많을 것이다'와 같은 내용을 발표하였다. 결국 <정보 수집> 단계를 의미 있게 구성하지 못한 것으로 볼 수 있다. 문제를 형식화하고 구조를 파악하여 탐구에 몰입하는 모습을 보여준 학생은 한 두 명밖에 없었고 대부분의 학생은 혼란스러워하는 모습이었다.

<활동 2>는 축구공을 만들면서 학생들 스스로 문제를 제기하여 시작되기를 희망하였지만, 실제로는 전체 학생들을 대상으로 연구자가 어떤 것을 해야 하는지 설명하는 형태로 시작되었다. 또한 앞의 활동에 너무 많은 시간을 소비하여 어떤 방법으로 세는 것이 좋은가를 충분히 토론하지 못하였다. 할 수 없이 정확한 개수를 구하는 것에 만족하고 다음 활동으로 진행할 수밖에 없었다. <정보 처리> 단계에서 면과 모서리, 꼭지점 사이의 관계에 대한 논리적 사고를 기대했으나 실제로는 연구자의 설명이 이를 대신하게 된 것이다.

<활동 3>에서 다양한 종류의 다면체를 만드는 것에는 더욱 많은 시간이 들었고, 이 때에도 체계적인 방법보다는 임시방편적인 방법으로 면, 꼭지점, 모서리의 개수를 구하였다. 결국 귀납 추론의 토대를 마련하지 못한 학생들이 많았고, 축구공에 숨어있는 수학이 무엇인지 제대로 파악하기는 어려운 상황이 되었다. 축구공 다면체를 만들고 꼭지점, 모서리, 면의 개수를 헤아렸던 경험이 다른 종류의 다면체를 만드는 것에 의미 있는 영향을 미치지도 못하는 것으로 보였다. 다만 축구공 다면체가 정오각형과 정육각형을 사용했다는 점에 착안하여 "정삼각형과 정오각형을 이용하면 어떤 입체가 만들어질까?"와 같은 질문을 스스로에게 하는 모습은 확인할 수 있었다. 여기까지 하는 데 너무 많은 시간이 들었고 다면체의 면, 꼭지점, 모서리의 개수를 구한 방법이 제각각이어서 오일러 정리를 발견하는 것은 무리가 있어 보였다. 결국 연구자가 이 정리의 내용을 설명해 주면서 수업이 급하게 마무리되고 말았다.

축구공 다면체에 포함된 정오각형의 개수는 입체의 위와 아래에 각각 정오각형이 오도록 하면 12개임을 쉽게 알 수 있다. 정오각형이 12개임을 알면, 정육각형의 개수는 $12\times5\div3$에 의하여 20개, 꼭지점의 개수는 12×5에 의하여 60개, 모서리의 개수는 $(12\times5 + 20\times6)\div2$에 의하여 90개임을 알 수 있다. 이러한 계산 방법을 학생들 스스로 찾아내고 다른 다면체에 대하여 다시 같은 종류의 활동을 함으로써 귀납 추론의 토대를 마련하도록 하는 것이 이 자료의 목표였다. 그러나 위에서 살펴본 바와 같이 학생들은 축구공 다면체와 다른 여러 종류의 다면체를 만드는 것에 주목함으로써 꼭지점, 면, 모서리의 개수를 계산하는 방법에는 제대로 주목하지 못했다. 문제제기, 형식화, 유추, 일반화, 특수화, 귀납 등 사고력에 관련된 요소들은 제대로 다루어지지 않은 것으로 판단되었다. 일부 학생들은 축구공 다면체를 만들면서 정오각형과 정육각형의 배열에 주목하고, 앞서 제시한 몇 가지 특징도 찾아냄으로써 유연하고 압축적인 사고의 단면을 보여주기도 하였다. 그러나 전체적으로는 활동 속에 사고가 매몰되어 의미 있는 수학적 경험을 제공한 것으로 보기 어려웠다. 결국 <정보 파지> 단계 역시 의

미 있게 전개된 것으로 볼 수 없었다.

2. 축구공에 숨어 있는 수학: 2차 개발 자료

1차 개발 자료의 각 활동이 목표에 제대로 연결되지 못하였고, 무엇보다 수학적으로 의미 있는 추론 경험을 제공하지 못하였다는 반성을 토대로 다음과 같이 활동의 주요 내용을 바꾸었다. <활동 1>, <활동 2>, <활동 3>의 결과는 모두 표로 정리하여 나타내도록 하였다. 수업에서는 꼭지점, 모서리, 면의 개수 사이에 어떤 관계가 성립한다는 것을 계속적으로 암시하는 발문을 하기로 계획하였다. <활동 4>에서는 앞의 각 활동을 통하여 얻은 결과를 확인하여 하나의 식으로 나타내도록 하였다. 축구공 다면체까지도 이러한 관계를 만족시킨다는 것을 통하여 수학의 매력을 느끼도록 계획하였고 실제로 수업 중에도 이 점을 부각시키고자 노력하였다. 학생들은 착실하게 수업에 참여하였으며, 각 활동에서 제기한 문제도 대부분 완전하게 해결하였다. 그러나 조별 토론은 활발하게 이루어지지 않았다. 조별로 나누어준 다면체를 돌아가면서 들고 확인할 뿐 서로 어떤 방법으로 구했는지에 관심을 보이지는 않았다. 정이십면체와 축구공 다면체의 경우에는 꼭지점, 모서리, 면의 개수를 세는 데 꽤 시간이 걸렸고 결과가 일치하지 않자 논쟁을 벌이는 모습도 확인되었다. "어떻게 세면 좋을까요? 원시적인 방법말고"라는 발문을 계속 하였다. 이는 꼭지점, 면, 모서리의 개수를 체계적으로 또는 수학적으로 구하도록 하면서 동시에 이들 사이에 어떤 관계가 있다는 것을 암시하기 위한 것이었다. 개별적으로는 아이디어를 갖고 있지만 조원끼리 의미 있게 토론하지 않아서 할 수 없이 조별로 꼭지점, 모서리, 면의 개수를 어떻게 구했는지 정돈하여 발표하도록 하였다. <정보 수집>과 <정보 처리>가 분리되기 어려운 과정이라는 것을 확인할 수 있었다. 어떤 문제를 해결할 것인가 하는 것이 제대로 의식되지 않았기 때문에 어떤 방법으로 해결할 것인지에 대한 것도 의미 있게 다루어지지 않은 것으로 볼 수 있다.

그래도 발표한 내용 가운데 '정다면체의 경우에는, 면의 개수를 먼저 구하면 모서리와 꼭지점 개수를 구하기 쉽다. 면이 만약 정삼각형이면 면의 개수에 3을 곱한 후 겹친 것만큼을 고려하면 모서리, 꼭지점의 개수가 된다. 예를 들어, 정사면체를 생각해보면, 면이 4개인데,곱하기 3을 하면 12이지만 꼭지점에 삼각형이

<표 Ⅲ-2> 축구공에 숨어있는 수학: 2차 개발 자료

	활동 내용	유의점
활동 1	미리 제작된 정다면체의 면, 꼭지점, 모서리의 개수 알아보기	조별로 발견, 검토, 기록 역할 나누어 하도록
활동 2	미리 제작된 다양한 종류의 다면체를 나누어주고, 면, 꼭지점, 모서리의 개수 알아보기	개수를 구하는 보다 나은 방법 찾아 토론
활동 3	미리 제작된 축구공 다면체의 면, 꼭지점, 모서리의 개수 알아보기	폴리드론 이용
활동 4	다면체의 면, 꼭지점, 모서리의 개수 사이의 관계 알아보기	귀납 추론

3개씩 모여 있어서 3으로 나누면 꼭지점은 모두 4개, 모서리는 2개씩 모여 있으니까 2로 나누면 6개로 계산할 수 있다'라고 수학적으로 의미 있는 사고를 한 경우도 있었다. 이렇게 발표가 이루어지고 난 후에는 <활동 2>와 <활동 3>을 이와 같이 체계적인 방법으로 해결하려는 노력이 이루어졌다. 이러한 반응의 차이는 수학적인 재능의 차이를 드러내는 것인가 하는 것이 후속 연구 문제로 적합하다고 판단되었다.

<활동 4>에서 표 안에 면, 꼭지점, 모서리의 개수에 대하여 정돈된 자료를 참고하도록 하니 오일러의 다면체 정리도 정확하게 또 쉽게 찾았다. 시간은 여전히 부족하였고 대부분의 학생들이 열심히 참여하는 모습이었으나 과제 자체에 대한 관심과 흥미는 그다지 잘 유발시키지 못한 것으로 판단되었다. 수업 후 교실을 정돈하면서 일부 학생들에게 수업에 대하여 물으니, '재미가 있기는 했는데 새롭지 않은 내용을 공부하여 다소 지루했다' 또는 '너무 많이 문제만 풀어서 힘들었다' 등의 답을 얻었다. 또한 축구공 다면체는 수업의 목표와 긴밀하게 관련된 것이 아니라 흥미를 위하여 도입된 외적인 변화기제에 그치는 것으로 확인되었다. 참으로 놀라운 것은 어떻게 다면체 정리를 그렇게 쉽게 발견할 수 있는가 하는 점이었다. 학생들 중 상당수가 '꼭지점, 면, 모서리 사이의 관계'라는 말이 나오자마자 구해야 하는 식을 말하였다. 결국 <활동 4>가 진행되는 동안, "그런 관계가 성립한다는 것을 어떻게 알 수 있었지요? 선생님은 꿈에도 생각하지 못했었는데…."라고 과장하면서 질문하자 적지 않은 수의 학생들이 이미 배운 것이라고 말하였다. 할 수 없이 남은 시간 동안 "어떻게 증명할지 생각해 보세요"라는 전혀 준비하지 않았던 문제를 제시하였다. 라카토스(1976)가 제시한 대로 "표면이 얇은 고무로 된 속이 비어 있는 다면체를 상상해 보세요. 어느 한 면을 잘라내면, 남은 면을 찢지 않고 칠판 위에 평평하게 늘어놓을 수 있을 것입니다. (중략)"라는 설명을 기억나는 대로 요약하여 제시함으로써 토론 또는 탐구가 출발되기를 기다렸다. 그러나 어떤 이유 때문인지 토론이나 탐구는 방향을 잡지 못했고 남은 시간 동안 아이들은 폴리드론을 가지고 산만하게 노는 모습을 보여주었다.

분명히 발견해야 할 수학이 있고, 교구를 이용하되 교구 자체에 너무 많이 주목하지 못하도록 하였음에도 불구하고, 이 수업은 무언가 중요한 것을 놓치고 있다는 판단이 들었다. 폴리아가 제시한 관점에 비추어보면, 먼저 문제제기가 학생들에 의해서 단 한 번도 이루어지지 못했다는 것을 지적할 수 있다. 꼭지점, 모서리, 면의 개수를 구하는 방법에 주목하면서 크루테츠키가 제시한 일반화, 특수화 등을 보여줄 것으로 기대했으나 앞서 제시한 한 명의 학생을 제외한 나머지 학생들은 이 수준까지 이르지 못하였다. 이미 선행학습에 의하여 오일러 정리를 알고 있는 학생이 조마다 한 명 이상 포함되어 있었고, 이것이 발견의 기쁨을 느끼게 하지 못했기 때문에 수업은 지루한 반복을 강요한 듯한 인상으로 남은 것이다. <정보 파지> 단계는 이번에도 역시 의미 없게 진행된 것으로 판단된다.

1차 개발 자료에 비해 안정적이지만 탐구를 불러일으키지 못한 자료라는 결론을 내린 이유가 바로 이것이다.

3. 축구공에 숨어 있는 수학: 3차 개발 자료

앞의 두 자료는 다음과 같은 점에서 극과 극에 해당되는 것으로 보인다. 앞의 자료는 활동 자체에 치중하면서 목표를 달성하지 못했고, 뒤의 자료는 목표를 지나치게 의식하여 활동 자체에 대한 흥미를 유발하지 못했다. 그러면 목표와의 관련성도 유지하면서 활동 자체에 대한 흥미도 유발하도록 수업을 계획하는 방법은 무엇인가? 3차 개발 자료는 이러한 문제의식을 토대로 <표 Ⅲ-3>과 같이 구성되었다.

<활동 1>을 시작하기 전에 '축구공이 왜 하필 정오각형과 정육각형을 이용하여 만들어졌을까?'라는 질문을 제기하였다. 이 질문은 학생들의 호기심을 상당히 자극한 것으로 보였다. 학생들은 공모양 다면체라는 보다 일반화된 개념을 이해하면서 '다른 방법으로' 축구공을 만들기 위하여 노력하였고, 그것이 수업 내내 중요한 도전 과제로 작용하였다. 축구공 다면체의 꼭지점, 모서리, 면의 개수를 구하는 과정도 훨씬 흥미진진하게 탐구하였으며, 보다 나은 아이디어를 내는 학생은 다른 학생들로부터 감탄과 찬미의 대상이 되기도 하였다. 예를 들어,"정오각형의 개수를 먼저 세는 것이 유리하다","정오각형의 배열이 아주 특별하게 되어 있어서 천장과 바닥을 정하면 두 줄의 정오각형 줄이 보이고, 이것은 정십이면체를 각 방향으로 벌려놓은 것과 같다", "정육각형은 정오각형 둘레에 있으며, 정육각형은 세 개의 정오각형으로 둘러싸여 있기 때문에 $12 \times 5 \div 3$에 의하여 20개의 정육각형이 있음을 알 수 있다" 등의 아이디어를 제시하는 아동도 보였다. 무엇보다 학생들이 수시로 문제를 제기하고 해결하려고 노력했다는 점이 인상적이었다. <정보 수집>과 <정보 처리> 단계가 자연스럽게 연결되면서 문제를 형식화하고 유연하게 해결하는 모습을 볼 수 있었다.

한 종류의 정다각형을 사용하여 공모양 다면체를 만들 때에는 자연스럽게 "아! 그래서 정다면체가 5종류밖에 없구나!"라는 설명을 하기도 하였다. 이미 인터넷이나 서적에서 정다면체에 관한 정보를 접했던 학생들이 왜 그러한 내용으로 정돈될 수 있는지를 설명할 수 있게 된 것이다. 이는 브루소가 제시한 이른바, '타당화 상황' 개념과 연결되는 것으로 볼 수 있

<표 Ⅲ-3> 축구공에 숨어있는 수학: 3차 개발 자료

	활동 내용	유의점
활동 1	공모양 다면체 개념 도입	가죽으로 만들어 연결한 후 바람 불어넣으면 공이 되는 다면체
활동 2	공모양 다면체의 한 예인 축구공 탐구 (꼭지점, 모서리, 면의 개수)	개수를 구하는 방법 찾아 토론, **발표, 타당화**
활동 3	한 종류의 정다각형으로 축구공 만들기	폴리드론 이용 정다면체 관련 추론 1
활동 4	두 종류의 정다각형으로 축구공 만들기	공모양 다면체의 특징
활동 5	다면체 정리 확인하기	수학자 오일러 소개

다. 학생들은 "한 꼭지점에 정다각형 2개가 오도록 하면 입체가 될 수 없으므로 적어도 세 개 이상 오도록 해야 한다", "한 꼭지점에 정삼각형 3개, 4개, 5개가 오도록 하면 각각 정사면체, 정팔면체, 정이십면체가 만들어진다", "한 꼭지점에 6개의 정삼각형이 오도록 하면 '장판 모양'이 되어 다면체가 만들어지지 않는다"와 같은 다양한 명제들을 찾아내고 그 타당성을 스스로 또 동료로부터 확보하기 위하여 노력하였고, 결국 정다면체가 다섯 종류밖에 존재하지 않는 이유를 정확하게 설명할 수 있었다. 이러한 행동 특성은 논리적 사고와 합리적 판단의 증거로 생각될 수 있다.

타당화 상황이 한 번 만들어지자 수업은 흥미진진하게 전개되었고 학생들은 밀도 있는 토론과 탐구에 몰입하는 모습을 보여주었다. 두 종류의 정다각형을 이용하여 만들어지는 여러 입체 중에서 축구공 모양의 다면체가 가지고 있는 독특한 면을 알아내기 위하여 더 많은 학생들이 더 많은 열의를 가지고 토론하였으며, 수업이 끝난 후에도 집에 가지 않으려고 하거나 며칠 동안 이메일로 자신의 아이디어를 보내오는 모습까지 보여주었다. 결국 활동 5는 제대로 못한 채로 수업이 끝났고 연구자는 그 다음 수업 시간에 오일러의 다면체 정리를 요약하여 설명하는 것으로 이를 대신하였지만, 수업 자체에 대한 흥미는 상당 기간 유지되었다는 점에서 비교적 성공적인 수업이라고 판단되었다. 학생들의 참여 정도가 교육 내용의 질을 판단하는 절대 기준이 될 수는 없을 것이다. 그러나 학생들이 적극적으로 참여하여 수학적으로 의미 있는 내용 또는 사고 방향을 정립시켰다면 교육 내용으로서 상당히 중요한 특성을 갖춘 것으로 보아도 좋을 것이다. 두 차례의 적용 결과를 반성적으로 성찰하여 완성한 세 번째 '축구공에 숨어있는 수학'은 여전히 '오일러의 다면체의 정리'를 발견하는 것에 이르지 못했기 때문에 목표를 달성하지 못했지만, 수학적으로 타당화한다는 것이 어떤 경험이고, 왜 그러한 것이 필요하며, 어떤 식으로 발전시켜나가야 하는가에 관한 중요한 문제들을 확인하고 해결하게 하였다는 점에서 의의를 갖는다. 결론적으로 이번 활동은 아직 구조적으로 완전하게 정돈되지는 않았지만 크루테츠키가 제시한 여러 행동 특성을 발휘하고 발전시키는 기회를 제공한 것으로 볼 수 있다.

4. 축구공에 숨어 있는 수학: 4차 개발 자료

앞서 살펴본 세 가지 교육 자료는 모두 '축구공'을 소재로 하면서 '오일러의 다면체 정리의 발견'을 목표로 개발된 것이었다. 그러나 이미 살펴본 바와 같이 다양한 문제점이 있어서 이 두 가지가 적절하게 다루어지기 어려움을 확인하였다. 무엇보다 문제가 되는 것은 '축구공'이 아니어도 '오일러의 다면체 정리'를 다룰 수 있으며, 오히려 보다 간단한 모양의 다면체를 이용하는 것이 효율적이라는 점이었다. 어차피 귀납적인 추론을 거쳐서 정리를 발견하도록 해야 한다면 특정한 다면체를 강조하는 것보다 자유로이 여러 종류의 다면체를 탐구하도록 하는 것이 더 유리할 것이다. 그런데 한 가지 아쉬운 것은 이렇게 다양한 다면체를 탐구하면서 오일러가 걸었던 길을 단축하여 걷는 것이 아니라 각 조마다 이미 이 정리를 알고

있는 학생이 주도하여 정확하게 식을 쓰고 해보나 마나 성립한다는 식의 자세를 취한다는 점이다. 탐구 결과가 이미 알려져 있으니 탐구를 불러일으킨다는 것은 거의 불가능한 일이었다. 결국 연구자는 목표를 수정하기로 결정하였다. 오일러의 다면체 정리를 발견하는 것은 학생 각자가 중학생이 되면 배우는 것으로 생각하고, 이 수업에서는 학교에서는 하기 어려운 공모양 다면체의 성질을 흥미롭게 탐구하는 것 자체를 목표로 설정하는 것이다.

목표를 수정하면서 가장 중요하게 고려한 것 중의 하나는 앞서 소개한 세 번째 자료의 적용 결과였다. 연구자는 모든 학생들이 비록 수준과 태도의 차이는 있었지만 매우 열렬히 탐구하고자 하는 모습을 보여주었다는 것을 놀랍게 생각하고 있었다. 연구자가 전해주고자 하는 어떤 것이 아니라 학생들이 찾아가는 어떤 것을 목표로 하면 뚜렷하게 이론적으로 정립된 결과로 인도하기는 어렵지만 학생 스스로 무언가를 발견하고 활발한 토론을 통하여 발전시킨다는 것을 확신한 것이다. 학생들은 '왜 정다면체는 다섯 종류만 가능한가?'라는 문제를 스스로 '형식화'하였고, 그것을 지지하거나 반박하는 근거를 찾아 '타당화'하였다.[4] '축구공 다면체의 특성 탐구' 자체를 목표로 설정하면서 이러한 '형식화, 타당화'가 여러 단계에서 시도될 수 있는 것으로 확인되었다. 이러한 판단에 기초하여 다음과 같이 교육 자료를 재구성하였다. 각 활동 단계에서 학생들이 찾아낸 명제는 소박하지만 의미가 있는 것이었고 다른 학생들의 사고를 다양하게 자극하는 것이었다. 학생들이 <정보 수집>, <정보 처리>, <정보 파지>

<표 III-4> 축구공에 숨어있는 수학: 4차 개발 자료

	활동 내용	유의점
활동 1	축구공 탐구(꼭지점, 모서리, 면의 개수) 공모양 다면체 개념 도입, 특징 찾기	개수를 구하는 방법 찾아 토론, **<u>발표, 타당화</u>**
활동 2	한 종류의 정다각형으로 축구공 만들기 표현 도구 개발	폴리드론 이용 정다면체 관련 추론
활동 3	두 종류의 정다각형으로 축구공 만들기 표현 도구 적용	공모양 다면체의 특징 관련 추론
활동 4	입체각(한 꼭지점에 모인 다각형의 내각의 합) 개념 도입, 입체각과 입체각의 합 비교	축구공 다면체 관련 추론

4) 폴리아(1965)는 과제 또는 문제가 갖추어야 할 가장 중요한 특징 가운데 하나로, 학생이 수학적 관례를 참고하여 나름대로 '문제를 형식화하도록 하는 것'을 제안하였다. 문제가 무엇인지 이해하는 가장 핵심적인 단계는 나름대로 형식화하여 문제를 표현하는 것이라는 것이다. 위에서 연구자가 중요하게 고려한 수업 장면은 바로 이렇게 학생 스스로 문제를 '형식화'하는 모습이었다(110-111). 한편, 브루소(1997)는 타당화해야 할 필요를 느낄 때에만 수학적 증명은 의미가 있으며, 이것은 교수학적 상황에서 기본적으로 받아들여야 할 공리와도 같다고 주장하였다. 본 고에서는 이러한 의미에서의 타당화, 수학적 증명이 영재교육에서도상당히중요하다고생각하였다.

단계에서 보여준 행동 특성을 추측, 소박한 추론, 공식 등으로 분류하면 <표Ⅲ-5>와 같다. <활동 1>에서 축구공 자체를 탐구 대상으로 정하자 학생들은 흥미롭게 꼭지점, 면, 모서리의 개수를 구하는 것을 문제로 제기하였다. 학생들은 "축구공을 관찰하고 수학적인 성질이라고 할 만한 것을 찾아보세요"라는 지극히 간단한 발문만으로 위의 표에 제시한 다양한 추측과 설명을 제시하였다. 정오각형의 개수를 이용하여 정육각형의 개수를 구하는 식을 찾아낸 학생은 모두 3명이었으며, 이들 중 한 명의 학생은 정육각형의 개수를 먼저 구했다면 정오각형의 개수가 '20×3÷5'에 의하여 계산된다고하는 것도 알아냈다. 공모양 다면체의 개념이 도입되고 공모양 다면체의 핵심적인 특징, 곧 공모양 다면체가 되기 위한 가장 중요한 조건을 찾는 동한다' 등의 의견이 제시되었고, 결국 '모든 꼭지점에 같은 방법으로 다각형이 모여야 한다' 안, '만들었을 때 공과 모양이 비슷해야 한다', '일정한 규칙에 의하여 다각형이 배열되어야 한다'라는 의견에 모든 학생들이 동의하였다. 조별로 또는 전체 학생들 사이에 활발한 의견이 제시되고 반박과 평가가 이루어졌다. <활동 1>이 끝날 무렵, '이제 한 꼭지점에만 신경 쓰면 공모양 다면체를 다양하게 만들 수 있다'라는 추측이 제시되었다.

<활동 2>는 공모양 다면체 중에서도 특별한 성질을 가지는 정다면체에 관련된 내용이었다. 학생들이 정다면체에 관해서는 대부분 알고 있기 때문에 '왜 정다면체가 다섯 종류밖에 없는가를 설명하는 것'에 주목하도록 하는 활동이었다. 예상대로 학생들은 입체가 되기 위해서는 한 꼭지점에 다각형이 적어도 세 개 이상 모여야 하고, 다각형의 종류에 따라 모일 수 있는 최대한의 다각형의 수가 다르다는 것을 토론하였으며, 같은 맥락에 따라 정삼각형을

<표 Ⅲ-5> 활동 과정에서 형식화하고 타당화한 문제(명제)

	명제, 추측, 문제 등	타당화 내용
활동 1	· 정오각형의 각 꼭지점이 곧 축구공 다면체의 총 꼭지점. · 정오각형의 개수 이용 정육각형 개수 계산 · 공모양 다면체가 되기 위해서는 모든 꼭지점에서 같은 일이 일어나야 한다. · 한 꼭지점에만 주목하면 공모양 가능	· 모든 학생이 인정 (12×5=60) · 12×5÷3=20 · 어느 한 꼭지점에서 다른 방법으로 다각형이 모이면 찌그러지므로 · 체계적인 추론 가능
활동 2	· 입체가 되기 위해서는 세 개 이상의 다각형이 한 꼭지점에 모여야 한다. · 정다면체는 5종류밖에 없다. · 정다면체는 내구성에 문제가 있다.	· 입체각 관련 설명 · 수학적 추론 · 입체각 관련 추론
활동 3	· 정삼각형과 정사각형으로 만들면 (3, 3, 3, 4), (3, 4, 4), (3, 4, 4, 4), (3, 3, 3, 3, 4) 가능할 것이다. · 정삼각형과 정오각형의 경우 (5, 3, 5, 3)	· 실제적 증명 수준 (폴리드론을 이용하여 실제로 만들어 확인) · 이론화 시도
활동 4	· 입체각의 합이 클수록 공모양에 가깝다. · 입체각이 크면 면의 개수도 크다.	· 사례 비교 · 반례를 들어서 증명

이용하여 만들 수 있는 정다면체는 정사면체, 정팔면체, 정이십면체 뿐임을 설명할 수 있었다. 정사각형, 정오각형을 이용하여 만들 수 있는 정다면체도 찾아냈으며 수학적으로 의미 있는 표현 방식으로 정다면체의 종류가 다섯 개로 제한되는 이유를 제시하였다.

<활동 3>에서는 두 종류의 정다각형을 한 꼭지점에 모으는 경우의 수가 너무 많기 때문에 '수학적인 표현 방식'이 필요하다는 제안이 이루어졌다. 한 명의 학생이 축구공 다면체를 (5, 6, 6)과 같이 표현하면 된다고 제안하였고, 전체 학생들이 그 표현 방식을 받아들이기로 결정하였다. 이제 한 꼭지점에 오는 다각형의 종류만 결정하면 다양한 공모양 다면체를 만들 수 있을 것으로 생각하고 각 조별로 (3, 3, 3, 4), (3, 4, 4), (3, 4, 4, 4), (5, 3, 5, 3) 등의 많은 공모양 다면체를 찾아냈다. 공모양 다면체가 이렇게 많다는 것에 상당히 감탄하는 모습이었다. 그런데 여기서 심각한 문제가 제기되었다. 한 명의 학생이 예를 들어, (4, 5, 6)은 공모양 다면체가 될 수 없는데 그 이유를 실제로 만들어 보기 전에 어떻게 확인할 수 있는지를 다른 학생들에게 질문한 것이다. 각 조에서 이 문제를 해결하기 위해 노력했으나 간단하지 않다는 결론을 내리고 과제로 남기고 다음 활동으로 넘어갔다.

<활동 4>는 한 꼭지점에 모인 다각형의 내각의 합을 입체각이라고 정의하고 앞서 만들어 본 다면체의 입체각을 구하는 것이었다. 정사면체의 경우, 한 꼭지점에 세 개의 정삼각형이 모여 있으므로 입체각은 180°, 정팔면체는 240°, 정이십면체는 300° 임을 알 수 있었다. 여러 다면체의 입체각을 계산하면서 알아낸 성질을 쓰도록 하니, '입체각이 클수록 공모양에 가깝다', '입체각이 크면 면의 개수도 크다'라는 추측이 제기되었다. 첫 번째 추측에는 모든 학생들이 동의하였고, 두 번째 추측에 대해서는 반례를 많이 찾을 수 있어서 성립되지 않는 명제로 결론 내렸다. 특히, 주목할 만한 것은 축구공 다면체의 입체각이 348° 로 상당히 크지만 면의 개수는 32개로 다른 어떤 다면체보다 입체각의 크기에 비하여 면의 개수가 작다는 것을 각 조마다 찾아낸 점이었다. 결국 면의 개수는 작으면서도 입체각의 크기가 커서 공모양에 가깝고 경제적인 다면체이기 때문에 축구공 다면체가 실제로 축구 경기에 활용된다는 것을 학생들 스스로 찾아낼 수 있었다.

<활동 3>에서 제기되었던 (4, 5, 6) 다면체의 문제를 해결하기 위해서는 별도의 활동이 필요하다. 결국 오일러의 다면체 정리가 도입되어야 해결될 수 있는 문제이다. 본 고의 2장 (2)를 참고하면 이 문제를 해결할 수 있다. 실제로 과제 해결을 위하여 2명의 학생이 끈질기게 연구하고 질문하여 연구자는 폴리아가 제시한 탐구 과정을 안내하였다. 공모양 다면체는 볼록 다면체에 속하기 때문에 오일러의 다면체 정리에 의하여 (4, 5, 6)은 불가능한 것이다. 아직 초등학생이기 때문에 이들에게는 폴리아의 예가 너무 어렵지만 중학생들을 위해서는 '축구공에 숨어 있는 수학 2'로 제시할 만한 내용이다.

위에서 살펴본 바와 같이, 학생들이 여러 가지 다양한 추측을 하고, 형식화하여 토론 주제로 제기하거나 그 타당성을 증명하거나 반박하기 위하여 노력하게 된 것은 교육 내용 자체가 계속적인 '성찰'을 요구하기 때문이다. 예를 들어, 아주 간단하지만 축구공 다면체의 꼭지점의 개수를 구하도록 한 후에 '정말로 그렇게 원시적인 방법으로 구해야 하는지, 다른 방법이 없는지'를 생각하게 한 것은 학생들이 배운 수학 또는 앎의 과정을 성찰하도록 한다. 성찰을 통하여 학생들은 이미 알고 있던 수학적 개

념을 서로 연결하거나 새로운 표현 도구를 개발하기도 한다. 앞서 살펴본 바와 같이 한 꼭지점에 정삼각형 3개가 오도록 하여 만든 다면체를 (3, 3, 3)이라고 표현한 것은 입체각을 계산하는 데에도 도움을 주었고, 다른 학생들과 다면체의 종류를 이야기할 때에도 도움을 주었다. 성찰은 효과적인 수학적 표현 도구를 개발하거나 공유하는 데 중요한 역할을 하는 것이다.

Ⅳ. 논의 및 맺는 말

지금까지 교육 내용 개발의 문제를 한 가지 사례를 중심으로 알아보았다. 물론 '축구공에 숨어있는 수학: 4차 개발 자료' 또한 완전한 것은 아니며, 다시 부분 수정을 시도해야 한다. 이러한 개발 과정을 참고하건대 좋은 영재교육 자료를 개발하기 위해서는 반드시 적용과 관찰·분석이 필요하다. 수학적으로 우수한 아동이라고 무조건 어려운 내용을 제시하거나 학생들의 흥미를 고려한다고 하여 수학과는 거리가 먼 내용에 초점을 맞추는 것은 아닌지 계속적으로 확인하면서 업그레이드를 하는 것이 필요한 것이다. 크루테츠키가 제시하는 수학 영재아의 특성은 개발된 교육 자료의 적용 과정을 관찰할 때 중요한 관점을 제공해 준다. 얼마나 유연하고 독창적으로 수학적인 추측을 하고 그 타당화를 시도하는지, 가역적인 사고 또는 사고의 단축을 얼마나 보여주는지 등을 염두에 두면서 적용 과정을 관찰하고 분석한다면 영재교육 자료가 얼마나 본래의 취지에 맞게 개발되었는지 판단할 수 있을 것이다. 본 고에서 시도한 4개의 교육 자료는 같은 소재를 이용하였음에도 적용 과정에서 상당한 차이가 있었고, 학생들의 유연한 사고와 다양한 수학적 추측을 가능하게 하는 방향으로 수정을 시도하였을 때 실제로 수업에서도 탐구 자체의 의미를 살릴 수 있었다. 자료를 개발하는 초창기부터 크루테츠키의 연구결과를 보다 체계적이고 적극적으로 반영할 수 있었다면 시행착오의 회수를 줄일 수 있었을 것으로 추측한다.

실제로 수학 영재교육 자료의 개발에 직접적인 시사점을 주는 것은 폴리아의 이론과 예이다. 폴리아가 제시하는 예는 단편적인 문제상황이 아니라 치밀하고 구조적으로 조직된 과제이며, 유추, 형식화, 일반화, 특수화를 경험하게 함으로써 수학적 사고의 본질을 추구하는 것이었다. 이를 자료 개발의 주요 지침으로 삼으면 수학적으로 의미 있는 경험을 제공할 수 있을 것으로 생각한다. 이와 같이 폴리아의 예를 참고하여 자료를 개발한 경험에 기초하여 좋은 영재교육 자료의 특징을 정돈하면 다음과 같다. 첫째, 이미 알고 있는 수학적 개념이나 수학적 사고력을 확장 또는 발전시키는 기회를 제공하는 문제로 구성하여야 한다. 단지 속진에 그치는 교육 자료는 학생들이 활발하게 사고하면서 참여하게 하기 어렵다. 둘째, 활동 내용을 통하여 알게 된 내용을 형식화하고 타당화하면서 수학적으로 의미 있는 추측과 토론이 이루어지도록 해야 한다. 문제, 가설, 명제 등을 수시로 제기할 수 있도록 하고 그 타당성을 확인하게 한다면 진정한 의미에서의 흥미를 유발하고 지속시킬 수 있을 것이다. 셋째, 구조와 내용이 풍부하여 지속적인 탐구를 가능하게 하는 문제로 구성해야 한다. 이미 경로가 정해져 있고 수업 중에 완전하게 정돈하여 의문의 여지를 남기지 않는다면 짧은 시간 동안 이루어지는 영재교육이 궁극적으로 영향을 미치기 어려울 것이다. 가능한 한 여러 가지 방향으로, 여러 가지 방법으로 탐구할 수 있는 문제를 제공하는 것이 필요하다.

교육 자료가 의미 있게 개발되고 공유될 때에야 수학 영재교육은 본래의 취지를 실현할 수 있을 것이다. 서로 연결되지 않은 고난도 문제풀이 위주의 영재교육은 영재아 자신이나 교사, 사회 모두에게 좋은 경험을 제공하지 않을 것이다. 영재교육은 여러 다양한 특성을 지닌 학생들에게 각자의 가능성을 확인하고 살려내어 발전시킨다는 목적에 부합되어야 하며, 그래서 더욱 당장의 성과 또는 실적에 급급하지 말아야 할 것이다. 수학교육적으로 의미 있는 자료를 충실하게 개발하고 꾸준히 향상시키는 것에 주목하려는 노력이 필요한 것이다. 본 연구는 그러한 노력의 일부이며 그러한 노력이 왜 필요한가를 드러내는 노력의 일부이기도 하다. 앞으로 본 연구와 같이 구체적인 교육 자료를 개발하고 적용한 사례가 지속적으로 보고되어 영재교육의 질 관리가 이루어지기를 희망한다.

참고문헌

강완(1984). **수학적 능력 및 발견, 발명의 사고과정과 수학교육**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

____(1994). 수학적 능력의 구조에 따른 수학 영재아의 지도 방안. **수학교육학 연구**, 4(2), 139-147.

김주훈 · 박경미 · 최고운 · 이은미(1996). **영재를 위한 심화 학습 프로그램 개발 연구. - 국어, 사회, 수학, 과학을 중심으로**. 한국교육개발원 수탁연구 CR96-25.

김홍원 · 김명숙 · 송상헌(1996). **수학 영재 판별 도구 개발 연구(I) - 기초연구편**. 한국교육개발원 수탁연구 CR96-26.

김홍원 · 김명숙 · 방승진 · 황동주(1997). **수학 영재 판별 도구 개발 연구(II) - 검사제작편**. 한국교육개발원 수탁연구 CR97-50.

나귀수(1998). 수학 영재교육 프로그램 개발을 위한 연구 - 렌줄리의 3부 심화 학습 모형을 중심으로-. **학교수학** 2(1), 785-797.

송상헌(1998). **수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

_____(2000). 수학 영재아들을 위한 행동특성 검사지의 개발과 활용에 관한 연구. **학교수학** 2(2), 427-457.

송인섭 외(2001). **영재교육의 이론과 방법**. 서울: 학문사.

우정호 · 정은실(1995). Polya의 수학적 발견술 연구. **수학교육학 연구** 5(1), 99-117.

이경화(2000). **청주교육대학교 영재학교 수학반 운영현황 및 교육생들의 실태**. 청주교대 과학교육연구소 국제세미나 자료집.

_____(2001). 초등 수학우수아의 특성과 지도 자료의 예시. **수학교육학 연구** 11(1), 37-50.

정은실(1993). 폴리아의 수학적 방법론 고찰. **수학교육학 연구** 3(1), 59-74.

조석희 외 4인(1996). **영재교육의 이론과 실제 - 교사용 연수 자료**. 한국교육개발원 연구보고 CR96-28.

청주교육대학교 과학교육연구소(2000). **과학 · 수학영재의 선발 및 교육에 대한 국제세미나 자료집**. 청주교대 과학교육연구소.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics, didactique des mathématiques*, 1970-1990. Kluwer Academic Publishers.

Lakatos, I. (2001). **수학적 발견의 논리**. (우정호, 역). 서울: 아르케. (영어 원작은 1976년 출판).

Polya, G. (1965). *Mathematical discovery I, II*. John Wiley & Sons, Inc.

Development and application of mathematical activities for gifted students

Lee, Kyung Hwa (Chongju National University of Education)

This study intends to develope and apply mathematical activities for gifted students. According to the Polya's research and Krutetskii's study, mathematical activities were developed and observed. The activities were aimed at discovery of Euler's theorem through exploration of soccer ball at first. After the repeated application and reflection,the aim and the main activities were changed to the exploration of soccer ball itself and about related mathematical facts. All the students actively participated in the activities, proposed questions need to be proved, disproved by counter examples during the fourth program. Also observation, conjectures, inductive arguments played a prominent role.

핵심어: mathematical ability(수학적 능력), gifted students(영재아), mathematical thinking(수학적 사고), observation(관찰), conjectures(추측), plausible reasoning(개연적 추리).