大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 13 卷 第 3 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIII, No.3, 287-307. August 2003

등호 개념의 분석 및 학생들의 등호 이해 조사*

이 종 희** · 김 선 희***

본 연구에서는 수학학습에서 가장 많이 사용되고 있는 상징인 등호의 개념에 대해 분석하고 학생들의 이해 정도를 조사하였다. 등호는 =라는 상징에 의해 '같다'라는 의미가 부여되어 있지만, 사용되는 수학적 상황에 따라 해석이 다를 수 있다. 따라서 등호개념을 분석하기 위해 본 연구는 Vergnaud의 개념의 장에 의거하여 등호를 분석하였다. 그에 따르면, 개념은 상징, 조작적 불변, 상황으로 구성된 것이며, 조작적 불변에는 실행개념과 실행정리가 있다. 이러한 분석 내용에 따라 학생들이 등호 상징을 우리말로 어떻게 읽고, 등호가 포함된 식에서 무엇이 같은 것인지 또는 등호가 어떤 의미로 사용되고 있는지 설명하고, 등호와 관련된 오류를 잘 교정할 수 있는지에 대하여 조사하였다. 본 연구 결과는 수학 상징의 학습에서 수학 사회에서 규정한 상징의 표기, 그 수학 상징이 의미하는 것, 그 상징이 사용되는 상황적 맥락이 함께 고려되어야 함을 시사한다

Ⅰ. 서론

등호는 초등수학에서 고등수학에 이르기까지 가장 많이 사용되는 수학의 상징[1]이다. 미국의 초등학교 교과서에 등장하는 수학 용어와 상징을 분석한 연구 결과에 따르면 세로 계산에 의한 등호 상징 ____와 =의 상징을 포함하여 유치원에서 6학년까지 등호는 평균적으로 13735번 사용되고 있으며 이것은 어떠한 수학 상징보다 사용 빈도가 높은 것이다(Pickreign, 1996). 수학뿐 아니라 수학이 응용되는 학문이나 일반적으로 '같다'는 것을 의미하는 데에도 등호는 사용되고 있으며, 수학에서 등호는 학생들에게 기본이 되는 수학상징 중 하나로 이 상징의 의미 해석은 매우 중요하다. 그러나 많은 학생들은 등호를 산술에서 '더하라'는 과제나 질문으로 인식하며 등호 다음에 적절한 결과를 쓰라는 명령으로 이해하고 있다(Baroody & Ginsburg, 1982). 산술을 공부하는 학생들은 등호를 비대칭인 것으로 보기 때문에, $4+7=\square$과 같지 않은 $4+\square=7$라는 식을 어려워할 수 있다. 대수에서의 등호는 좌변과 우변이 대칭화된 것으로 산술에서의 등호와 성격이 다르다(Freudenthal, 1983). 대수에서 등호는 등식에 사용되며 등호의 양쪽에 있는 것은 서로 다른 이름으로 나타

* 이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원(KRF-2002-030-B00051)에 의해 이루어졌음.
** 이화여자대학교, jonghee@ewha.ac.kr
*** 광장중학교, ilovemath@empal.com
1) 상징은 기호의 표현과 그것이 보증하는 어떤 것과의 유사성을 보이지 않는 기호를 말한다. Saussure와 Hegel은 이것을 기호, Peirce는 상징이라 불렀으며(Trabant, 2001), 본 연구는 Peirce의 의견을 따르기로 한다.

나지만 같은 것을 가리킨다. 산술과 대수의 차이는 등호가 조작적 측면과 관계적 측면에서 이해되는 것의 차이에서 엿볼 수 있을 것이다.

대수를 접하기 시작하는 7학년부터 학생들은 기존의 산술에서 사용하던 등호의 의미를 새롭게 할 필요가 있다. Kieran(1980)은 이 학생들이 등호 다음에 답을 요구하는 것과 동치의 상징으로 등호를 받아들이는 것 사이의 전이의 시기에 있다고 하였다. 중등수학을 배우는 중·고등학생들은 산술적 의미에서의 등호보다 대수의 관계적 측면에서, 그리고 함수, 기하, 통계의 영역에서 관계적 측면에 의해 등호를 사용해야 한다. 그러나, 같다는 뜻의 등호는 그 해석이 미묘할 때가 있다. 예를 들어, 항등식의 등호는 좌변과 우변이 항상 같음을 보이기 위해 사용될 수 있으나, 학교수학의 기하 영역에서 $\triangle ABC = \triangle DEF$의 등호 의미는 두 삼각형의 길이와 각의 크기가 아니라 넓이가 같음을 의미한다. 또, 함수 $y=2x$에서 등호는 x에 2배를 한 값이 y가 되는 조작적 측면으로 사용될 수 있고 미분의 대상인 함수식 $y=2x$에 포함되어 보여질 수도 있다. 이렇게 학교수학에서는 수학 개념마다 등호의 의미가 약간씩 다르고 미묘하게 해석되며, 이것은 학생들이 등호와 관련된 오류를 범하게 할 수 있고 등호 개념을 잘못 이해하게 할 수 있다. 본 연구는 중등수학에서의 등호 개념을 분석하고 학생들의 등호 개념 이해를 조사하고자 한다. 등호 개념은 단순히 '같다'의 의미로만 파악될 수 없으며, 등호가 어떤 상황과 맥락에서 사용되고 학생들이 그 상황에서 어떤 개념을 적절하게 선택하고 올바르게 사용하는지가 함께 고려되어야 한다.

이를 위해 Vergnaud(1996)의 개념의 장 이론에 의거하여 등호 개념을 조사해 볼 것이다. 개념의 장 이론은 표현과 인지 발달에 관한 이론으로, 등호를 다른 개념과 연결된 것으로 보게 하고 그 수학적 원리를 상징적 표현과 더불어 고찰하면서 학습자의 복잡한 인지적 능력과 경험, 학습을 통한 발전에 대해 포괄적인 구조를 제공한다. 본 연구는 개념의 장에서 등호 개념을 이루고 있는 요소들을 중·고등학생들을 대상으로 조사하여 그 결과를 분석할 것이다. 먼저, 개념의 장 이론에서 개념을 이루고 있는 요소들을 등호 개념에 적용시키기 위해, 등호의 '같다'는 뜻과 등호의 표기인 =가 사용되게 된 역사적 배경을 조사한다.

Ⅱ. '같다'의 뜻과 표기

1. '같다'의 뜻

등호 =는 좌변과 우변이 같다는 것을 뜻하는데 사용되는 상징이다. 여기서 '같다'는 것은 무엇이, 어떤 점에서 같은 것인지 학생들이 판단하기에 미묘한 경우가 많다. 수학에서 사용되는 상징과 용어는 영어권 문화에서 번역되어 들어온 것이 많으며, 등호 또한 그러하다. 등호의 한국어 뜻인 '같다'의 의미가 무엇인지 그 미묘한 차이를 알아보기 위해 영어에서 '같다'의 의미로 사용되는 용어들을 조사하였다. 한국어로 '같다'라고 번역될 수 있는 영어 단어는 여러 가지이며 다음과 같은 의미의 차이가 있다(엘리트 영한 사전, 1995):

· same … (하나의 것에 관하여) 동일한; (별개의 것이) 같은.
· identical … same과 거의 같은 뜻이지만, 더욱 엄밀하게 쓰인다; (별개의 것이) 세부까지 조금도 다르지 않은.
· equal … 양 · 크기 · 가치 · 정도 따위에 차이가 없는.

· equivalent … 힘 · 가치 · 뜻 따위가 같은 것에 상당하는.

집합, 방정식, 함수, 기하, 측정의 수학 영역에서 '같다'를 뜻할 때도 identity, equality, equivalence 등의 영어 단어들이 사용된다. 이 단어들에 대한 수학적 의미를 박을용 등(1992)의 수학사전에 나온 정의로 살펴보면 다음과 같다.

· identity … 항등식. 등식에서 그 속의 문자에 어떤 값을 대입시켜도 언제나 성립하는 것을 말한다.
· equality … 상등. 같다는 동치의 뜻으로도 쓰인다.
· equivalence … 등가, 동적, 동등. 두 명제 P, Q에서 P가 참일 때 Q도 참이고, P가 거짓일 때 Q도 거짓이라면 P와 Q는 동치라고 한다.

이상에서 일상언어와 수학에서의 '같다'의 의미를 살펴보았다. 같다는 의미의 identity, equality, equivalence는 수학에서 모두 등호 =에 의해 표현된다. Gattegno(1974)는 이 세 가지의 단어의 의미를 다음과 같이 구별하고 있는데, identity는 실제로 같은 값과 관련된 제한된 관계이며, equality는 변하지 않는 특징이 같음을 가리키며, equivalence는 어떤 목적을 위해 다른 것에 의해 어떤 것을 대신하는 것이 가능하다는(Kieran, 1981, 재인용) 즉, 치환율이 성립하는 관계와 관련되어 있다. 이를 학교수학에 적용시켜보기로 한다. 먼저, identity는 항등식의 의미가 있으나 등식에서 참조대상이 같다는 즉, 양변의 연산이 동일한 값을 산출한다는 것을 가리키기도 한다(Herscovics & Kieran, 1980). 다항식을 간단히 하는 문제나 양변의 값이 같은 산술식을 볼 때 학생들이 사용하는 등호는 identity의 의미를 갖는다고 볼 수 있으며, 본 연구에서는 이것을 등가(等價)로 부르기로 한다. 예를 들어, 2+3=4+1에서의 등호는 등가의 의미이다. equality는 수학적 대상이 같음을 나타낼 때 사용되는 것으로, 등호의 양변 자체가 아니라 양변이 가리키는 대상이 같은 경우에 사용되며 본 연구에서는 상등(相等)이라 부를 것이다. 예를 들어, 집합에서 A=B의 등호는 상등의 의미이다. 마지막으로, 가장 유연하고 중요한 관계적 상징인 equivalence는 형식적 산술과 대수에서 등호 =가 가진 기본적인 개념으로, 다음의 세 가지 성질이 확인될 때 성립하는 관계의 개념이며 동치(同値)라고 부른다:

· aRa : 반사율
· aRb이면 bRa : 대칭율
· aRb, bRc이면 aRc : 추이율.

동치 개념은 등가와 상등을 포함한 것이기에 관계적, 형식적 측면에서 무엇이, 어떤 점에서 같은지의 의미는 모두 동치에 포함된다. 그러나 학생들이 '같다'의 의미로 등호를 사용할 때 동치의 관계적 성질만을 사용하는 것은 아니기 때문에, 학생들이 등호를 인식하고 사용하는 개념을 파악하기 위해서는 등가, 상등, 동치를 구분하는 것이 유용하다. 등호는 관계적 측면 뿐 아니라 조작적 측면의 성격도 가진다. 학생들은 등호의 조작적 측면에 의해 연산을 수행하라는 명령으로 등호를 인식하고 있다(Behr, Erlwanger, & Nicholas, 1980; Baroody & Ginsburg, 1982; Herscovics & Kieran, 1980; Kieran, 1981; Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998). 어린 아동은 2+3=5를 등가로 보지 않고 오히려 "2와 3은 5(2 and 3 make 5)"라고 읽음으로써 조작적으로 해석하는 경향이 있다(Herscovics & Kieran, 1980). 이때는 등호의 좌변을 계산한 것이 우변이 되는 것으로 등호의 양변이 대칭적으로 파악되지 않는다. 지금까지 논의된 등호의 의미는 다음의 <표 Ⅱ-1>과 같이 정리될 수 있다. 산술에서의 등호는 조작적 측면에서

비대칭의 형태가 되며 계산을 수행하라는 명령의 의미를 갖는다. 등호는 중등 수학부터 형식적으로 도입하는데, 관계적 측면에 의해 대칭의 형태로 표현되고 등가, 상등, 동치의 의미로 사용된다.

<표 Ⅱ-1> 등호의 의미

관점	조작적	관계적		
의미	계산하라	등가 (identity)	상등 (equality)	동치 (equivalence)
모양	비대칭	대칭		
학문	산술	대수, 형식적 수학		

동치 개념에 대해 한 가지 언급할 것이 남아있다. 등호는 동치 관계가 성립되나 모든 동치관계가 등호에 의해 표현될 수는 없다. Wheeler(1981)는 $5x \equiv 6(7) \Leftrightarrow x \equiv 4(7)$이고, $ab=c \Leftrightarrow a=cb^{-1}$는 옳지만, "$5x \equiv 6(7) = x \equiv 4(7)$"이나 "$ab=c = a=cb^{-1}$"는 안 된다고 하였다. 방정식을 해결할 때 등식의 성질에 의해 변형된 식은 이전의 식과 동치이지만 여기에 =를 사용하는 것은 잘못이다. 관계적 상징으로서의 등호 =는 등식의 양변의 값이나 대상에 대한 비교가 이루어져야 할 것을 암시한다(Behr, Erlwanger & Nicholas, 1980). 즉, 동치개념으로서의 등호는 등가나 상등의 의미 또한 성립하도록 사용되어야 하는 것이다.

2. '같다'의 표기

'같다'의 상징 표기는 '='이다. 이 상징은 산술 연산과 변수의 조작과 함께 발전해 왔다. '같다'라는 관계를 나타내는 등호 표기의 역사는 Cajori(1993)의 A History of Mathematical Notations에서 잘 보고되고 있는데, Cajori는 개인으로서의 수학자와 사회적 실재로서의 문화가 등호의 추상적인 개념과 의미를 포착하는데 관련되어 있다는 역사적 분석과 증거를 제시한다. 처음에 '같다'에 대한 표기는 무엇인가를 준다는 의미로 이집트 파피루스의 일차방정식에서 발견되었다. 즉, 표기의 역사에서도 등호는 조작적 의미로 사용되기 시작한 것이다. 이후 통일된 표기는 없었지만 Diopantus는 '같다'를 나타내는데 규칙적인 표현을 썼고, Bakhshali는 pha, Regiomontanus과 Paciol는 대시 - 를 사용했으며, Cardan은 '같다'의 상징이 들어갈 장소를 빈칸으로 두었다. 1557년 Recorde가 =를 사용하기 전에 등호는 aequales, aequantur, esgale, faciunt, ghelijck, gleish와 같은 단어에 의해 수사적으로 표현되었으며 때로는 aeq라는 생략된 형식으로 표현되기도 했다. Recorde의 =이 등장하기 100년 전까지 '같다'를 나타내는 공식적인 상징은 존재하지 않았다. 그러나 Recorde의 =는 발표되자마자 대중적으로 사용된 것은 아니었으며, 1631년경에 이르러서야 영국에서 일반적으로 인식되었다. 관계적 의미를 나타내는 '같다'의 의미를 나타내기 위해 등호 =와 경쟁적으로 사용된 상징은 여러 개 있었다. 1559년 프랑스의 J. Buteo는 [를 '같다'의 의미에 사용했다.

예를 들어 "1A, 13B, 13C [14"는 $x+13y+13z=14$를 뜻하는 방정식이었다. 1571년, 독일의 Wilhelm Holzmann은 두 개의 평행한 직선 ∥을 상등을 나타내는데 사용했다. 1649년 Lyons의 Pierre de Carcavi는 Decartes에게 보내는 서한에서 "$+1296-3060a+2664a^2-1115a^3+239a^4-25a^5+a^6 | 0$" 이라는 방정식을 썼으며 여기서 | 가 '같다'의 상징이었다. | 는 100년이 넘게 사용되었으나 '같다'에 대한 보편적인 상징이 되지는 못했다. 1698년 S. Reyher는 하나의 선으로 된 것을 사용했는데, 그는 A=B를 나타내는데 A| B라고 썼다. 가장 특이

한 상징은 Herigone이 만든 것으로 "2 | 2"이다. 예를 들어 $a^2+ab=b^2$은 "a2+ ab 2 | 2 b2"로 표기되었다. 같은 생각으로 3 | 2는 '…보다 크다'이고, 2 | 3는 '…보다 적다'는 뜻이다. 가끔 Herigone은 상등에 대해 ⊔을 사용했는데, Leibniz도 미출간 논문에서 ⊓과 =을 사용했었다. 그러나 =의 실제 경쟁자는 Decartes의 ꝏ이었다. ꝏ는 '같다(equal)'라는 의미의 단어 aequalis의 ae에서 제안된 것이며, Cantor는 ae라는 두 문자를 사용하기도 했다. 사실, Descartes 자신은 1640년 '같다'에 대해 =을 사용하였다. 그러나 Descartes가 Geometrie를 출판하기 몇 년 전에 네덜란드에 살면서 ꝏ을 사용했기 때문에, 네덜란드 저자들은 ꝏ을 널리 수용하였다. 특히 1646년에 Christiaan Huygen는 ꝏ을 고집했고, ꝏ는 17세기 네덜란드의 영향력 있는 수학자들에 의해 채택되었다. 1695년에는 프랑스에서도 =보다 ꝏ을 더 많이 사용한 것으로 나타난다. Recorde의 =은 17세기 영국에서 우세였다. 유럽 대륙에서 =은 Recorde 이후 약 100년이 지난 1650-1660년까지 실질적으로 공인을 받지 못했다. 18세기가 되어서야 =은 빠르게 퍼져 알려졌으며, 이것은 그 시기에 미적분학을 발명한 Newton과 Leibniz가 =를 사용한 덕분이다. Recorde의 상징은 처음부터 =가 아니었다. Recorde는 두 개의 선을 길고 가깝게 하여 ═══라고 썼으며, 이런 표기는 다른 이들의 논문에서도 발견된다. 어떤 사람들은 두 선을 매우 짧게 그렸고, Emanuel Swedenborg는 짧고 약간 위로 향하는 ⫽으로 표기했으며, 서로 떨어져 있는 =을 사용하기도 했고, 몇몇 논문에서는 1을 수평으로 놓은 것과 같은 ⊨나 ⫤이 사용되기도 했다. 등호는 특정한 의미를 위해 변형되기도 했는데, Wolfgang Bolyai는 1832년 절대적인 상등을 의미하는데 ≐을 사용하고 내용이 같은 경우에는 ⩦을 사용했다. A의 값이 B의 값과 같다는 것을 의미할 때는 "A(=B"나 "B=)A"를, A의 값 각각이 B의 어떤 값과 같다는 것은 "A(=)B"로 나타내어지기도 했다. 벡터의 같음을 표기하기 위해, Bellavitis는 1832년부터 ≏을 사용했고, L. Gustave du Pasquier는 또한 일반적인 복소수를 토론하면서 '정의에 의해 같다'를 의미하는데 ≡를 사용했다. 거의 같음을 나타내기 위해서는 ~가 사용되었고, 유사하게 ≅이 '같거나 거의 같은'의 뜻으로 사용되었다. A. Eucken은 ≃을 하한을 언급하는데 사용했고, Greenhill은 대략적인 상등을 말하는데 ≋를, Fischer는 ≍을 사용했다. '같다'의 의미가 미묘한 것처럼 그 미묘한 의미를 나타내기 위해 수학자들은 여러 상징을 발명하고 사용해 왔다. 그리고 현재 산술과 대수에서 등호의 해석 차이가 역사적으로도 조작적, 관계적 측면에서 찾아질 수 있었다. 역사상 의미의 차이에 따라 여러 상징이 사용되기도 하였으나 현재에는 가장 편리하고 등호의 의미를 함축한다고 여겨지는 =이 경쟁이 되는 여러 상징을 물리치고 수학 사회의 규약에 의해 공식적으로 인정받게 되었다.

III. 등호의 개념

등호는 =라는 표기에 의해 조작적으로는 '계산하라', 관계적으로는 '등가, 상등, 동치'의 의미로 사용되고 해석되고 있다. 하나의 표기에 여러 의미가 부여되는 것은 등호가 사용되는 맥락적 환경이 작용하기 때문이며, 이 장에서는 Vergnaud(1996)의 개념의 장 이론(theory of conceptual field)에 의거하여 등호개념의 다양한 요소를 알아본다.

1. 개념의 장

등호는 '같다'의 의미를 나타내는 상징 표현이다. 학생들이 등호에 대해 어떤 개념을 갖고 있는지 조사하기 위해서는, =라는 표현 속에 담긴 수학적 의미와 학생들의 주관적 해석에 대해 함께 알아보아야 한다. 등호는 앞서 살펴본 바와 같이 계산 명령, 등가, 상등, 동치에 의해 '같다'를 뜻한다. 그러나 수학의 여러 학문적 분야에서 사용되고 있는 등호는 표기의 역사적 발전을 살펴보아도 그 해석이 여러 가지임을 알 수 있다. 따라서 등호를 고찰하기 위해서는 등호의 상징 표현 뿐 아니라 등호가 갖고 있는 본연의 조작적 불변의 성질과 등호가 사용되는 학문 영역의 상황이 함께 고려되어야 한다. 이러한 요소들을 개념에 포함시켜 학생들의 복잡한 인지적 능력(competence)과 활동, 경험과 학습을 통한 발전에 유익하고 포괄적인 구조를 제공한 것이 Vergnaud(1996)의 개념의 장 이론이다. Vergnaud는 개념을 다음의 3 요소로 구성된 집합으로 보고 있다.

$$C=(S, I, \mathcal{S})$$

S는 의미 있는 상황의 집합, I는 이 상황을 다루는 발전된 스키마에 포함된 조작적 불변, $\mathcal{S}$는 관계를 표현하고 그것에 대해 의사소통하고 상황을 마스터하도록 하는데 사용될 수 있는 상징적 표현(일상언어, 그래프, 다이어그램, 대수, ...)을 말한다.

개념은 단지 정의가 아니다. 개념은 상황에 따른 의미의 해석이 학습 주체에 의해 이루어져야 하며, 여러 상황에서 변하지 않고 남아 행동에 사용되는 조작적 불변의 성질을 갖고, 그 개념을 표현하는 언어와 상징으로 구성된 것이다. 따라서 개념은 어느 한 가지 측면에서 설명될 수 있는 것이 아니며 여러 연결된 개념을 요구하는 상황의 집합에 의해 여러 성질, 즉 여러 상황에서 해석이 이루어지는 개념들의 집합인 개념의 장에서 고려되어야 한다. 등호가 사용되는 여러 상황은 함수, 방정식, 기하 등의 서로 다른 개념들과 연결되어 있으며 그런 개념들 속에서 등호의 의미가 제대로 파악될 수 있기 때문에, 등호는 단독적인 개념이 아니라 개념의 장 내에서 고찰되어야 하는 것이다.

등호가 여러 상황에서 다른 개념과 연결되어 파악될 때 사용되는 인지적 요소가 있다. 이것은 조작적 불변으로 불리는 것으로, 그 안에는 등호와 관련된 개념 중 어느 것이 그 상황에서 적절할 수 있는지 조절하는 실행개념(concept-in-action)이 있다. 실행개념은 주체가 환경을 여러 요소와 측면으로 분할하고 관련된 상황과 스키마에 따라 가장 적절한 정보를 선택하게 하는 카테고리이다. 예를 들어, '영희는 철수와 어떤 게임을 하여 5개의 사탕을 잃었다. 지금 영희는 사탕이 7개가 있다. 게임을 하기 전에는 몇 개의 사탕이 있었을까?'라는 문제를 해결할 때 적용되는 실행개념은 기수, 이득과 손실, 증가와 감소, 변환과 상태, 처음과 마지막 상황, 덧셈과 뺄셈 등이다. 등호를 사용하는 상황에서 등식의 성질과 같은 정보를 선택하는 것은 실행개념에서 이루어지는 것이며, 이것은 적절하거나 부적절할 수 있다. 적절성과 부적절성은 참과 거짓과는 다르다. 예를 들어, 삼각형, 수, 대칭, 연산자, 변환의 개념이 그 자체로 거짓 또는 참이라고 말하는 것은 의미가 없는 것이다. 이 개념들은 수학 과제에서 표현과 행동을 특징짓는 적절한 수학 개념일 뿐이다.

조작적 불변에는 등호와 관련된 성질들이 여러 상황에서 일관되게 남아 있는 것을 말하는 실행정리(theorem-in-action)가 있다. 실행정리는

어떤 영역의 상황 변수에 대하여 참이라고 주어진 명제라 할 수 있다. 앞의 예에서 본다면, 실행정리는 "$F=T(I) \Rightarrow I=T^{-1}(F)$. 여기서 I는 게임을 시작하기 전의 사탕 수, F는 게임 후의 사탕 수, T는 게임에 의해 5개를 잃는 것에 대한 변환, T^{-1}은 T의 역변환"이라 할 수 있다. 등호에서는 등식의 성질, 동치 관계에서 성립하는 성질, 치환율 등이 실행정리에 해당한다. *실행정리의 타당성은 수학에서의 정리와는 다*를 수 있으며 참이거나 거짓일 수 있다.

개념의 장 이론은 수학적 개념이 상징을 통해 표현되고, 그 개념의 해석은 맥락적 환경 내에서 실행개념과 실행정리에 의한 성질로 파악될 수 있음을 시사한다. 상징 안에 모든 수학적 의미가 포함될 수 있는 것은 아니며 개념을 접하는 사람이 상황에 따라 적절한 해석을 해야 하는 것이다.

2. 등호 개념의 장

개념은 상징, 조작적 불변, 상황의 세 가지 요소로 구성되어 있다는 것을 개념의 장 이론을 통해서 살펴보았다. 등호의 개념에서 이 세 가지 요소를 고찰하기로 한다. 먼저, 등호의 상징은 유일하게 =이 사용된다. 그러나 =은 읽혀지는 방법이 여러 가지이다. 2+3=5를 어떤 학생들은 "2와 3을 더하면 5가 된다", "2 더하기 3은 5이다"라고 읽고, 어떤 학생들은 "2와 3을 더한 것은 5와 같다"고 읽는다. 여기서 "~이면 ~이다", "~은 ~이다"나 "~은 ~와 같다"가 등호 =의 언어 표현이 된다. 이렇게 등호 상징을 읽는 것을 통해 학생들이 등호를 조작적, 관계적 어느 측면에서 인식하는지 알 수 있다. 또, 영어의 문법과 수학 상징의 문법이 혼동되어 영어권 학생들은 반전 오류(reversal error)[2]를 많이 범하고 있는데, 한국어를 사용하는 우리나라 학생들이 =을 "은/는"으로 읽는 것은 등호가 '같다'의 의미가 아니라 'be'의 의미를 갖게 할 수 있다. 'A는 B이다'에 '$B \subset A$'라는 의미가 내포되지 않듯이 등호를 '-은'으로 읽는다면 학생들은 좌변이 우변에 포함되는 충분조건이 될 수 있지만 필요조건은 성립하지 않는다고 판단하여 동치 관계를 파악하지 못할 수 있다.[3] 이러한 일상언어의 표현 매개가 등호 상징에 대한 해석에 영향을 줄 것으로 여겨진다.

두 번째로, 등호 개념에서 실행개념과 실행정리의 조작적 불변을 알아본다. 등호 개념에서 실행개념은 적절한 정보를 선택하고 확인하는 카테고리로, 동치 관계를 유지하게 하는 것, 등식의 성질, 치환율과 관련되어 있다. 3a+2b+a라는 식을 간단히 하라고 했을 때, 어떤 학생이 3a+2b+a=a+a+a+b+b+a라고 했다고 하자. 학생이 쓴 식은 동치 관계를 유지하고 있고 옳은 것이지만 적절한 답은 아니다. 등호를 사용하면서 무엇이 같은지, 어떤 점에서 같은지 해석할 때 적용될 수 있는 적절한 개념 선택이 필요하다. 본 연구에서 등호의 실행개념은 관계적 측면의 등호 의미 뿐 아니라 조작적 측면의 의미도 포함한 계산 명령, 수치, 진리값 등의

---

2) 다음의 문장을 식으로 바꿀 때, 6S=P라고 쓰는 오류이다(Philipp, 1990). There are six times as many students as professors at this university. Use S for the number of students and P for the number of professors.

3) '이다'의 뜻에 대해서 국어의 통사론은 세 가지로 분류한다. 첫 번째는 분류문으로, [체언1이 체언2이다]로 표시되며 체언1은 체언2의 부분집합이거나 상등집합이어야 한다. 둘째는 유사분류문으로, [체언1이 체언2와 같다] 등의 뜻을 가진 은유적 표현으로 일시적으로 분류문의 형식을 취한다. 예를 들어, '침묵이 금이다'. 셋째는 비분류문으로 문법적으로 설명이 되지 않는, 문법의 범위를 넘어선 문장들이다. 예를 들어, '나도 너하고 동감이다'.(남기심, 2001) 국어에서 '이다'의 뜻은 첫 번째 분류문으로 많이 쓰인다.

카테고리이며, 학문 영역마다 사용되는 등호의 개념에 대한 학생들의 생각으로 조사될 것이다. Driver와 Easley(1978)는 규범지향적(nomothetic) 연구와 표의적(ideographic) 연구 방법의 차이를 언급한 바 있다[4](Alon, 1997, 재인용). 학생들이 등호와 관련한 자신의 경험으로부터 적절한 개념을 선택하는 실행개념은 연구자가 상황을 통제하여 진행되는 연구보다 학생들이 자신의 생각을 있는 그대로 보여주는 표의적 연구 방법에 의거하여 조사될 수 있을 것이다.

실행정리는 등호가 사용되는 과정이 참을 유지하도록 하는 것이다. 예를 들어 어떤 학생이 2×5-3을 계산하기 위해 2×5=10-3=7이라고 했다면, 등가를 포함한 동치 관계를 의미하는 등호를 옳게 사용했다고 할 수 없다. 집합, 수식, 방정식, 함수, 기하 등의 수학의 전반적 영역에서 사용되는 등호가 두루 사용되어도 변하지 않고 남아 있는 등호의 성질은 실행정리에 해당한다고 할 수 있으며, 본 연구에서는 학생들이 등호가 있는 식에서 많이 저지른다고 보고된 오류에 대한 학생들의 반응을 통해 등호에서의 실행정리를 알아보기로 한다. 등호와 관련된 오류는 방정식 풀이 과정에서 방정식들을 연결하는 등호를 사용하는 동치 오류[5](Wheeler, 1981), 좌변의 식을 연산한 결과로 우변을 인식하여 우변을 하나의 항으로 답하려는 완전성 결여의 오류(lack of closure; Collis, 1974, Kieran, 1981, 재인용), 대상의 수가 아니라 대상 자체를 문자로 표기하는 라벨링 오류(Philipp, 1990 ; Wheeler, 1981), 반전 오류(Philipp, 1990)가 있다.

세 번째로 학교 수학의 영역 내에서 등호가 사용되는 상황을 생각하자. 등호는 산술의 계산, 대수, 무리수, 집합, 방정식, 다항식의 계산, 함수의 영역에서 사용되며, 수학에서만 사용되는 상징이기 때문에 등호가 사용되는 상황은 실세계 내용보다는 수학적 내용에 근거하여 찾는 것이 더 도움이 될 것이다. 교육과정에서 등호가 다루어지는 내용은 아래의 예에서 찾을 수 있다.

• 산술: 등호는 '계산하라'는 명령의 조작적 측면을 가지며 우변에 하나의 항을 요구한다.
예) 2+3=□, 3:4= , 9÷2=

• 대수적 내용: 일반화의 표현이나 식의 값 구하기에서 등호가 사용된다.
예) a=b=c,
a(b+c)=ab+ac,
a=3, b=-2일 때 a+b=?

• 무리수(복소수): 정의에 의해 등호가 성립한다.
예) 유리수 a, b, c, d에 대하여 $a=c, b=d$일 때, $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$

• 집합: 정의에 의해 등호가 성립한다.
예) A⊂B이고 A⊃B일 때 A=B,
{1, 2, 3}={3, 2, 1}

• 방정식: 방정식은 문자의 존재 여부와 위치에 따라 산술방정식과 대수방정식으로 나뉘어지며, 그에 따라 등호의 해석이 다를 수 있다. 산술방정식은 등호의 양변이 같다는 것을 먼저 인식

4) 규범지향적 연구는 학생들의 이해를 표준적인 아이디어에 의해 평가하지만, 표의적 연구는 개념화를 외적으로 정의된 체계 없이 탐구하고 분석한다. 규범지향적 유형의 연구에서 규범이 정해지면 연구자는 학생들의 이해가 그 규범에 순응한 정도를 평가할 수 있을 뿐 학생들의 다양한 이해에 대한 조사를 하기에는 한계가 있다.
5) 이 경우 학생들은 등식의 성질을 이용한 방정식의 변형을 동치관계로 인식하여 등호 =를 사용한다고 보고 이러한 오류를 본 연구에서는 동치 오류라 부를 것이다.

하지 않아도 문제에 주어진 상황에 적절한 미지수의 값을 구할 수 있는 방정식으로 등호의 한 변에만 미지수가 있는 식이고, 대수방정식은 양변이 같음을 전제로 등식의 성질을 이용하여 미지수를 구해야 하는, 양변에 미지수가 있는 방정식을 말한다. 산술 방정식에서는 등호의 의미가 조작적 측면에서 해석되어 좌변을 계산하여 우변이 나오게 하는 미지수 값을 찾도록 해석될 수 있으며, 대수방정식에서는 좌변과 우변이 같다는 관계적 해석을 하게 한다. 방정식의 풀이 과정에서 학생들은 동치 오류를 범할 수도 있다.

예) $x+3=1$(산술방정식),

$2+3x=2x+8$(대수방정식),

$x^2=2x-1=x^2-2x+1=0=(x-1)^2=0=x-1=0=x=1$

(동치 오류)

• 부등식: '크거나 같다'와 '작거나 같다'에서 '또는'의 의미와 결부되어 등호가 해석된다.

예) $x \leq 5$, $4 \leq 5$

• 다항식의 계산: 동치관계를 유지하면서도 '계산하라'는 조작적 측면을 갖는다. 완전성 결여의 오류가 발생할 수 있다.

예) $3a(2b+7) \div 5 = \frac{6ab}{5} + \frac{21a}{5}$

• 기하: 기하에서 등호는 기하의 대상인 도형의 측정과 관련하여 길이나 넓이, 부피의 같음을 나타낼 때 사용된다. 이때 선분이 같음은 두 선분의 방향이나 위치가 같은 것이 아니라 선분의 길이가 같음을 나타내는 것으로 등호가 해석되어야 한다.

예) $\overline{AB}=\overline{AC}$

• 함수: 함수의 정의에서는 관계적 측면이 부각되나, 규칙을 찾아 함수식을 쓸 때는 산술 계산과 반대로 우변의 과정이 계산되어 좌변을 만드는 조작적 측면을 갖는다. 또, 함수는 방정식의 모양으로 표현되기도 한다.

예) $y=f(x)$, $y=2x+1$, $2x+y=5$

등호의 개념이 개념의 장에서 형성되는 바를 등호의 언어 표현, 조작적 불변, 상황의 측면에서 알아보았다. 등호의 개념은 어느 한 가지로 설명할 수 없는 것이며 상황에 따라 적절한 개념이 정확한 표기에 의해 올바른 절차로 사용되어야 한다.

Freudenthal(1983)은 수학에서 등호의 사용이 종종 정의의 문제라고 말한다. 하지만 학생들은 완전히 형식적인 수학을 다루는 것이 아니므로 엄밀한 정의 없이 등호 개념이 사용되기도 한다. 따라서 각 상황에 따라 등호를 정의하기보다는 지금까지 논의한 등호 개념의 장에서 학생들이 등호를 어떻게 이해하고 있는지, 등호를 학생들에게 어떻게 접근시킬 수 있는지에 관심을 가져야 할 것이다. 이에 대해 본 연구는 중・고등학생들이 갖고 있는 등호 개념을 조사하였다.

Ⅳ. 중・고등학생들의 등호 개념

학생들이 등호 개념을 어떻게 이해하고 있는지 알아보기 위해 중학교 7, 9학년 학생들과 고등학교 10학년 학생들을 대상으로 등호 개념을 조사하였다. 서울 시내에 소재한 G중학교 7학년 131명과 9학년 75명, 그리고 S여고 10학년 94명이 2003년 2월, 본 연구에 참여하였다. 등호는 중・고등학교에서 두루 사용되는 상징이고 학년간에 등호 개념의 차이가 있을 것으로 여겨져 여러 학년의 학생들을 대상으로 하였다. 지필 검사의 문항 내용은 개념의 장의 3가지 요소인 상징, 조작적 불변, 상황의 집합에 의거하여 구성된 것으로, 7학년 학생들이면 알 수 있는 수준으로 문항을 선정하였다. 문항은 <부록>에 제시되어 있다.

등호의 상징에 관한 문제는 등호 =를 일상

언어로 읽는 언어표현의 측면에서 조사했으며 등호가 조작적, 관계적 어느 측면으로 파악되는지를 알아보는 것으로, 1~4번 문항에 있다. Behr, Erlwanger, & Nicholas(1980), Baroody & Ginsburg(1982), Herscovics & Kieran(1980), Kieran(1981), Sáenz-Ludlow & Walgamuth(1998)은 학생들이 등호를 주로 연산의 명령인 조작과 관계적 상징으로 파악하는 경향이 있었다는 것을 보여주었으며 대수를 배운 우리나라 학생들이 등호에 대해 어떻게 파악하는지 알아보기 위해 등호 상징 읽기의 문항이 만들어졌다. 조작적 불변에서 실행개념은 등호가 사용될때 등호와 관련된 다른 개념들을 적절하게 선택하는 것으로, 교육과정에 있는 내용 중에서 문자를 사용한 식, 집합, 방정식, 부등식, 항등식, 기하적 대상, 함수의 상황에서 학생들이 어떤 관련 개념을 도입하여 등호를 해석하는지 질문하는 것으로 5~12번까지의 문항으로 구성되었다. 실행정리의 문제는 등호에서 학생들이 가질 수 있는 오류를 학생들이 어떻게 판단하는 지로 구성되었으며, 13~16번의 문항이다. 상황의 집합은 실행개념의 맥락 속에 포함되어 있으므로 따로 문항을 구성하지는 않았다. 학생들에게 45분간 1~16번까지의 문제지에 등호와 관련된 생각을 적게 하였다.

1. 언어 표현

개념의 장 이론에 근거하여 등호의 상징적 측면을 조사하는 것은 등호의 상징과 일상언어 표현의 관계를 통해서 알아보았다. 등호가 들어간 산술과 대수식을 학생들에게 제시하고 일상언어로 식을 읽게 하였다. 조작적, 관계적 어느 측면에서 같다는 뜻의 등호가 해석되는지 알아보고자 한 것이기 때문에 수와 문자를 사용한 대수식에 한정하여 문항을 구성하였다. 주어진 식을 읽고 문장으로 쓰게 했을 때 등호를 일상언어로 읽는 학생들의 표현은 주로 "~이면 ~이다", "~은 ~이다", "~은 ~와 같다"이었다.

<표 Ⅳ-1> 등호 상징 읽기의 분포

		~이면 ~이다	~은 ~이다	~은 ~와 같다	기타	무응답	전체
(1) 2+3=□	7학년	7 (5.2%)	116 (86.6%)	4 (3.0%)	7 (5.25)	0 (0%)	134 (100%)
	9학년	4 (5.3%)	56 (73.7%)	13 (17.1%)	2 (2.6%)	1 (1.3%)	76 (100%)
	10학년	9 (8.5%)	90 (84.9%)	6 (5.7%)	0 (0%)	1 (0.9%)	106 (100%)
(2) 3+□=1	7학년	10 (7.5%)	114 (85.7%)	4 (3.0%)	5 (3.8%)	0 (0%)	133 (100%)
	9학년	4 (5.3%)	59 (77.6%)	11 (14.5%)	1 (1.3%)	1 (1.3%)	76 (100%)
	10학년	13 (12.4%)	87 (82.9%)	5 (4.8%)	0 (0%)	0 (0%)	105 (100%)
(3) a+b=b+a	7학년	0 (0%)	57 (42.2%)	77 (57.0%)	0 (0%)	1 (0.7%)	135 (100%)
	9학년	0 (0%)	38 (50.0%)	33 (43.4%)	2 (2.6%)	3 (3.9%)	76 (100%)
	10학년	0 (0%)	36 (36.4%)	60 (60.65)	2 (2.0%)	1 (1.0%)	99 (100%)
4) a=a	7학년	0 (0%)	73 (49.3%)	75 (50.7%)	0 (0%)	0 (0%)	148 (100%)
	9학년	0 (0%)	47 (61.0%)	27 (35.1%)	0 (0%)	3 (3.9%)	77 (100%)
	10학년	0 (0%)	76 (75.2%)	24 (23.8%)	1 (1%)	0 (0%)	101 (100%)

* 괄호 안은 학년 내에서의 백분율(이하 동일)

"~이면 ~이다"와 "~은 ~이다"는 좌변을 계산하면 우변이 나온다는 조작적 측면에 의해 식을 읽은 비대칭의 모양이며, "~은 ~와 같다"는 좌우변을 대칭으로 보는 동치 관계를 파

악할 수 있는 읽기이다. 여러 언어 표현을 중복하여 대답할 수 있게 하여 문자를 사용하지 않은 산술식 2개와 문자로 된 대수식 2개를 학생들이 읽게 하였을 때, 학년과 응답의 상관에 대한 χ^2검정 결과, 문항 (1)은 Cramer의 V값이 .272일 때 유의확률이 .003, 문항 (2)은 Cramer의 V값이 .185일 때 유의확률이 .006으로 유의수준 .05내에서 학년과 응답에 관계가 있었다. 즉 산술의 문항 (1), (2)는 학년에 따라 응답의 분포가 다르게 나타난 것이다. 문항 (3), (4)는 통계분석의 기준에 맞지 않아 분석할 수 없다.

최대빈도가 나타나는 응답에 있어서는 학년간의 별 차이가 없었다. 학생들은 대체로 산술식보다 대수식을 관계적 측면으로 파악하는 경향이 있었으며, 이것은 산술과 대수에서 사용되는 등호의 의미 차이가 학생들의 등호 개념 이해에서 나타난 것으로 보인다. 특히, 교과서에서 덧셈과 곱셈의 '교환법칙'을 학습하는 7, 10학년 학생들은 (4)번 문항인 대수식 a+b=b+a를 양변에서 덧셈의 순서가 바뀌어도 같다는 의미로 관계적 측면의 읽기를 하였다.

산술식에서는 학년간에 등호 읽기의 유형이 두드러진 차이를 보였으며, 최대 빈도에 있어서 학생들은 학년이 높아져도 등호를 조작적 측면으로 파악하고 있었다. 이 결과는 동치 관계로서 등호 개념을 이해하고 사용하는데 있어 상징의 읽기가 영향을 줄 수도 있음을 시사해 주는 것이다.

2. 실행개념

등호가 사용되는 상황에서 적절한 개념이 선택될 수 있는지 알아보고자 8개의 문항이 구성되었다. 각각은 등호가 포함된 식에서 무엇이 같은 것인지 또는 등호가 어떤 의미로 사용되고 있는지 자세히 설명하라는 질문에 답하는 것으로, 문항의 응답은 표의적 방법으로 조사되었다. 따라서 학생들의 응답을 그대로 빈도수와 각 상황에서 학생들이 설명한 개념 내용을 아래와 같이 실었다. 등호가 사용되는 수학적 내용 맥락은 여러 가지가 있으나 본 연구의 대상인 7학년 학생들의 수준에서 답할 수 있는 지식 내용으로 문항을 설정하였다.

가. a=b=c의 등호 해석

중학생들에게 등호가 2개 들어간 식은 낯선 것이지만 학생들이 어떻게 이 식을 해석하고 있는지 응답을 분석하였다. <표 Ⅳ-2>에서 학년과 응답의 상관에 대한 χ^2검정 결과, 문항 (5)에 있어 Cramer의 V값이 .257일 때 유의확률이 .000으로 유의수준 .05내에서, 학년에 따라 응답비율이 달랐다. a=b=c는 a=b, b=c, c=a라고 해석되어야 하지만 이러한 논리적인 해석을 중학교 수학에서 다루고 있지 않으며 그래서 중학생들의 해석이 적합하지 못했을 수도 있다. 그리고 a, b, c가 모두 같다고 답한 것은 수학을 표현하는 데 있어 의미가 분명하게 전달되지 못하는 일상언어의 한계를 보여주는 것이라 할 수도 있다. 뿐만 아니라 a=b=c를 a=b, b=c로 해석할 때 학생들이 a=b=c를 부정할 때 a≠c일 수 있다는 것을 간과할 수도 있는 우려를 낳는다.

하나 이상의 등호가 들어간 식에서 등호의 해석은 개개의 등호 의미보다는 여러 등호가 어우러진 식의 논리적 측면이 강조되어야 하지만, 실제로 학생들은 논리보다는 피상적 관계에 초점을 두어 a, b, c가 모두 같다는 단순 의미로 등호를 해석하고 있었다.

<표 Ⅳ-2> a=b=c의 등호 해석

(5)번 문항	a=b, b=c, c=a	a=b, b=c	a, b, c 모두 같다	기타	무응답
7학년	10 (7.6%)	4 (3.1%)	103 (78.6%)	11 (8.4%)	3 (2.3%)
9학년	10 (13.3%)	1 (1.3%)	41 (54.7%)	10 (13.3%)	13 (17.3%)
10학년	17 (18.1%)	2 (2.1%)	69 (73.4%)	3 (3.2%)	3 (3.2%)

나. a(b+c)=ab+ac에서의 등호 해석

대수적 일반화를 나타내는 문자가 사용된 식은 비대칭의 산술식과 구별되는 대칭의 식이다. 그 한 예로, 분배법칙이 성립하는 대수식에서 무엇이 어떻게 같은지 질문하였을 때 학생들의 응답은 <표 Ⅳ-3>와 같다. 학년과 응답의 상관에 대한 χ^2검정 결과, 문항 (6)에 있어 Cramer의 V값이 .343일 때 유의확률이 .000으로 유의수준 .05내에서, 학년에 따른 응답비율이 달랐다. 많은 학생들이 주어진 식을 그대로 읽어 a와 (b+c)의 곱은 ab와 ac의 합과 같다는 응답을 하였고, 특히 7학년 학생들은 좌변을 a(b+c)를 전개하면 ab+ac가 된다는 조작적 측면의 등호 해석을 하였다. 이 식이 분배법칙을 설명하기 위한 식이라는 것을 가장 많이 인식한 것은 9학년 학생들이었다. 학생들은 모든

<표 Ⅳ-3> a(b+c)=ab+ac의 등호 해석

(6)번 문항	좌변을 전개하면 우변	식을 있는 그대로 설명	분배법칙	기타	무응답
7학년	26 (19.8%)	61 (64.9%)	31 (23.7%)	12 (9.2%)	1 (0.8%)
9학년	10 (13.3%)	15 (20.0%)	31 (41.3%)	2 (2.7%)	17 (22.%)
10학년	11 (11.7%)	47 (50.0%)	18 (19.1%)	9 (9.6%)	9 (9.6%)

수에 대하여 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이 '성립함'을 보여주는 등호의 의미를 문자를 사용하여 일반화된 식에서 관계적으로 해석하지 않고 있었다.

초등학교의 산술과 대조되는 중등학교의 대수적 일반화 식에서 학생들은 항상 좌변과 우변이 같다는 식의 성질까지 설명하고 있지는 못했다. 특히 9학년 학생들은 다항식의 곱셈을 전개하면서 사용한 '분배법칙'이라는 용어를 사용하여 등호를 해석하고는 있었지만 단지 그 용어의 제시에 그친 설명이 많았다. 일반화를 의미하기 위한 등호 개념이 대수의 학습에서 확립되어야 할 것으로 보인다.

다. 집합 A, B에 대하여 A=B의 등호 해석

두 집합이 같다는 것을 나타내는 등호는 산술과 대수에서의 등호와 그 해석이 다르다. 상등을 포함한 동치관계가 성립하지만 집합에서 등호는 수학적 정의를 따른다. 집합은 7학년과 10학년에서 도입되는데 교과서에는 두 집합이 같다는 것을 "$A \subset B$이고 $B \subset A$일 때 A=B라고 한다"고 명시하고 있다. <표 Ⅳ-4>에서 학년과 응답의 상관에 대한 χ^2검정 결과, 문항 (7)에 있어 Cramer의 V값이 .315일 때 유의확률이 .000으로 유의수준 .05내에서, 학년에 따라 응답비율이 달랐다.

집합의 상등 정의대로 등호를 해석한 학생들은 별로 없었으며, 9학년 학생들이 정의에 의한 대답을 가장 많이 하였다. 본 연구의 조사가 실시된 시기가 학년말이므로, 9학년 학생들은 고등학교 진학의 예습으로 10학년 처음에 배우는 집합을 공부했고 그래서 이에 대한 응답을 많이 한 것으로 보인다. 7학년 학생들은 정의에 의존하기 보다 일반적으로 두 집합이 같다는 응답을 많이 하였고, 10학년 학생들은 실제로 집합의 연산에서 사용되는 원소에 초점

을 두어 "원소가 같아서 두 집합이 같다"는 응답을 많이 하였다.

<표 Ⅳ-4> 집합 A=B의 등호 해석

(7)번 문항	A⊂B, B⊂A	집합 A와 B가 같다(상등)	집합 A, B의 원소가 같다	기타	무응답
7학년	2 (1.5%)	52 (39.7%)	46 (35.1%)	23 (17.6%)	8 (6.1%)
9학년	7 (9.3%)	11 (14.7%)	18 (24%)	13 (17.3%)	26 (34.7%)
10학년	7 (7.4%)	20 (21.3%)	46 (48.9%)	13 (13.8%)	8 (8.5%)

구체적으로 두 집합이 같은 이유를 설명하라고 하였을 때에 정의에 의해 응답을 한 학생은 10학년의 4명밖에 없었다. <표 Ⅳ-5>에서 학생들은 "원소가 같으므로 두 집합이 같다", "집합이 같은 것은 순서에 상관없다"는 응답을 주로 하였다. 학년과 응답의 상관에 대한 χ^2검정 결과, 문항 (7-1)에 있어 Cramer의 V값이 .294일 때 유의확률이 .000으로 유의수준 .05내에서, 학년에 따른 응답비율이 달랐다. 실제 집합이 예가 주어질 때, 그 상황에 맞게 집합의 상등을 말하여 '원소의 순서에 상관이 없다'는 답을 하는 맥락적 개념을 답한 학생들은 고등학교 10학년이 많았다.

<표 Ⅳ-5> {1, 2, 3}={3, 2, 1}에서 등호 해석

(7-1)번 문항	원소가 같으므로	순서에 상관 없으므로	A⊂B, B⊂A	기타	무응답
7학년	80 (61.1%)	23 (17.6%)	0 (0%)	20 (15.3%)	8 (6.1%)
9학년	29 (38.7%)	14 (18.7%)	0 (0%)	4 ((5.3%)	28 (37.3%)
10학년	28 (29.8%)	30 (31.9%)	4 (4.3%)	13 (13.8%)	19 (20.0%)

집합의 상등을 뜻하는 등호는 집합의 원소끼리 같다는 것이 아니며 부분집합에 의해 정의되는 것이다. 수학적 대상으로 집합을 인식하고 등호를 사용하는 것에 대한 학습지도가 이루어져야 할 것이다.

라. 방정식 $2+3x=2x+8$에서 등호 해석

방정식은 x에 따라 참이 되기도 거짓이 되기도 하는 등식이며, 참이 되게 하는 x값을 구하는 것을 방정식을 푸는 것이라 한다. 7학년에서 배우는 방정식은 산술방정식과 대수방정식이 모두 포함되지만 중등학생들에게 방정식은 주로 대수방정식으로 주어지므로, 학생들에게 대수방정식만 제시하였다. 학년과 응답의 상관에 대한 χ^2검정 결과, 문항 (8)에 있어 Cramer의 V값이 .357일 때 유의확률이 .000으로 유의수준 .05내에서, 학년에 따라 응답비율이 달랐다. <표 Ⅳ-6>에 의하면 대수방정식에서 학생들은 "좌변과 우변이 같다"는 등호의 해석을 많이 하여 관계적 측면의 해석을 하였다. 그리고 실제로 방정식을 푼 학생들도 있었다. 방정식에서는 등호가 가장 기본적으로 사용되며, 수학적 정의에 의해 x의 값에 따라 성립할 수도 아닐 수도 있다는 개념을 말한 학생은 전체의 10% 정도였고 9학년 학생들이 적었다.

<표 Ⅳ-6> 방정식에서 등호의 해석

(8)번 문항	좌변과 우변이 같다	방정식을 풀어서 x=6	x에 따라 등식이 성립할 수도 아닐 수도 있다	기타	무응답
7학년	69 (52.7%)	10 (7.6%)	16 (12.2%)	28 (21.4%)	8 (6.1%)
9학년	12 (16.0%)	8 (10.7%)	2 (2.7%)	11 (14.7%)	42 (56%)
10학년	43 (45.7%)	9 (9.6%)	14 (14.9%)	11 (11.7%)	17 (18.1%)

대수에서 가장 기본적으로 사용되는 방정식의 등호는 방정식의 개념에 따라 해석되어야 하지만 학생들에게 방정식은 해를 구하라는 문제로 인식되는 경향이 있었다. 이것은 식을 변형하는 과정에서 등호를 사용하는 동치오류를 범하게 할 수 있으며, 방정식의 등호는 항등식과 다른 개념들이 연합된 장에서 해석되어야 하도록 방정식과 항등식의 등식이 구별되어야 할 것이다.

마. 4≤5에서 등호 해석

부등호와 함께 사용되는 등호는 부등호와 '또는'의 관계로 결합되어 있다. 그러나 학생들은 그 관계를 '그리고'의 의미로 해석하여 식을 오해하는 경우가 있다. 학년과 응답의 상관에 대한 χ^2검정 결과, 문항 (9)에 있어 Cramer의 V값이 .247일 때 유의확률이 .000으로 유의수준 .05내에서, 학년에 따른 응답비율이 달랐다. <표 Ⅳ-7>에 따르면 실제로 문자가 아닌 수를 사용하여 4≤5라는 식을 제시했을 때 대다수의학생들은 식을 있는 그대로 읽어 "4는 5보다 작거나 같다"라고 했으나 "4는 5보다 작다"라

고 한 학생들도 전체의 10%나 되었다. 특히, 부등호의 좌변과 우변을 반대로 읽는 학생들이 4.6%나 있었다. 수의 대소관계를 나타내는 부등호와 결합되어 있는 등호는 학생들이 '또는'

<표 Ⅳ-7> 4≤5에서 등호의 해석

(9)번 문항	4는 5보다 작거나 같다	4는 5보다 작다	4가 5보다 크거나 같다	기타	무응답
7학년	71 (54.2%)	16 (12.2%)	9 (6.9%)	30 (22.9%)	5 (3.8%)
9학년	34 (45.3%)	3 (4.0%)	3 (4.0%)	12 (16.0%)	23 (30.7%)
10학년	53 (56.4%)	13 (13.8%)	2 (2.1%)	8 (8.5%)	18 (19.1%)

의 논리적 관계를 파악하지 못한다면 오해의 근원이 될 수 있었다. '4가 수직선에서 5 왼쪽에 있다'거나 '성립이 불가능한 식' 등의 기타 응답이 7학년에게서 많았다.

부등식에서 부등호와 결합되어 사용되는 등호는 '그리고'와 '또는'의 논리적 측면이 함께 어우러진 개념의 장에서 다루어져야 할 것이다. '또는'에 대한 해석이 '그리고'로 이루어진다면 부등식에서의 등호는 의미 없는 상징이 될 수도 있는 것이다.

바. 항등식 $3a(2b+7)\div 5=\frac{6}{5}ab+\frac{21a}{5}$에서 등호 해석

대수에서 좌변의 복잡한 식을 간단히 하여 우변에 나타내었을 때 이 등식은 문자의 값에 상관없이 항상 성립하는 항등식이다. 학년과 응답의 상관에 대한 χ^2검정 결과, 문항 (10)에 있어 Cramer의 V값이 .369일 때 유의확률이 .000으로 유의수준 .05내에서, 학년에 따라 응답비율이 달랐다. <표 8>에 따르면 7학년 학생들은 항등식에서 등호를 좌변을 풀어 우변이 나오게 하는 연산의 조작적 측면으로 많이 인식하고 있었다. 문자를 사용하여 나타낸 식을 간단히 하라는 문제를 많이 접한 학생들은, 등호와 간단한 우변의 식을 보고 그것을 항등식으로 파악하지 않고, 연산의 결과로 보고 있었던 것이다.

그러나 9, 10학년 학생들은 좌변과 우변이 같은 관계적 측면으로 인식을 한 학생들이 많았다. 그리고 7, 9학년 학생들은 양변을 변형하여 양변이 같다는 것을 실제로 보인 학생들도 있었다.

하지만 a, b에 상관없이 항상 같다는 항등식의 의미로 답을 한 학생들은 거의 없었다.

<표 Ⅳ-8> 항등식에서 등호의 해석

(10)번 문항	좌변을 풀면 우변이 나온다	좌변과 우변이 같다	양변의 식을 정리하여 같음을 보임	기타	무응답
7학년	49 (37.4%)	36 (27.5%)	11 (8.4%)	19 (14.5%)	16 (12.2%)
9학년	6 (8.0%)	12 (16.0%)	10 (13.3%)	2 (2.7%)	45 (60.0%)
10학년	19 (20.2%)	27 (28.7%)	0 (0%)	5 (5.3%)	43 (45.7%)

항등식에서 등호는 동치의 관계적 의미를 갖지만 7학년 학생들은 다항식의 계산을 경험함으로써 좌변이 우변으로 변형되는 조작적 측면에 관심을 두고 있는 것으로 보인다. 따라서이 때의 등호는 관계적으로 학생들에게 파악되지 못하는 경향이 있었다.

사. $\overline{AB}=\overline{AC}$에서 등호 해석

기하에서 사용되는 등호는 주로 측도의 의미로 사용된다. 두 선분의 길이가 같다는 것을 나타내는 $\overline{AB}=\overline{AC}$에서 학생들의 등호 해석은 <표 Ⅳ-9>과 같다. 학년과 응답의 상관에 대한 χ^2검정 결과, 문항 (11)에 있어 Cramer의 V값이 .297일 때 유의확률이 .000으로 유의수준 .05내에서, 학년에 따른 응답비율이 달랐다. 많은 학생들이 선분의 길이가 같다고 응답하였으나 길이에 초점을 두지 않고 " $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$가 같다"라고 답한 학생들도 많았고 특히 중학교 학생들이 이런 응답을 많이 했다. 기하에서 대상이 같음은 그것의 측정값을 나타내는데 등호가 사용됨을 중학생들은 잘 인식하지 못하고 있는 것이다. 그 외의 응답으로 "A가 같으므로 B와 C가 같다"고 생각한 학생들도 있었으며, 기하적으로 추론하여 "A에서 B, C까지의 거리가 같다"고 한 학생들도 있었다. 기하에서 등호는 길이, 각의 크기, 넓이가 같은 것이지 선분, 각, 도형이 같다는 것을 나타내지는 않는다.

<표 Ⅳ-9> $\overline{AB}=\overline{AC}$에서 등호의 해석

(11)번 문항	길이가 같다	AB와 AC가 같다	B와 C가 같다	A에서 B와 C까지의 거리가 같다	기타	무응답
7학년	53 (40.5%)	51 (38.9%)	3 (2.3%)	2 (1.5%)	17 (13.0%)	5 (3.8%)
9학년	17 (22.7%)	30 (40.0%)	1 (1.3%)	1 (1.3%)	6 (8.0%)	20 (26.7%)
10학년	57 (60.6%)	19 (20.2%)	3 (3.2%)	4 (4.3%)	0 (0%)	11 (11.7%)

'같다'는 것을 나타내는데 모두 등호 =가 사용되더라도 기하 영역에서는 무엇이 같을 때 등호가 사용되는지 학생들에게 이해되어야 할 것이다. 그리고 교사들은 영역별로 등호의 의미가 변할 수 있음을 깨닫고 그에 맞는 설명과 지도를 학생들에게 해야 할 것이다.

아. 함수 $y=2x$에서 등호 해석

비례 관계와 일차함수의 일반적인 식인 $y=2x$에서 학생들이 등호를 어떻게 해석하는지 조사하였다. 학년과 응답의 상관에 대한 χ^2 검정 결과, 문항 (12)에 있어 Cramer의 V값이 .245일 때 유의확률이 .000으로 유의수준 .05내에서, 학년과 응답에 관계가 있었다. <표 Ⅳ-10>에서와 같이 'y'는 '$2x$'라고 식을 그대로 읽는 학생이 모든 학년에서 가장 많았지만, 우변인 $2x$가 좌변인 y라고 한 학생도 있어 함수의 값을 구하는 과정에서 x의 조작이 y의 값을 결정한다는 생각을 보여주었다. 또한 이 식은 비

례관계, 함수, 방정식을 나타내기 위한 식이라는 응답도 있었으며, 이것은 함수를 나타내는 표현이 표, 그래프, 식 여러 가지가 있으며 표현간의 번역이 함수식의 해석에 영향을 준 것으로 보인다.

<표 Ⅳ-10> $y=2x$에서 등호의 해석

(12)번 문항	y는 2x	2x는 y	함수 방정식	기타	무응답
7학년	77 (58.8%)	11 (8.4%)	6 (4.6%)	27 (20.6%)	10 (7.6%)
9학년	35 (46.7%)	2 (2.7%)	2 (2.7%)	5 (6.7%)	31 (41.3%)
10학년	48 (51.1%)	9 (9.6%)	8 (8.5%)	8 (8.5%)	21 (22.3%)

여러 수학 개념에 적용되는 등호의 의미를 살펴보았다. 등호는 =이라는 동일한 표현의 상징으로 여러 수학 내용에 사용되고 있으며, 그 분야에 따라 연합된 개념의 장이 서로 달라 상황에 따른 해석이 이루어져야 한다. 학생들의 응답을 분석해 보면, 등호는 '같다'는 의미로 사용되지만 개념에 따라 무엇이, 어떤 점에서, 어떻게 같은지는 상황에 따른 해석이 적용되어야 했다. 그러나 학생들의 등호 해석을 조사한 결과 상황에 따른 의미가 확연히 구분되지 않고 등호 좌, 우변이 같음을 단지 언급하는 경우가 많았다. 등호의 의미가 제대로 파악되기 위해서는 등호와 관련된 여러 개념의 장에서 다른 개념들의 의미가 분명하고 학생들에 의해 표현될 수 있는 것이어야 할 것이다.

3. 실행정리

등호 개념의 장에서 등호의 사용이 옳고 그름을 판단하는 조작적 불변이 실행정리이다. 상등과 등가를 포함한 동치관계, 집합에서의 상등과 같은 정의, 치환율의 성립 등이 등호의 실행정리에 해당한다. 등호의 실행정리를 알아보기 위해 학생들이 등호 관계에서 많이 저지르는 오류가 있는 식을 교정하게 하였고 그 응답은 <표 Ⅳ-11>에 있다.

학년과 응답의 상관에 대한 χ^2검정 결과, 문항 (13)에서 (16)은 Cramer의 V값이 .244일 때 유의확률이 .000, Cramer의 V값이 .198일 때 유의확률이 .000, Cramer의 V값이 .163일 때 유의확률이 .000, Cramer의 V값이 .149일 때 유의확률이 .013으로 유의수준 .05내에서, 학년에 따라 응답비율이 달랐다. 먼저, 방정식을 풀면서 식들을 동치 관계에 의해 =로 연결하는 동치 오류에 대해 옳고 그름을 질문하였을 때 많은 학생들은 그런 식이 옳다고 하면서 동치 오류를 인식하지 못하였다. 실제로 문제를 다시 푸는 과정을 보인 학생도 방정식 앞에 =를 사용하고 있었다. 등호를 조작의 의미로 해석하여 답이 하나의 항으로 나와야 한다고 생각하는 완전성 결여의 오류와 관련된 3a+2b=5ab의 식을 주었을 때 학생들은 이 식이 옳지 않다는 것에 많이 동의했다. 문자가 다를 때에는 덧셈을 하지 못하고 3a+2b 그대로 두어야 한다는 학생과 3ab+ 2ab=5ab로 식을 바꾸어야 한다고 학생들은 응답했다. 치환율이 적용될 수 있는 문제에서 라벨링 오류로 알려진 "d=개, c=고양이"를 보았을 때, 많은 학생들이 오류를 발견하지 못하였다. 그리고 옳지 않은 것을 고치라고 하였을 때 개 세 마리를 d=3이라고 하지 않고 3d로, 고양이 두 마리를 2c로 답하여 한국어의 구문론을 수식의 구문론에 적용하는 오류를 새롭게 보여준 학생들도 많았다. 교사의 수와 학생의 수를 식으로 나타낼 때 순서를 달리하는 반전 오류의 사례가 영어를 사용하는 나라의 학생들에게서 많이 발견되고 있다. 이 오

류에 대해 우리나라 학생들은 대부분 오류를 교정하는 모습을 보여주었다. 그러나 "학생의 수는 교사의 수보다 6배 많다"라는 문장에서 끝이 "많다"로 끝났기 때문에 등호가 아닌 부등호를 사용하여 식을 고친 학생들도 있었다.

<표 Ⅳ-11> 등호와 관련된 오류에 대한 학생들의 해석

		옳다	옳지 않다	무응답	합계
(13) 동치 오류	7학년	93 (72.1%)	28 (21.4%)	10 (7.8%)	131
	9학년	44 (58.7%)	5 (5.7%)	26 (34.7%)	75
	10학년	64 (68.1%)	23 (24.5%)	7 (7.4%)	94
(14) 완전성 결여의 오류	7학년	32 (24.8%)	91 (69.5%)	8 (6.2%)	131
	9학년	5 (6.7%)	53 (70.7%)	17 (22.7%)	75
	10학년	7 (7.4%)	71 (75.5%)	16 (17.0%)	94
(15) 라벨링 오류	7학년	96 (74.4%)	23 (17.6%)	12 (9.3%)	131
	9학년	37 (49.3%)	7 (9.3%)	31 (41.3%)	75
	10학년	56 (62.8%)	22 (23.4%)	16 (17.0%)	94
(16) 반전 오류	7학년	29 (22.5%)	97 (74.0%)	5 (3.9%)	131
	9학년	22 (29.3%)	36 (48.0%)	17 (22.7%)	75
	10학년	22 (23.4%)	60 (63.8%)	12 (12.8%)	94

학생들이 어떠한 등호 개념을 가지고 있는지 실행정리의 관점에서 분석하였다. 등호와 관련되어 보고된 여러 오류를 학생들이 교정할 수 있는지 알아본 결과, 우리나라 학생들은 외국의 학생과 달리 국어의 구문론을 수학 구문론에 적용하는 새로운 오류를 보여주었고, 특히 동치 오류와 라벨링의 오류를 많이 교정하지 못하고 있었다. 등호를 수학적으로 올바르게 사용하기 위해서는 등호와 관련된 개념의 적용뿐 아니라 등호를 정확하게 해석하고 사용할 수 있는 학습 지도도 필요할 것이다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 학교수학에서 가장 기본적이며 가장 많이 사용되고 있는 등호의 개념을 알아보았다. Lakoff와 Nunes(2000)는 수학자들이 등호 = 대신 그것을 의미하는 언어를 사용하고 있다고 하면서, 등호의 표현으로 '산출하다, 주다, 생산하다, 분해하다, 낳다'의 다양한 단어가 사용될 수 있다고 하였다. 이런 언어 표현 모두는 특정한 수학적 맥락에서 적절한 의미를 가질 수 있다. 등호가 의미하는 것을 이해하기 위해서는 관련된 수학적 아이디어의 분석이 필요하며, 본 연구는 이를 조작적 불변에 의해 알아보았다. 조작적 불변 중 실행개념의 카테고리에서 등호 개념에 대한 중고등학생들의 해석을 조사한 결과 통상 '같다'의 의미로 사용되는 등호와 관련된 수학적 개념은 산술, 대수, 집합, 기하, 함수 등에 두루 있으며 학생들은 관련 개념과 연결하여 등호의 의미를 해석하였다. 7, 9, 10학년 학생들은 수학의 학문 영역별로 등호와 관련한 개념을 선택하는데 서로 다른 응답비율을 보였다. 등호가 올바르게 사용되도록 하는 실행정리는 고등학생에게조차 잘 인식되지 못하는 것으로 나타났다.

특히 동치 오류와 라벨링 오류를 학생들은 잘 인식하지 못하고 있었다. Philipp(1990)은 문자를 일반화된 수의 라벨로 다루는 것이 학생들의 대수 개념 형성에 장애가 될 수 있음을 보인바 있다. 그의 연구에서 3a+2a를 사과 3개와 사과 2개로 말하여 사과 5개인 5a를 쓴 라벨링 교수를 받은 학생들은 (3+2)에 a를 곱하는

분배법칙을 적용한 교수를 받은 학생들보다 반전 오류를 많이 범하였으며 변수에 대한 오개념을 유발하였다. 등호와 관련한 오류가 또 다른 종류의 오류를 발생시킬 수도 있는 것이다. 본 연구 결과 라벨링 오류의 교정 문제에서도 학생들은 한국어의 문법에 의해 수식이 적용되는 구문론적 오류를 범하였다. 영어 구문론에서 전개되는 순서에 따라 학생들이 반전오류를 범하듯이 우리나라 학생들도 언어의 전개 순서에 따라 수식을 쓰는 구문론 오류를 저지르고 있음이 나타났다. 지금까지 수학에서 오류와 관련된 연구가 외국 논문에 많이 의존하고 있으나 우리나라의 언어에 의한 수학적 오류 발생에 대한 연구가 본 연구를 토대로 후속적으로 이루어져야 할 것이다.

본 연구는 학교수학과 전문 수학에서 기초가 되는 상징인 등호의 개념을 조사하는데 서울 시내 중, 고등학교 1개교 만을 표본으로 택한 제한점이 있다. 300명의 학생들로 우리나라 전체의 학생을 대표하기에 무리가 있으나 본 연구를 출발점으로 앞으로 더 많은 학생들을 대상으로 연구가 진행되는 것이 필요할 것이다. 그리고 표의적 방법에 의거하여 등호개념을 조사하는 과정에서 학생들의 의사소통 능력을 제대로 파악하지 못하여 학생들의 이해와 의도가 잘 파악되지 못했을 수도 있다는 제한점이 있다. 학생들의 등호 개념을 조사하기 위해 지필 형식의 조사를 취하기 보다 면담을 통한 방법을 취한다면 소수의 학생이더라도 그들의 등호 개념 이해를 더 면밀하게 조사했을 수도 있을 것이다. 개념의 장에 의거하여 등호 개념을 분석하고 조사한 본 연구는 학생의 인지적 측면만을 강조한 개념에 관한 지금까지의 연구에서 벗어나 언어 표현과 조작적 불변, 상황이 조합된 개념의 장을 통해 개념을 구성하고 있는 표현과 상황의 측면도 강조한 점에서 그 의미를 찾을 수 있다. 이것은 수학 상징의 학습에서 수학 사회에서 규정한 상징의 표기, 그 수학 상징이 의미하는 것, 그 상징이 사용되는 상황적 맥락이 함께 고려되어야 함을 시사하며, 앞으로 수학 상징이나 수학 개념에 대한 조사 연구는 이러한 측면을 포함하여 진행되어야 할 것이다.

참고문헌

남기심(2001). **현대국어 통사론**. 서울: 태학사.

박을용 등(1992). **수학사전**. 서울: 한국사전연구원.

시사영어사 사전편찬실(1995). **엘리트 영한사전(개정판)**. 서울: 시사영어사.

Alon, S. (1997). *The meaning that elementary teachers attribute to this concept of the equal sign.* Dissertation of Ed. D. Teachers College, Columbia Univ.

Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1982). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. Paper presented at the annual meeting of the american educational research association (NY, March, 18-23). ED 214 765.

Behr, M., Erlwanger, S. & Nicholas, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching, 92*, 13-15.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations*. NY: Dover Publications, INC.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher, 1980 November*, 572-580.

Kieran, C. (1980). The interpretation of the equal sign: symbol for equivalence relations vs. an operator symbol. In R. Karplus (Ed.), *Proceeding of the fourth international conference for the psychology of mathematics education.* Berkeley.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Lakoff R. E., & Nunez, G. (2000). *Where mathematics comes from - How the embodied mind brings mathematics into being.* NY: Basic Books, A Member of the Perseus Books Group.

Philipp, R. A. (1990). *Seventh grades students' understanding of variables: teaching generalized numbers as labels.* Unpublished doctorial dissertation. Wisconsin-Madison University.

Pickreign, J. R. (1996). *An analysis of mathematics vocabulary and symbols use in five elementary mathematics textbook series.* Unpublished doctorial dissertation of University of Kansas.

Sáenz-Ludlow, A., & Walgamuth, C. (1998). Third grader's interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics, 35*(2), 153-187.

Trabant, J. (2001). **기호학의 전통과 경향**. (안정오, 역). 서울: 인간사랑. (독어 원작은 1996년 출판).

Vergnaud, G. (1996) The theory of conceptual fields. In L. P. Steffe et al. (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 219-239). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Vergnaud, G. (2000). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 167-181.

Wheeler, R. F. (1981). *Rethinking mathematical concepts.* England: Ellis Horwood Limited.

〈부록〉

※ 다음의 식을 우리말로 읽고, 그것을 아래에 문장으로 써라. 여러 가지가 있으면 모두 다 써라(1~4).

(1) 2+3=□

(2) 3+□=1

(3) a=a

(4) a+b=b+a

※ 다음의 식과 문장에서 무엇이 같은 것인지 또는 등호가 어떤 의미로 사용되고 있는지 자세히 설명하라(5~12).

(5) a=b=c

(6) a(b+c)=ab+ac

(7) 집합 A, B에 대해 A=B

(7-1). 집합 {1, 2, 3}과 {3, 2, 1}이 같은 이유를 말하라.

(8) 2+3x=2x+8

(9) $4 \le 5$

(10) $3a(2b+7)\div 5=\frac{6}{5}ab+\frac{21a}{5}$

(11) $\overline{AB}=\overline{AC}$

(12) $y=2x$

※ 다음 문제를 푼 식에서 옳지 않은 부분을 고치고 그 이유를 써라. 옳지 않은 부분이 없으면 그대로 두어라(13～16).

(13) 다음 방정식을 풀어라.

$x^2=2x-1$

$=x^2-2x+1=0$

$=(x-1)^2=0$

$=x-1=0$

$=x=1$

(14) 3b+2a=5ab

(15) 다음의 문장을 식으로 바꿔라.

개 세 마리와 고양이 두 마리.

개=d, 고양이=c

∴ d=3, c=2

(16) 어느 학교에는 학생들의 수가 교사보다 6배 많다.

학생 수=s, 교사 수=t

t=6s

The analysis of the concept of equal symbol and the investigation of the students' understanding of it

Lee, Chong Hee (Ewha Womans University)
Kim, Sun Hee (Gwangjang Middle School)

This study analyzed the concept of equal symbol(=) that is the most symbol used in learning of mathematics and investigated students' understanding of that. The equal symbol is endowed with the 'same', 'equal', and 'equivalent' meaning, represented by =, but students interpret the meaning of equal symbol according to the mathematical context. Thus, we analyzed the equal symbol on the basis of the theory of conceptual fields. In the theory of conceptual fields, concept is a three-tuple of three sets of situation, operational invariants and symbolic representations, and the operational invariants are the concept-in-action and the theorems- in-action.

With the analysis contents, we investigated how students read = by korean, what equals in the expression containing = or by what meaning students used =, and which they could correct the error for =. This study imply that we should consider the symbol notation agreed by mathematical society, the meaning, and the situational context that it used, when we teach the mathematics symbols.

핵심어: equal symbol(등호), conceptual fields(개념의 장), symbol(상징), concept-in-action(실행 개념), theorems-in-action(실행 정리), situation(상황), error(오류)