大韓數學教育學會誌 數學教育學研究 第 13 卷 第 3 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIII, No.3, 247-265. August 2003

비 개념에 대한 교육적 분석*

정 은 실**

본 연구에서는 비례적 추론의 바탕이 되는 비 개념을 우리나라의 초등학교에서 어떻게 지도하여 왔는지를 분석하였다. 먼저 비 개념과 관련된 용어에 대하여 논의하고, 비 관련 개념을 그동안 어떻게 지도해왔는지를 알아보기 위해 교수 요목기부터 제7차 교육과정까지의 교과서에서 비 개념을 어떻게 기술했는지를 비판적으로 검토하였다. 이에 대한 대안으로서 오랫동안 현실주의 수학교육에 바탕을 두어 개발한 네델란드의 Wiskobas 프로그램을 통해 우리나라 비에 대한 지도의 방향이 어떠해야하는지에 대한 교육적 시사점을 찾아보았다. 그 시사점으로 비례적 추론을 개발하기 위한 프로그램의 조기 도입, 직관적이고 개념적인 비 개념 도입, 문맥 문제와 실생활 관련 문제 개발, 시각적 모델 사용의 필요성이 제기되었다.

I. 서론

비례적 추론은 수학적 추론의 한 형태로서, 학생들에게 대수적 사고와 함수에 대한 감각을 개발하는 수단이 된다. 비례 관계의 인식으로부터 시작되는 선형성의 인식은 수학 전체의 바탕이 되는 기본적인 개념이다. 또한 비례적 추론은 심리적으로 양적 관계를 파악하게 하며, 그 양을 비교하게 하는 사고 방법이다. 비례적 추론을 사용하여 여러 가지 실생활 문제를 해결하게 한다. Lesh, Post, Behr(1988)는 비례적 추론은 초등학교 산술의 관석인 반면, 뒤따르는 모든 과정의 초석이라고 말할 정도로 초등학교에서의 비례적 추론은 중요하다. 이 연구에서는 이러한 비례적 추론의 바탕이 되는 비 개념을 학교에서 어떻게 지도하여 왔는지를 분석하여 보고자 한다. 먼저 비 개념과 관련된 용어와 우리나라 비 관련 개념을 그동안 어떻게 지도해왔는지를 알아보기 위해 교수 요목기부터 제7차 교육과정까지의 교과서에서 비 개념을 어떻게 기술했는지를 비판적으로 검토하고, 이에 대한 대안으로써 오랫동안 현실주의 수학교육에 바탕을 두어 프로그램을 개발한 네델란드의 프로그램을 통해 우리나라 비에 대한 지도의 방향이 어떠해야하는지에 대한 교육적 시사점을 찾아보고자 한다.

II. 비와 관련된 용어의 문제

비와 비율, 비와 비례는 일상생활에서 혼용하여 사용하는 경우가 많다. 실제로 국립국어

* 이 논문은 2002년도 진주교육대학교 학술연구비의 지원을 받아 작성된 것임.
** 진주교육대학교, esjeong@cue.ac.kr

연구원(1994)의 표준국어대사전에서는 비, 비율, 비례를 각각 다음과 같이 설명하고 있다.

비(比)

명① 【미술】=비례(比例)③. ¶구도를 잡으려면 가로와 세로의 비를 잘 맞추어야 한다. ②【수학】어떤 두 개의 수 또는 양을 서로 비교하여 몇 배인가를 나타내는 관계. $a:b$의 형태로 표시한다. ③『일부 명사 뒤에 붙어』 '비율'의 뜻을 나타내는 말. ¶농도비/혼합비.

비율(比率)

명【수학】 다른 수나 양에 대한 어떤 수나 양의 비(比). ≒율(率). ¶비율이 낮다/국산화 비율이 증가하였다./선진국일수록 평균 수명이 길어 노년층의 비율이 높다./공공요금이 지난해와 같은 비율로 올랐다./이번 시험은 객관식 30%, 단답형 40%, 서술형 30%의 비율로 각각 출제되었다.

비례(比例)

명①한쪽의 양이나 수가 증가하는 만큼 그와 관련 있는 다른 쪽의 양이나 수도 증가함. ¶마음까지 몹시 약해진 것을 스스로 깨달을수록 눈물은 그 비례로 쏟아져….≪심훈, 상록수≫ ②예를 들어 견주어 봄. ③【미술】표현된 물상의 각 부분 상호 간 또는 전체와 부분 간이 양적으로 일정한 관계에 있음. 또는 그런 관계. ≒비(比)①. ¶비너스 상은 정확한 비례로 유명하다. ④【수학】두 수 또는 두 양에 있어서, 한쪽이 2배, 3배, …로 되면 다른 한쪽도 2배, 3배, …로 되거나 또는 한쪽이 2배, 3배, …로 되면 다른 한쪽은 1/2배, 1/3배, …로 되는 일. 또는 그런 관계. 전자를 정비례, 후자를 반비례라 한다.

미술계에서는 비와 비례를 같은 의미로 사용하고 있음을 알 수 있으나 수학에서는 비와 비례의 의미는 다르게 사용되고 있다. 그러나 수학에서도 비와 비율은 엄밀하게 구별하여 사용되지 않는다. 그러나 우리나라 초등학교에서 지도하는 비와 관련된 용어의 정의를 보면 비와 비율은 구별하는 대신 비의 값이 비율과 같은 의미로 사용되고 있다. 제6차 교육과정의 초등학교 교사용 지도서에서는 비를 다음과 같이 정의하고 있다.[1]

"두 양(또는 수) a, b가 있을 때, 'a는 b의 몇 배'인지를 알아보는 관계를 기호 : 를 써서 $a:b$로 나타내고, 'a 대 b' 'b에 대한 a의 비' 'a의 b에 대한 비'라고 읽는다."(교육부, 1997d, p.162)

이 정의에 의하면 비는 : 기호를 써서 나타낸 것에 국한되므로 상당히 좁은 의미로만 사용될 것 같다. 그러나 이어서 비의 값을 정의하면서 비 사용의 범위를 확대하고 있다.

"$a:b$를 두 수 a, b 사이의 관계라고 보는 관점에서 'a가 b의 몇 배', 즉 b를 1로 볼 때의 a의 값으로 생각할 때, 이것은 하나의 수로 취급된다. 다시 말하면, $a \div b = p$라고 하면 이 p를 b에 대한 a의 비의 값이라고 할 수 있고 p는 $\frac{b}{a}$로 쓸 수 있다. 이 때, a는 비교하는 양이 되고 b는 기준량이 된다."(교육부, 1997d, p.163)

비는 관계이고 비의 값은 수라고 한다면 엄밀하게 따져서 그 둘은 같을 수 없다. 그러나 여기서는 비를 수로 취급한다고 하고 비를 나눗셈 연산으로 나타내면서 그 연산의 결과를

1) 7차 교육과정의 교사용 지도서에서는 교과서 진술 부분을 제외하고는 비, 비의 값, 비율 등에 대해 정의하는 부분이 없다.

비의 값이라고 부르고 있다. 비율은 비의 값을 포함하는 의미임을 다음과 같이 밝히고 있다.

"비율은 기준량에 대한 비교하는 양을 나타내는 것은 비의 값과 같으나, 기준량을 1로 보았을 때 뿐만 아니라, 기준량을 10, 100, 1000으로 보았을 때의 비교하는 양을 나타내는 것을 포함한다.
비의 값이나 비율 모두 기준량에 대하여 비교하는 양의 크기를 나타내는 것으로 다음과 같이 나타낸다.

$$(\text{비의 값, 또는 비율}) = \frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$$

"(교육부, 1997d, p.163)

위의 내용을 정리해보면 비의 값은 비율이라고 할 수 있으므로, 비와 비의 값을 구별하느냐 하지 않느냐에 따라 비를 비율이라고 할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다.

논리적인 면만 생각한다면 비와 비의 값을 구별하는 것이 타당하다. 일본이나 중국의 교과서에서도 비와 비의 값을 구별하여 사용하고 있다.

그러나 미국에서는 비의 값을 구별하여 사용하지 않는다. ratio[2]라는 용어에 비의 값의 의미가 포함되어 있다. 예를 들어 Bassarear(2001)는 ratio를 다음과 같이 정의하고 있다.

"ratio는 두 양 사이의 관계이다. 그것은 다음과 같은 동치인 방식으로 표현할 수 있다. 즉, $a : b,\ \frac{b}{a}$"(p.307).

우리나라에서도 교과서에서는 비와 비의 값을 구별하여 사용하고 있지만, 일상생활이나 '비로서의 분수'라는 말 등에서 보는 바와 같이 비라는 용어에 비의 값에 해당하는 분수를 포함시켜 생각할 때가 많다. 결국 비와 비율도 초등학교 수학 교과서에서는 구별하여 사용하고 있지만, 그 이외에는 같은 의미로 사용할 때가 많음을 알 수 있다. 미국에서도 용어의 사용에 있어서도 논란이 많아, ratio와 rate는 물론 심지어 proportion까지 같은 의미로 사용되기도 한다.[3] Thomson(1994)은 교실에서는 물론 연구물에서 조차 비(ratio)와 비율(rate)이라는 용어 사용에 혼란이 있음을 지적하면서 여러 논문에서 볼 수 있는 비와 비율의 구분을 다음과 같이 세 가지로 하고 있다.

"1. 비는 같은 성질을 갖는 양 사이의 비교(예: 파운드 대 파운드)이고, 비율은 다른 성질을 갖는 양 사이의 비교(예: 거리 대 시간)이다.[4]
2. 비는 어떤 양이 다른 양과 관련지어 얼마나 있는지를 나타내는 수 표현이며, 비율은 어떤 양과 시간 사이의 비이다.

---

2) 영어의 비(ratio)라는 용어는 '생각하다, 어림하다'라는 뜻을 가진 라틴어 동사 reri의 과거분사 ratus에 유래된 것으로서 이 말의 의미는 계산, 관계, 이성 등을 의미했으며, 중세 시대의 산술에서는 계산을 뜻하는 것으로 사용되었다(Smith, D,E., 1925).

3) 기호 $a:b$로 표현하는 아이디어를 나타내기 위하여 중세 라틴 저자들은 ratio 대신에 proportio라는 단어를 사용했다. 그리고 $a:b = c:d$로 표현되는 비례식은 proportionalitas라는 단어를 사용했다. 중세와 르네상스 시대에 비(ratio)를 뜻하는 용어로 'proportion'이란 단어를 보편적으로 사용했다는 것은 그 당시 대부분의 수학 저서에서 확인할 수 있다. 그래서 미국에서는 아직까지도 이 두 단어를 혼용하는 경우가 많다.(Bassarear, 2001, p.307) proportion은 문맥에 따라 비, 비율, 비례, 비례식 등 여러 가지로 해석할 수 있다. 한편 rate는 이율, 증가율, 변화율처럼 다른 명사에 붙어 -율이라고 해석하는 경우가 많다.

4) Lesh 등(1988)에 의하면 그리스 사람들은 이 관점을 선호했는데, 그 이유는 초기의 0과 자연수에 기초한 측정 개념이 유리수와 유리식 영역으로 흘러들어간 방식에 그리스 사람들이 흥미를 가졌기 때문이다. 우리나라에서는 두 외연량의 몫을 내포량이라고 하는데, 그 두 외연량이 같은 종류일 때는 도(度), 다른 종류일 때는 율(率)이라고 구분하고 있다.

3. 비는 양의 순서쌍을 포함하는 이항관계이며, 비율은 내포량으로서 곧 한 양과 다른 양의 한 단위 사이의 관계이다."(p.190)[5]

우리나라의 초등학교 교과서에서는 비와 비율의 구분을 위의 세 번째의 의미로 하고 있는 반면, 미국에서는 첫 번째 구분과 같이 하는 경우가 많다. 시카고 대학 학교 수학 프로젝트팀(The University of Chicago School Mathematics Project ;1999)이 개발한 Everyday Mathematics에서도 이 구분을 따르고 있다. 그러나 교사용 지도서에서는 비와 비율의 구분에 대해서 다음과 같은 어려움을 호소하고 있다.

"많은 수학책과 사전에서 비와 비율은 동의어로 보고 있다. 그러나 전문가들과 과학자들 사이에서는 양이 서로 다른 단위를 가져 그 결과 합성 단위를 갖는 한 양이 될 때는 비율을, 같은 단위를 가져 그 결과 단위를 갖지 않는 하나의 수(스칼라라 부르는)가 될 때는 비라고 부르려는 경향이 점점 많아지고 있다. Everyday Mathematics의 저자들은 이런 구분이 유용하다고 생각했고 이 프로그램에서 그 생각을 유지해왔다. 그러나 학교와 일상생활에서는 계속 비와 비율을 동의어로 생각하고 있기 때문에 학생용 교재에서는 이것을 문제시하지 않았다."(pp.70-71)

Freudenthal(1983)도 위의 첫 번째 구분을 비와 비율로 구분하지 않고 각각 내적비와 외적비로 구분하여 모두 비에 포함시키고 있다.

Lesh 등(1988)이 지적한 것처럼 수학자들은 교육적으로 또는 심리적으로 의미 있는 과제 특성을 지니고 있는 것에 대해 엄밀하게 정의하려고 좀처럼 애쓰지 않는다. 수학자의 목표는 과제 사이의 심리적 차이점보다는 구조적 유사함에 중점을 두기 때문이다. 그래서 심리적으로 의미 있는 과제 특성에 대해 대응하는 '올바른' 정의가 존재하지 않는다. 수학 교육 연구와 지도에 있어서 더 많은 합의와 일관성이 있어야 함은 분명하다.

III. 우리나라에서의 비 개념 지도

우리나라 초등학교에서는 지금까지 비를 어떻게 지도했는지를 교수 요목기부터 제7차 교육과정에 의한 교과서에서 비 개념 도입 부분을 중심으로 분석해보기로 하자. 지금까지 비 개념을 5학년에서 도입하였었으나 제7차 교육과정부터는 6학년에서 도입되고 있다[6].

1. 교수요목기

교수요목기의 교과서 중 1954년도에 출판된 교과서에 의하면 5학년 2학기 '1. 추수' 단원에서 맞줄임(약분)을 통하여 동치분수를 구하는 과정, 이분모분수의 비교, 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 익히고, 후반부에 비 개념을 도입하고 있다.

"아버지는 옆의 밭에서 콩을 거두는 일을 하셨다. 저녁에 아버지께서 '오늘은 모두들 열심히 일을 했구나. 콩팥도 그만하면 한 이틀이면 다 거둘 수 있겠다.'고 하신다.
영수 '그러면 남은 일은 아직 오늘의 2갑절은 되겠군요?'

5) Ohlsson(1988)은 ratio는 한 양이 다른 양에 대해 얼마나 많은지를 나타내는 수에 의한 표현이라고 하면서, 내포량, proportion, rate는 ratio의 특별한 경우로 보고 있다. 즉, 내포량은 물리적 성질 그 자체를 말하는 물리적 양 사이의 비이며, proportion은 전체와 부분 사이의 비, rate는 어떤 양을 시간 측도와 비교하는 비라는 것이다.

형 '그렇다. 이렇게 일의 분량이라든가 물건의 분량이라든가를 비교하는 것을 '비'라고 한다.'
'비는 둘 이상의 물건의 크기를 비교해서, 한 편이 다른 한 편에 대해서 2갑절인 관계 즉 2와 1인 관계에 있으면 2 : 1, 2와 3의 관계가 있을 때는 2 : 3과 같이 쓰고, 2 대 1 또는 2 대 3이라고 읽는다.'(문교부, 1954b. pp.12-13)
(중략)

이와 같이 : 를 써서 두 양의 관계를 말할 때에는 처음에 말한 것을 : 의 기호 앞에, 나중에 말한 것을 : 의 기호 다음에 적는다. 그리고 : 를 써서 그 관계를 표시하는 방법을 '비'라고 한다."(문교부, 1954b. pp.13-14)

교수요목기는 생활 중심의 교과 조직을 하다 보니 수학 내용에 맞추어 단원을 구성한 것이 아니라 생활 중심으로 단원이 구성되어 있어서 수학적으로 볼 때는 내용이 산만하게 배열되어 있다. 여기서도 비를 엄밀하게 정의하지 않고 여러 군데서 조금씩 비를 설명하고 있다. 그러면서도 비의 의미를 강조하기보다 비의 표현 방법에 맞추어 비를 소개하고 있다.

"또 두 수의 관계는 자연수로나 분수로도 나타낼 수 있다.

1 : 6은 $\frac{1}{6}$, 6 : 1은 6

으로도 표시할 수 있다."(문교부, 1954b. pp.15-16)

위에서 알 수 있듯이 '비의 값'이란 용어를 사용하지 않고 비와 그 비의 값을 동치인 표현으로 보고 있다. 정비례, 백분율, 연비, 비례배분 등에 대해서는 6학년에서 지도하였다. 특히, 연비는 6학년 1학기 4단원 '물건의 속도'에서 다음과 같이 정의하고 있다.

"같은 종류의 셋 이상의 양의 관계를 다음과 같이 표시한 것을 '연비'라고 한다.
가 : 나 : 다....."(문교부, 1954a. p.75)

2. 제1차 교육과정

이때도 교수요목기와 같은 학년인 5학년 2학기 '2. 가을' 단원에서 비를 도입하고 있다. 이 시기에도 생활 문제 해결을 위한 도구로 수학

6) 학교 수학 교육과정에서 비에 관련된 내용을 도입하는 시기는 나라마다 조금씩 다르다. 예를 들면 미국에서는 비에 관련된 내용이 6학년에서 8학년 사이에 형식적으로 도입되고, 전 중등학교 교육과정에서 닮은도형, 함수 등과 함께 다시 지도한다. 대조적으로 중국에서는 이 내용이 초등학교에서 다루어진다. Cai와 Sun(2002)에 의하면, 중국은 비와 관련하여 비: 5-1(5시간), 비례식: 5-2(8시간), 비와 비례식의 응용: 5-2(9시간)으로 세 단원으로 구성하고 있다. 퍼센트 단원은 비 단원 다음, 비례식, 응용 앞에 위치하여 여러 가지 문제를 다루고 있으며, 퍼센트는 비의 특수한 형태로 소개하고 있다. 비 개념은 곱셈 관계를 가진 두 양의 비교로 분명하게 정의하고 있다. 교사용 지도서에서는 비가 중요하다는 것과 학생들이 비 개념의 승법적 성질을 이해하는데 어려움이 있다는 것을 부각시키고 있다. 비는 개념으로 또 연산으로 도입되고 다루어진다. 비를 도입할 때 학생들에게 비가 무엇이고 어떻게 표현되는지를 말하는 것으로 그치지 않고, 비 개념과 그 표현을 연결하는 다리로써 나눗셈이 사용된다. 중국 수학 교사들은 두 그룹의 학생 사이의 관계를 기술하기 위해 비를 사용할 때, 학생들이 배웠던 지식(나눗셈 $a \div b$)으로부터 시작하고, 새로운 상황(비 $a : b$)을 기술하기 위해 이 지식을 사용할 필요가 있음을 강조한다. 왜냐하면, 학생들은 자연수의 나눗셈을 배웠고 분수 또한 나눗셈을 나타냄을 이해하기 때문에, 비, 나눗셈, 분수 사이의 관련성을 쉽게 깨닫기 때문이다. 나눗셈 $a \div b$는 비 $a : b$의 연산이며 분수 $\frac{b}{a}$는 그 비 연산의 결과이다. 중국에서는 한국과 마찬가지로 $\frac{b}{a}$를 $a : b$의 비의 값이라고 부른다. 한편 가장 최근의 일본 교육과정에서는 5학년에서 백분율, 할푼리를 먼저 다루고 비, 비례에 관련된 내용은 6학년에서 다루도록 하고 있으며, 비의 값은 취급하지 않고 있다.

이 지도되어 수학적 체계가 많이 무시되어 내용이 산만한 편이다.

> 아버지 "… 지금까지 한 일과 남은 일을 비교할 때 '1일에 대하여 2일'이라고 말한다."
> 승호 "그러면, 일한 분량은 남은 분량의 2분의 1이니까, 2에 대해서 1이라는 것은 2분의 1이라는 말과 같군요."
> 아버지 "그렇게도 생각할 수 있지. 그런데 일의 분량이라든가, 물건의 분량 같은 것을 비교하는 데는 '비'라는 것을 쓴다.
> 축구 운동 경기에서 점수를 비교하는 데 8대 12니, 6대 9니 한다.
> 이런 것이 비인데, 이와 같이 비는 두 양의 크기를 나타내어, 그 크기의 관계를 알아보기 쉽게 하는 것이다.
> 우리가 오늘 일한 분량과 남은 일의 분량의 관계를 비로 말하면 '1 대 2'이고, 이것을 '1 : 2'라고 쓴다. ....
>
> 이와 같이 " : "를 써서 두 양의 관계를 말할 때에는, 처음에 말한 것을 : 기호 앞에 쓰고, 나중에 말한 것을 : 기호 다음에 씁니다.
> 이와 같이 " : "를 써서 두 양의 관계를 표시한 것을 비라고 합니다. (문교부, 1956. pp.48-49)

교수요목기와 마찬가지로 가족간의 대화를 통하여 비는 일의 분량이라든지 물건의 분량 등을 비교하기 위한 것임을 설명한 다음에 비를 정의하고 있다. 교수요목기와 달리 대화에서 비의 분수 표현을 먼저 설명하고 비를 도입하는 것이 특이하다. 그러나 비의 정의는 교수요목기와 마찬가지로 비의 표현 방법에 맞추어 비를 소개하고 있다. 즉 비는 ' : 를 써서 두 양의 관계를 표시한 것'으로 정의하고 있는 것이다. 교수요목기의 교과서에서는 $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$와 같이 분수비 또는 소수비를 자연수의 비로 간단히 하는 문제도 있었으나 여기서는 간단한 자연수의 비로 표현하는 문제만 다루고 있다. 그리고 6학년 1학기에서 할푼리와 백분율에 대하여 지도하고 있고, 6학년 2학기에서 비의 값, 분수비 간단히 하기, 연비, 정비례 등을 다루고 있다. 특히 단원 '2. 추수'에서는 비에 대해 다시 설명하고 있는데, 5학년에서와는 달리 비의 의미에 치중하고 있다. 두 양을 비교하는 방법으로서, 차이가 얼마가 되나, 몇 배가 되나, 그 양의 비를 구하여 본다는 등의 3가지가 있음을 밝히고 있다. 이것은 제 4차 교육과정의 교과서에서 두 양을 비교하기 위하여 가법적 방법과 승법적 방법 두 가지가 있음을 밝히고, 두 양의 비는 이 중에서 승법적 관계를 사용하여 양을 비교하는 것이라고 소개하는 것과 차이가 있다. 또 "논 넓이의 비 10 a : 30 a와 같이, 두 수나 양의 비, 예를 들면 '갑 : 을'에서 갑은 을의 몇 배인가, 또 몇 분의 몇인가를 볼 때에, '갑 ÷ 을'의 몫을, 갑의 을에 대한 비의 값이라고 합니다."(문교부, 1962, p. 31)와 같이 '비의 값'을 여기서 처음 정의하고 있다. 또 이 교과서에는 10 a : 30 a와 같이 수의 비 뿐만 아니라, 양의 비도 자주 등장하고 있다.

3. 제2차 교육과정

제2차 교육과정의 교과서에서는 앞의 교과서와는 달리 각 단원 명이 수학 내용으로 되어 있다. 예를 들면, 5학년 1학기의 단원명을 보면, 식의 계산, 큰 수, 두 양의 비교, 소수의 곱셈과 나눗셈, 분수, 도형, 도형의 넓이와 같이 되어 있다. 단원 명만 보아도 지도되는 내용이 무엇인지 짐작할 수 있다. 생활면을 약화하고 수학 본연의 계통을 중시했다. 비에 대한 내용은 앞의 교과서와 달리 5학년 1학기에서 다루고 있으며, 그 단원은 '3. 두 양의 비교'에서이다. 도입 부분에서 생활 속의 소재 즉, 감자밭

을 매고 북을 주는 상황에서 출발하고 있지만, 앞의 교과서에서처럼 대화체는 아니다.

그리고 '비'보다 '비율'이 먼저 다루어지고 있다.

> "2 이랑은 3 이랑의 3분의 2이다.
> 2 이랑의 3 이랑에 대한 '비율'이 $\frac{2}{3}$로 된다고 한다.
> 3 이랑의 2 이랑에 대한 비율은 얼마가 되겠는가?"(문교부, 1965. p.45)

몇 가지 질문을 하고 나서 다음과 같은 문제로 비례적 사고를 요구하는 문제를 제시한다.

> "아버지께서 12이랑 매시는 동안에 오빠는 몇 이랑을 매었겠는가?"(문교부, 1965. p.45)

이어서 다음과 같이 비율을 나눗셈으로 도입하고 이 비율에서 비를 정의하고 있다.

> "아버지께서 매신 넓이를 3으로 보면, 같은 시간에 오빠가 맨 넓이는 2로 볼 수 있다. 이 때 오빠가 맨 넓이에 대한 아버지께서 매신 넓이의 비율은 '3 ÷ 2'라고 한다.
> 그리고 이 비율을 '3 : 2'로 쓰고, '3 대 2'라고 읽는다. 또, 이와 같은 비율의 표시법을 '비'라고 한다.
> 또, 아버지께서 매신 넓이는 오빠가 맨 넓이의 $\frac{3}{2}$에 해당한다고도 한다."(문교부, 1965a. p.46)

앞의 두 교과서와 다른 점은 비율을 먼저 정의하고, 비율의 한 표현 방법-비, 분수, 소수-으로 비를 도입하고 있다는 점이다. 비율에 대한 설명은 비를 설명하고 난 뒤 다음과 같이 좀 더 명시적으로 정의 하고 있다.

> (비율) = (비교되는 양) ÷ (기준량) (문교부, 1965a. p.51)

교수요목기의 교과서에서는 '비율'이라는 용어를 사용하지 않고, "%로 적은 비를 '푼수'라 한다"(문교부, 1954a, p.21)라고 하는 반면에, 1차 교육과정의 교과서에서는 6학년 1학기에서 '비율'을 정의하지 않고, '이익 ÷ 산 값 = 이익의 비율'(문교부, 1960, p.13), '%로 적은 비율을 '푼수'라 한다'(문교부, 1960, p.14)와 같이 사용하고 있다. 2차 교육과정의 교과서의 또 하나의 특징은 비를 도입하기는 했으나 두 양을 비교하는 방법 중의 하나로 소개했을 뿐 비를 기계적으로 사용하는 문제가 거의 없다는 점이다. 비의 외형적 표시법을 의도적으로 배제하는 대신에, 예를 들면, 푸른 잉크를 물에 타서 푸른 물을 만들었을 때 어느 쪽이 더 진한지를 묻는 문제 등 비의 의미를 강화시킬 수 있는 상황이 많이 나오고 있다.

이 당시도 나선형 교육과정의 영향 탓인지, 6학년 1학기에서 다시 비에 대한 내용이 좀 더 심화되어 비에 대한 설명과 함께, 비의 값을 분수, 소수 등 수로 나타낸 비율이라고 정의하고 있다. 이어서, 퍼센트, 할푼리의 소개, 비의 값이 같을 때 그 비는 같다고 한다는 것을 약속하고 나서 '비를 간단히 하기'를 다루고 있다. 여기서도 양의 비가 수의 비와 함께 문제로 나오고 있으며, 연비, 정비례에 대해서는 6학년 2학기에 다루어진다.

4. 제3차 교육과정

제3차 교육과정에서는 비와 관련된 내용이 5학년 1학기와 2학기에서 모두 다루어지고 있으며, '비례식'이란 용어도 처음 등장하고 있다. 수학적으로는 상당히 정제되었으나, 실생활과의 관련성을 찾아볼 수 없게 되었다. 5학년 1학기의 마지막 단원 '6. 비와 비의 값'에서 비는 두 집합의 크기를 비교하는 것으로 정의하

고 있다.

> "철수네 분단 학생 수는 6명이다. 그 중 현리에 4명이 살고 양지 마을에 2명이 살고 있다. 현리에 사는 학생의 집합을 가, 양지마을에 사는 학생의 집합을 나라고 하면,
> 가 = {철수, 범준, 영희, 민정}, 나 = {수길, 희숙}
> 이다.
> 집합 가와 나의 원소의 개수의 대소는 하나씩 짝지어 보는 일대일 대응으로 비교할 수 있다. 그러나, 집합 가의 원소의 개수가 집합 나의 원소의 개수의 몇 배가 되는지 알아서 비교할 수도 있다.
>
> 이런 비교를 하기 위하여 두 집합의 원소의 개수를 대응하여 기호 ':'를 써서
> 4 : 2
> 라고 나타내고 '4 대 2'라고 읽는다. 이것을 2에 대한 4의 '비'라고 한다.
> 또 이것을 '4의 2에 대한 비'라고도 하고, 간단히 '4와 2의 비'라고도 한다."(문교부, 1973. pp.133-134)

철수네 분단에서 현리에 사는 학생 수와 양지 마을에 사는 학생 수를 그대로 비교하는 대신에 수학적 대상인 '집합'으로 바꾸어 놓고 그 '집합의 크기'를 비교하고 있음을 알 수 있다. 집합의 크기를 비교하는 것으로 정의했기 때문에, 수만 다루고 양을 다룰 수 없게 되어 본문이나 문제 중에 수의 비만 나오고, 양의 비는 나오지 않고 있다.

원래 역사적으로 비가 가지고 있는 의미를 앗아간 정의가 되고 있음을 알 수 있다. 집합 개념을 바탕으로 모든 것을 엄밀하게 정의하려는 시도이겠으나, 학생들에게는 혼란을 줄 뿐이다. 그러나 그 뒤의 문제에서는 예전과 같이 구체물의 대상을 그대로 비교하고 있다. 비를 나타내는 용어도 '2에 대한 4의 비', '4의 2에 대한 비', '4와 2의 비' 등 여러 가지로 표현하고 있으며, 비교를 할 때 기준이 되는 것이 무엇인지를 강조하고 있다.

또 앞의 교과서와 달리 비의 정의에 이어 학년을 바꾸지 않고 비의 값을 정의하고 있으며, 여기서는 다시 '원소의 개수'를 '비교하는 양', '기준량'이라고 하고 있어 수와 양을 동일시하고 있다.

> "이 때, 집합 가의 원소의 개수를 '비교하는 양', 집합 나의 원소의 개수를 '기준량'이라 하고, $\frac{3}{4}$을 기준량에 대한 비교하는 양의 '비의 값'
> 이라 한다.
> $$(\text{비의 값}) = \frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$$
> 또는 (비의 값) = (비교하는 양) ÷ (기준량)
> 즉, $\frac{3}{4}$은 기준량 4에 대한 비교하는 양 3의 비의 값, 즉 3:4의 값이라 하고
> $$3 : 4 = \frac{3}{4}$$
> 이라고 쓴다. 비의 값은 소수로 나타내어도 된다.
> 즉, 비 3 : 4의 값은 $\frac{3}{4}$ 또는 0.75이다."(문교부, 1973. p.136)

'비례식'은 비가 같음을 등식으로 나타낸 식으로 정의하고 비례식의 성질도 설명하고 있다. 비례식에서 미지수를 x로 나타낸 것도 3차 교육과정 교과서에서이다. 그리고 전에는 6학년에서 다루던 연비를 5학년 같은 단원에서 다루고 있으며, 그 정의도 앞의 교과서에서는 '같은 종류의 셋 이상의 양의 관계'라고 '양'을 강조하던 것이 '셋 이상의 비'라고 하여 '양'의 의미가 약해지고 '수'의 비만을 다루고 있는 것처럼 보인다. '비례배분'이라는 용어도 여기서 처음 나오고 있다. 5학년 2학기 '1. 비율'에서는 '비율'을 비의 값으로 정의하고 비율을

나타내는 방법으로 소수, 분수와 함께 할,푼,리와 백분율을 소개하고 있다. 이것은 2차 교과서에서 비율을 먼저 정의하고 비율의 표현 방법으로써 비를 생각했던 것과 구별된다.

5. 제4, 5, 6차 교육과정

제4차 교육과정에서는 비에 관련된 내용이 5학년 2학기 '6. 비와 비율' 단원에서 처음 도입되고 있다. 도입하는 방법도 제3차 교육과정에서와는 달리 비의 '의미'를 강조하려고 하고 있다.

> "철수네 분단은 8명인데 남학생이 6명, 여학생이 2명이다.
> 남학생과 여학생의 수를 비교하는 데는 여러 가지 방법이 있다. 두 수의 차를 알아보자.
> (중략)
> 남학생이 여학생의 몇 배가 되는지를 알아보자."(문교부, 1985. p.94)

두 양을 비교하는 데는 위와 같이 가법적 방법과 승법적 방법 두 가지가 있다. 두 양의 비는 이 중에서 승법적 관계를 사용하여 양을 비교하는 것이다. 승법적 관계를 사용하여 비 개념을 이끌어 내는 것은 다음과 같은 장점이 있다. 즉, 첫째는 학생들의 승법적 관계와 가법적 관계를 구별하는 것을 도울 수 있다는 점이고, 둘째는 학생들에게 친숙한 연산으로 시작하기 때문에 비를 하나의 연산으로 볼 수 있음을 쉽게 알 수 있다. 또한 학생들은 비 $a:b$, 나눗셈 $a \div b$, 분수 $\frac{b}{a}$가 어떻게 관련되는지를 알 수 있다. 제4차 교육과정의 교과서에는 이를 분명히 하고 있는 것이 특징이다.

> 여학생 수가 남학생 수의 몇 배인지를 나타내기 위하여 기호 : 를 사용한다.
> 여학생 수 2를 남학생 수 6에 대하여 2 : 6이라고 나타내고, 2 대 6이라고 읽는다.
> 이것을 6에 대한 2의 비라고 한다. 또는, 2의 6에 대한 비라고도 하고, 간단히 2와 6의 비라고도 한다.(문교부, 1985. p.95)

그 뒤에 집합의 개수를 이용하지 않고 구체물에서 직접 비의 값을 도입한다는 점 이외에는 제3차 교육과정의 교과서와 대동소이하다. 즉, 양의 비는 여전히 나오지 않고 있고, 비율을 비의 값으로 보고 비율의 분수 표시, 소수 표시라는 말을 사용하고 있으며, 비율에서 기준량을 얼마로 보느냐에 따라, 백분율, 할푼리 등을 정의하고 있다. 비례식과 관련된 내용은 6학년 1학기로, 연비와 관련된 내용은 6학년 2학기로 이동되었으며, 비례배분과 관련된 내용이 강화되었다.

제5, 6차 교육과정의 교과서에서 비와 비율, 비례식, 연비, 정비례 등에 대한 전개 방식은 제4차 교육과정의 교과서와 다른 것이 거의 없다. 그 내용도 5학년 1학기에서 비, 비의 값, 비율, 백분율, 할푼리를, 6학년 1학기에서 비례식, 정비례, 2학기에 연비와 비례배분을 지도하는 것이 제4차 교육과정의 교과서와 같다.

6. 제7차 교육과정

제7차 교육과정의 교과서에는 비와 비율, 비례식이 6-가에서, 연비는 6-나에서 3단원에 걸쳐 비 개념을 지도하고 있으며, 6학년에서 지도하던 정비례는 중학교에서 지도하게 되었다. 대체로 비와 비율에 대한 내용이 1년 정도 늦춰진 셈이다. 제7차 교육과정의 교과서에서는

교과서 전개 방식을 활동 위주로 하고 있는데, 비와 관련된 내용을 다루는데 있어서 앞서의 교과서와 다른 점이 많다.

분수 나눗셈 지도가 이뤄진 다음 제7차 교육과정의 교과서에는 앞의 교과서와 비슷한 방식으로 비를 다음 보기를 사용하여 도입하고 있다.

"철수네 모둠에서는 남학생이 3명, 여학생이 5명이다. 남학생 수와 여학생 수를 비교하는 방법을 알아보아라." (교육부. 2002. 6-가, p.82)

비는 두 양을 비교하기 위한 개념이란 측면에서 비교하는 방법을 알아보도록 한 것은 바람직하다. 그러나 이어서 나오는 활동은 그 목표가 명확하지 않다. 활동 1에서 남학생, 여학생의 수만큼 표에 ○표를 하게하고, 이어 숫자만 가지고 비교할 수 있다고 생각하는지를 묻고 있다. 교사용 지도서에서는 이 활동에 대해 '여기에서 ○의 개수, 즉 숫자 3과 5로 비교할 수 있을 것이라는 생각을 하게 한다.

그리고 학생들이 생각한 방법을 설명하게 하고, ...'(교육부, 2001, p.196)와 같이 해설하고 있지만, 이 물음의 의도가 분명하지 않다.

오히려 학생들에게 기대되는 반응은 '여학생이 남학생보다 2명 많다'라는 남학생과 여학생을 가법적으로 비교한 것이다.

여기에서 요구하는 승법적 비교인 '여학생이 남학생의 5/3배이다'라는 대답을 하기는 그리 쉬워 보이지 않는다. 만일 여학생 수를 6명으로 했다면 '여학생이 남학생보다 2배 많다'는 승법적 관계를 더 쉽게 찾아 낼 수 있을 것이다. 그러나 이어서 나오는 "약속"을 보면 이 물음의 의도는 그런 승법적 비교가 아니라 비의 외형적 표현에 더 관심이 많은 것처럼 보인다.

"약속 : 남학생 수와 여학생 수를 비교하기 위하여 기호 : 를 사용한다. 남학생 수 3명과 여학생 수 5명을 비교하는 것을 3 : 5로 나타내고, 3 대 5라 읽는다. 이것을 5에 대한 3의 비 또는 3의 5에 대한 비라 하고 간단히 3과 5의 비라고 한다."(교육부. 2002. 6-가, p.82)

3 : 5가 먼저 소개되고 $\frac{5}{3}$는 비의 값이라는 새로운 용어를 사용하여 뒤에 소개되고 있는 것으로 보아, '여학생이 남학생의 $\frac{5}{3}$배이다'라는 관계를 새로운 표현을 써서 나타낸다기보다 처음부터 비의 외형적 표현인 기호 : 를 써서 나타낸 것이 비임을 약속하고 있는 것처럼 보인다. 이는 교수요목기와 제1차 교육과정의 교과서 진술 형태와 비슷하다. 제4차 교육과정 교과서의 비의 정의와 비교해보면 약속의 내용에도 문제가 있다. '여학생 수가 남학생 수의 몇 배인지를 나타내기 위하여 기호 : 를 사용한다.'는 말과 '남학생 수와 여학생 수를 비교하기 위하여 기호 : 를 사용한다.'는 표현은 다르다. 더욱이 '여학생 수 2를 남학생 수 6에 대하여 2 : 6이라고 나타내고,'와 '남학생 수 3명과 여학생 수 5명을 비교하는 것을 3 : 5로 나타내고,'는 더 큰 차이가 있다. 앞의 표현에는 기준이 되는 것이 있으나 뒤의 표현에는 기준이 무엇인지 알 수 없는 것이다. 뒤의 활동 2로 알게 된 것이 3 : 5와 5 : 3은 서로 다르다고 했지만 그 활동 의도도 명확하지 않다. 기준량과 비교하는 양에 대한 설명이 빠져 있다.

다음 차시는 '비율과 비의 값을 알아보자'이다. 앞에서와 달리 비율을 먼저 정의하고 그 다음에 비의 값을 정의하고 있다.

"약속: 자원 봉사자 8명을 기준으로 하여 여자 5명을 비교할 때, 8명을 기준량, 5명을 비교하

는 양이라고 한다. 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 비율이라고 한다.
기준량을 1로 볼 때의 비율을 비의 값이라고 한다. 자원 봉사자 8명을 1로 볼 때, 8에 대한 5의 비의 값은 $\frac{5}{8}$이다.

$$(\text{비율}) = \frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}\text{''}$$

(교육부. 2002. 6-가, p.84)

백분율도 '기준량을 100으로 할 때의 비율' (교육부. 2002. 6-가, p.86)로 정의하고 있는 바, 이것도 앞선 교과서의 '비율에서 기준량을 100으로 보았을 때, 비교하는 양을 나타낸 수'라는 정의와 비교해서 그 의미가 불분명해 보인다. 할푼리에 대한 설명에서도 기준량에 대한 설명이 빠져있다.

> "약속: 비율을 소수로 나타낼 때, 그 소수 첫째 자리를 할, 소수 둘째 자리를 푼, 소수 셋째 자리를 리라고 한다.
> 8에 대한 5의 비율 0.625는 6할 2푼 5리라고 읽는다." (교육부. 2002. 6-가, p.89)

비율을 먼저 정의했음에도 불구하고 비례식에 대한 정의는 예전과 같이 '비의 값이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식'(교육부. 2002. 6-가, p.97)이라고 하고 있다.

7. 요약

지금까지 우리나라에서 사용했던 여러 교과서에서 비 개념이 어떻게 지도되었는지를 알아본 결과, 어느 시기의 교육과정에서나 비의 표현 방법에 비추어 비를 도입하고 있는 점이 특징임을 알 수 있다. 그러나 그 이면에는 두 크기를 덧셈적인 관점에서가 아니라 곱셈적인 관점에서 상대적인 크기를 비교하고 있음을 알 수 있다. 그러나 이러한 곱셈적인 관점에서의 비교는 어떤 상황, 맥락에서 그것을 조직하는 수단으로 비라는 관점을 택하는 안목을 갖게 될 때 진정으로 학습자에게 내면화된 상태라고 볼 수 있을 것이다. 그런데 지금까지의 교과서에서 다루고 있는 비는 Thomson(1994)이 구분한 여러 수준의 비 가운데 특별한 고정된 두 양 사이에 존재하는 곱셈적 관계를 인지하는 비의 초보적 수준이다. 이런 수준에서의 비는 두 고정된 양을 곱셈적 관계로 보는 것이며 그것이 어떤 조직의 의미로 이 상황을 조직하는 지에 대한 비례적 관점, 안목을 갖게 하지는 못한다. Thomson이 구분한 비 가운데 내면화된 비의 의미는 비례식을 다루는 가운데 획득할 수 있을 것이다. 그런데 우리나라의 교과서에서 비례식은 앞 상태에서 기준량과 비교하는 양의 비의 값이 다음 상태에서 기준량과 비교하는 양의 비의 값과 같다는 방식으로 도입되고 있다. 예를 들면, 제7차 교육과정에 의한 교과서에서 비례식을 도입하는 부분을 살펴보자.

> "빵 2개를 만드는 데에 달걀이 3개 필요하다. 빵 4개를 만드는 데에는 달걀이 몇 개 필요한지 알아보아라.
>
> 활동 1: 달걀 개수에 대한 빵 개수의 비의 값을 알아보아라.
>
> * 달걀 3개에 대한 빵 2개의 비의 값을 구하여라.
>
> 2 : 3 ➡ —
>
> * 달걀 6개에 대한 빵 4개의 비의 값을 구하여라.
>
> 4 : 6 ➡ —
>
> * 두 비 2 : 3과 4 : 6을 등식으로 나타낼 수 있는가?
> * 왜 그렇게 생각하는가?
>
> 약속 : 2 : 3 = 4 : 6과 같이 비의 값이 같은

두 비를 등식으로 나타낸 식을 비례식이라고 한다." (교육부, 2002, pp.96-97)

그런데 여기서 제시된 2 : 3과 4 : 6은 각각 빵 2개를 만드는 상황과 빵 4개를 만드는 상황에서의 비로서 외적비이다. 그런데 비례 관계의 인식은 '한 대상에서의 곱셈적인 변화'(내적비)만큼 '다른 대상에서의 곱셈적인 변화'(내적비)가 있다는 것, 즉 두 내적비 간의 불변성을 인식하는 것으로부터 시작되어 점차 외적비의 일정성을 인식하는 것이 자연스럽다. 그런데 교과서에는 각 상태에서의 내적비의 불변성을 먼저 인식하고, 여러 맥락에서 충분히 그것을 경험하기 전에 외적비가 일정함을 먼저 제시하고 있는 것이다. 이런 과정으로는 비례적 관점이 필요한 상황에서 그 조직 수단으로 이런 관점을 택하는 안목을 갖게 되기가 힘들 것이다. 유현주(1995)가 지적한대로 이러한 비례식의 도입 또한 비례 관계가 조직 수단으로 작용하는 맥락에서 그 조직 특성과 관련하여 다루어지지 않고 있으며 여전히 분수의 동치관계로 다루고 있다. 이로 미루어 볼 때 교과서에서의 비례식의 지도의 목표는 실제 비례 관계가 조직 수단으로 등장하는 맥락과 관련해서 학습자로 하여금 처음부터 그 조직 수단을 숙달되게 사용하도록 하고 그런 가운데 이런 안목으로 상황을 볼 수 있도록 학습자를 준비시키기 보다는 비례식이라는 식을 능숙하게 풀 수 있는 알고리즘의 지도에 중점을 두고 있다고 생각된다.

IV. 바람직한 비 개념 지도

비 지도에 대해 문제가 있는 것은 우리나라 뿐 만이 아니라 전 세계적으로 공통적인 현상이다. Streefland(1985)는 우리나라 교과서에 나와 있는 것처럼 비를 지도하는 대부분의 프로그램이 현실과 관련 있는 것처럼 보이는 문제 하나를 제시한 후에는 순수하게 수에 의한 비를 연습하도록 하고 있다고 하면서 이를 비판하고 있다. 그 외에도 그는 계속해서 비 개념 학습에 장애가 된다고 생각하는 것으로써 다음과 같은 것을 들고 있다.

(1) 현실과 관련이 없는 비의 값, 비례식, 그저 비뿐인 산술 등과 같은 수학적 대상을 가지고 연습함으로써 개념형성을 하도록 하고 있다.
(2) 실제적 응용이 결여되어 있는 바, 그 응용이라는 것도 산만하고 사후적이어서 개념 형성에 도움이 되지 않는다.
(3) '비'라는 주제가 고립되어 있어 그 방법에 있어서 어떤 다른 주제와도 연결되어 있지 않다.
(4) 비에 대한 접근 방법에서 시각화가 결여되어 있다. 시각적인 세계가 비의 원천으로써 거의 무시되고 있다. 확대와 축소, 닮음과 같은 것에 대한 언급이 없고, 나중에 시각적 모델로 기능할 수 있는 시각적 세계의 예가 없으며, 해 그림자를 이용하는 현상에 대해서도 언급이 없다. 이런 것은 비의 불변성에 대한 효율적인 모델이다.
(5) 방법적으로 적용되는 비 문제의 수 처리에 대한 도식이 결여되어 있다. 비례표(ratio table)와 같은 도식을 역동적으로 사용하는 것을 회피하고 있다.(p.75)

Freudenthal(1983)도 연수 교사들을 관찰해보니 그들에게 비는 어떤 상황이나 맥락으로부터 파악되지 못한 모호한 관계이거나 또는 완전히 알고리즘화되고 자동화되어 버린 현상이 되고 있고, 비라는 지적 대상은 수와의 결합에 의해 방해를 받고 있음을 지적하고 있다. 비를 수의 문제로 번안하는 것은 성숙하지 못한 것이며 불필요한 것이라고 비판하고 있는 것이다. 그는 예비 교사들도 학생들에게 비를 지도할 수 있는 모델을 만드는데 어려움을 겪고 있었으

며, 그런 모델의 적절성조차 파악하지 못하고 있다고 하면서, 이렇게 된 것은 그들 자신이 비를 배우는 과정에서 알고리즘으로 직접 향했던 결과라고 말하고 있다. 실제로 대부분의 프로그램은 처음서부터 비 개념을 알고리즘적 방식으로 경험하도록 하고 있다. 이것은 수학 학습 과정의 전형적인 특징으로서 통찰에 대한 원천은 방해를 받고, 통찰로 되돌아가는 길은 알고리즘화와 자동화의 과정에 의해 막혀 있다. 비 개념을 보다 의미 있게 학습하기 위해서는 알고리즘화와 자동화의 과정에 이러한 통찰의 근원이 막히지 않게 하는 방식으로 학습 과정이 조정되어야 한다. 이것은 알고리즘화가 이루어지는 과정 중에 그리고 그 이후에 적절한 곳에서 통찰의 근원으로 되돌아가도록 함으로써 성취될 수 있는 바, 이러한 과정은 본래 '무의식적'이었던 것을 점점 더 '의식'하게 해주며 본래 '언어화하지 못했던 것'을 분명하게 '언어화'할 수 있도록 해주는 것이다. Walle (2001)도 기계적 또는 기호적 방법은 비례적 추론을 개발하지 않는다고 하면서, 이런 방법은 학생들이 직관적이고 개념적인 방법으로 여러 경험을 한 다음에 도입해야만 한다고 주장하고 있다. Freudenthal(1976)은 교수현상학적 분석에 의해 엄밀한 알고리즘적인 접근에 앞서야하는 교수 과정을 ① 사상(mapping)에 의한 비의 보존과 비보존(non-preservation) 인식 ② 비 보존 사상 구성 ③ 비 보존 사상 구성에서 갈등 해결 ④ 비 보존에 대한 준거 다루기 ⑤ 비 보존에 대한 준거 형식화 ⑥ 그 준거의 필요충분조건 결정 등으로 구분하고 있다. 비를 효율적으로 지도하려는 노력은 오래전부터 있어 왔다. 그 중에서도 가장 대표적인 프로그램이 현실적 수학교육[7]에 바탕을 둔 네델란드의 Wiskobas

7) 현실적 수학교육에 대해서는 정영옥(2000)의 글에 자세하게 정리되어 있다. 현실적 수학교육은 '인간 활동으로서의 수학'이라는 관점에 그 뿌리를 두고, 안내된 재발명과 점진적인 수학화, 수준이론, 교수학적 현상학을 그 기본 원리로 삼고 있다. 첫 번째 원리인 '점진적인 수학화'와 '안내된 재발명'은 수학자의 활동을 모든 학습의 중심에 놓는 Freudenthal의 관점에 기초한다. 약 30년 동안 Freudenthal의 '이상적 현실주의'가 그 지지자들의 '현실적 현실주의'로 더욱 구체화되고 보완되어 왔고, 이러한 보완과정에서 기본적인 기능에 대한 더 많은 초점이 맞추어져 왔다. 현실적 수학교육에서 '현실적'이란 단순한 일상생활을 의미하기보다는 그것을 포함하는 더 광범위한 세계로 아동이 체험할 수 있고, 감정이입이 될 수 있으며, 자신의 여러 가지 경험을 혼합해서 생각하고 상상력을 불러일으킬 수 있는 상황을 의미한다. 그러한 상황에서 수학적인 세계로 들어서는 것이 수평적 수학화이고 수학적인 세계에서 좀더 추상적인 수학의 세계로 한 걸음 더 진전하는 것이 수직적 수학화이며, 이것이 또 아동의 현실이 되고 이러한 순환과정이 반복되면서 현실이 성장되어 가는 것으로 보고 있다. 따라서 현실적 수학교육에서 중요한 것은 단순히 아동의 현실 세계에서 시작한다는 것뿐 아니라 수업상황 자체가 아동의 체험의 일부가, 즉 현실화되도록 하는 것이 중요한 것이라고 할 수 있다. 따라서 모든 수업에서 수시로 이러한 현실의 세계와 수학의 세계가 교대되도록 하는 것이 중요하다.

8) Wiskobas는 '초등학교 수학'을 나타내는 네델란드어의 약자이다. Wiskobas 프로그램은 수학과 교육과정 현대화를 위한 위원회(CMLW)의 한 프로젝트였는데, 이 위원회는 처음에 중등학교에서의 수학교육을 현대화하기 위해 1961년 정부가 설립한 것이었다. 1970년 Wiskobas 프로젝트의 시작과 함께, 이러한 관심이 초등학교에도 쏟아졌다. 1971년 IOWO의 설립은 Wiskobas 프로젝트의 전문적인 개발에 필요한 것들을 제공해주었으며, 이러한 개발을 더 확고하게 하였다. IOWO의 의장이었던 Freudenthal은 네덜란드 교육개혁에 불을 당긴 사람이었다. 그의 가장 기본적인 관점은 수학은 현실과 연결되어야 하며, 아동 가까이에 머물러 있어야 하며 사회와 관련지어져야 한다는 것이다. 이러한 관점은 수학을 교과 내용으로 보는 것이 아니라 인간 활동으로서 보는 것이다. 안내된 재발명에 의한 점진적인 수학화라는 대전제 하에 이 연구는 1970년부터 본격적으로 진행되어, 1975년까지 초등 학교 실험 수학과 교육과정을 완성하고, 이러한 연구 결과가 1976년 'Five Years of IOWO'라는 주제로 Freudenthal의 은퇴를 기념하여 보고되었다. 또한 이러한 경험을 중심으로 Treffers는 'Three Dimension'(1987)에서 현실적 수학교육을 위한 모델을 제시한다. 다음으로 1976년부터 1980년까지 교과서를 계속 정련하였다. 이러한 현실적 초등 수학교육 교과서는 물론 1980년에서 1990년 사이에 처음에 개발된 교과서들이 계속 수정 보완되어 왔고, 1980년에는 5%, 1990년에는 75%, 1998년에는 80%의 초등학교에서 사용하고 있다.(정영옥, 2000)

프로그램[8]이라고 할 수 있다. 이 프로그램에서 '비'라는 주제는 중요한 위치를 차지하고 있다. 이 프로그램을 개발할 당시 네델란드의 전통적인 산술 지도에서는 '비'와 관련하여 정형적이고 도식화된 문제들을 푸는 정도였고, '새 수학'에는 비를 분수 속에 포함시켜버릴 정도로 비를 약화시켰다. 그러나 비 분야는 적절한 현실 문제를 수학화하는 좋은 기회를 제공하며, 비는 주로 상황을 비교하는 데 사용된다. 비교한다는 것은 조직하는 방식이며, 차이를 평가하여 정정하게 하는 방식으로써, 교수 과정에서 중요한 위치를 차지한다. 이런 견해를 고려하여 Wiskobas 교육과정 내에서 비를 지도하는 순서는 다음과 같은 방향으로 진행되었다. ① 수 능력을 통한 질적 접근으로부터 기능적 통찰로 나아간다. ② 비례성 개념을 구체화한 현상에 대한 직관적 친숙성으로부터 비판적으로 분석하는 태도로 나아간다. ③ 풍부하고 다양한 교수학적 모델을 통하여, 해결해야할 적절한 문제에 부딛혔을 때 학생들로 하여금 적절하게 모델을 선택할 수 있게 한다.

다른 나라의 대부분 비 관련 프로그램에서는 5학년 또는 6학년이 되서야 비 개념을 도입하고 있는데 비해, 이 Wiskobas 프로그램에서는 저학년에서부터 '환등기' 등을 활용하여 비에 대한 질적 접근을 시도하고 있다(Freudenthal, 1976). 예를 들면 종이 한 장과 교사의 손을 환등기 위에 올려놓고 화면에 비친 두 화상을 보면서 어느 것이 큰지를 묻고, 그 관계가 실제 상황에서도 유지되는지를 묻는다. 또 화상의 크기는 실제보다 몇 배정도 확대되어 있는지를 탐구하고, 화상에 비친 큐즈네르 막대의 색을 알아보는 활동, 화면에 비친 동전의 크기를 비교하여 그 동전이 얼마짜리인지를 알아보는 활동을 한다. 이 수업에서 비 보존에 대한 '인식'은 추론에 의해 곧 확인된다 할지라도 여전히 학생들은 직관적 기초에서 활동하며, 모든 탐구적 활동은 본질적으로 질적이다. 여기에 산술은 포함되지 않는다. 이와 같이 저학년(5-8세)에서는 확대, 축소, 비의 보존과 비보존(non-preservation), 그림에서의 표현, 지도의 축척 등을 이용하여 비에 대한 양적 조작을 할 수 있게 하는 질적 준비를 하게 한다. 특별히 주목할 것은 이런 접근과 방법은 인구밀도와 같은, 비에서 어려운 개념의 본질을 이렇게 낮은 단계에서도 인식할 수 있게 한다는 점이다. 비는 다양한 맥락에 포함되어 있으므로 학생들은 여러 가지 다른 상황에 있는 이런 문제 형태를 암암리에 만나게 된다.

비에 대한 시각적 파악에서 수에 의한 파악으로의 전이는 점진적으로 9-10세에 일어난다.

이중으로 표시된 수직선, 띠, 막대기 그림자 모델, 사각형그래프, 비례표 등과 같은 모델이나 도식은 수 관계를 발견하고, 그것을 산술적으로 처리하는데 도움이 된다. 조리법이나 혼합물의 성분에 대해서는 물론 물품과 가격 사이의 관계, 여행 시간과 거리 등에 대해서 탐구될 수 있다. 상급 학년(11-12세)에서는 %가 도입되고 100에 대한 비율을 알기 위한 방법으로 비례표가 중심 역할을 한다. 거기에다 비의 응용은 양 사이의 선형 관계와 비선형 관계로 확장된다. 계산은 점점 체계화되고 단축된다. 비는 또한 나중에 다루어지는 분수 활동에 적절하다. 요약하면, 비는 산술과 수학의 여러 영역과 현실 사이를 연결시키는 역할을 한다.

이 프로그램에서 비와 관련하여 많이 알려진 내용으로 6학년에서 다루는 '걸리버 여행기'이다. 걸리버 여행기는 소인국에 있는 걸리버를 소재로 한 것으로, 아동들이 현재 살고 있는 도시와 소인국에 관한 정보에서 여러 건물의 크기나 도로의 폭을 생각해 보는 경험과 걸리버가 입는 옷이나 음식을 소인국 사람들이 입

는 옷이나 음식과 비교하면서 길이의 비와 넓이의 비와의 관련성에 대한 직관적인 생각을 발전시키고 있다.[9)]

이와 같이 비를 지도하는 활동은 첫 수준에서는 시각적으로 표현된 문제에서 질적이고 비형식적인 비교로 시작하여 점진적으로 좀 더 수를 사용하는 계산 전략의 단계로 나아간다. 그 사이의 간극은 여러 종류의 모델을 사용하여 메운다. 마지막으로 산술 처리는 점점 체계화되며 단축된다.

V. 교육적 시사점 및 결론

Walle(2001)는 비례적 추론은 비에 대한 이해 뿐 아니라 그 이상의 것 다시 말하면, 비를 비교하는 능력, 동치인 비를 예언하거나 만들어내는 능력, 포함된 양을 비교하는 능력, 양 사이의 관계를 비교하는 능력을 포함한다고 말한다. 비례적 추론은 질적 사고-기계적 절차를 지닌 기능에 의존하지 않는-는 물론 양적 사고를 포함하고 있는 것이다. Lesh 등(1988)의 말과 같이 비례적 추론은 수학적이며 심리적인 차원 모두를 포함하는, 좀더 폭 넓고 복잡한 인지 능력을 포함하고 있는 것이다. 이러한 비례적 추론은 자연적인 성장이나 발달에 의해 자동적으로 생겨나는 것이 아니기 때문에 의도적인 노력이 있어야 한다. 그런데 아동들이 비 개념을 학습하는 것은 쉬운 일이 아니다. 어떻게 하는 것이 비 개념 학습을 용이하게 하는 것인지, 어떻게 지도하는 것이 비례적 추론 능력을 양성할 수 있는지에 대해서는 연구자들 사이에서 합의가 이루어지지 않고 있지만, 지금까지의 논의를 중심으로 아동들의 비 개념 구성을 촉진하는 몇 가지 교육적 시사점을 찾아보고자 한다.

첫째, 비례적 추론을 개발하기 위한 프로그램을 조기에 도입하는 것이 필요하다. 우리나라에서는 제7차 교육과정에 의해 6학년에서 비 개념을 도입하고 있으며, 그 이전에는 비와 관련된 내용을 다루지 않고 있다. 앞에서 살펴보았듯이 개념으로서의 비는 꽤 높은 발달 수준을 요구하지만, 비에 대한 느낌을 가지는 것이나 비에 대한 시각을 갖게 되는 것은 발달 초기에 이뤄진다. 따라서 아무런 준비 과정 없이 비를 명시적으로 가르치는 것보다. 저학년에서부터 비를 직관적으로 이해하도록 프로그램을 개발할 필요가 있다. 문제 해결 과정을 통하여 비에 대한 개념을 파악하게 하는 것도 한 가지 방법이 될 것이다. 이를 위해 네델란드의 프로그램을 좀 더 심층적으로 분석하는 것이 도움이 될 것이다.

둘째, 직관적이고 개념적인 방법으로 여러 경험을 한 다음에 기호나 기계적 방법은 나중에 도입하도록 한다. 예를 들면, 비례식을 푸는 전통적인 알고리즘 방식은 오랫동안 교과서에서 사용된 주 전략이었음에도 불구하고 소수의 학생에 의해서만 의미 있게 사용되어졌다. 비례식을 풀 수 있는 모든 사람이 반드시 비례적 추론을 사용하는 것은 아니다. 사실 대각선 곱셈과 같은 기계적 알고리즘은 학생들에 의해 잘 이해되지 않으며, '자연스럽게 생성되는' 해결 방법이 아니며, 비례적 추론을 쉽게 하도록 한다기보다는 비례적 추론을 피하기 위하여 사용된다는 것을 보여주고 있다. 따라서 전통적인 기호를 먼저 가르치고 그 기호에 의미를 부

9) 좀 더 구체적인 내용은 정영옥(2000)의 글에 소개되어 있다. 이 내용과 비슷한 프로그램은 Streefland, L.(1984), Weinberg, S.L. et al.(2003) 등에도 나온다.

여하도록 학생들에게 가르치는 것보다는 학생 스스로 이해한 것에 기호를 부여하도록 하는 것이 더 바람직한 방법이다. 학생들이 비형식적 전략과 부호를 개발하고 곤고히 하도록 한 후에 전통적인 기호를 도입하는 것이 자연스럽게 생각된다. 우리나라에서는 여전히 비에 대한 외적 표현과 그 알고리즘의 전수에만 매달리고 있다.

셋째, 맥락 속에 문제 상황을 위치시킴으로써 비에 의미를 부여하도록 한다. 수학적 개념은 그것이 문제를 해결하는 데 사용되는 상황, 맥락 내에서 학습되어야 한다는 것은 당연시하면서도, 전통적인 수업은 지식이 문제 상황을 경험함으로써 발생한다는 사실을 무시한 채 문제 해결의 전 단계로서 알고리즘을 숙달시키고 식을 조작하는 연습을 하는 데 강조점을 두어왔다. 따라서 현재의 교수 전략은 개선될 필요가 있다. 비는 여러 가지 방식으로 이해될 수 있으며 또 그래야만 한다. 맥락도 다양해야 하며, 비를 구현하는 점에 있어서도 다양해야 한다. 비 개념이 조직 수단으로 작용하는 맥락, 문제 내에서 수학적 개념을 학습하는 것은 학습자로 하여금 그 개념을 보다 잘 이해하고 보다 적절하게 적용하도록 해준다. 이런 다양한 방식에서 수학적 개념과 조작은 아동에게 의미있게 만들어지고 유용하게 된다. 구체적으로 비에 관한 과제에는 측정, 가격, 기하적 맥락과 기타 시각적 맥락, 모든 종류의 비율 등을 포함하는 상황을 포함하는 것이 좋다. 이러한 과정을 통해 학생들은 그들의 지식을 재구조화하기 위한 강력한 개념적인 기반을 가지게 된다.

넷째, 학습 과정을 지원하기 위한 도식과 시각적 모델 사용을 권장하도록 한다. 비는 복잡한 개념이기 때문에 장기적인 학습 과정이 요구되는데, 이러한 학습 과정은 직관적 관념으로부터 다양한 추상화 수준에 따라 개념으로 이행되는 과정이다. 이와 같은 추상적인 수학적 지식을 가르치기 위해서 그 추상적 지식을 구체화한 구체물을 제시하는 것은 실제로 학생들이 수학적 통찰에 도달할 수 있도록 도움을 주지는 않는다. 구체물에 의한 외적인 표현과 그 안에 들어 있는 정신적 표상은 일치하기 어려운 것이다. 교수학적 표현에 구현된 수학적 개념은 그것들을 이미 가지고 있어서 그 구체물에서 그것들을 인식할 수 있는 전문가들만 볼 수 있다. 정영옥(2000)에 의하면 현실적 수학교육에서는 아동의 비형식적 지식과 전략에 기초한 수업의 필요성을 주장하며, 이를 위해 모델의 사용을 중시한다. 지금까지의 구체물이 이미 존재하는 모델을 나타낸다면, 현실적 수학교육에서는 모델이란 학생들 스스로가 문제 해결 과정에서 개발한 것이다. 이러한 모델은 다양하며, 모델의 사용은 여러 가지 자료, 시각적 모델, 상황 모델, 도식, 다이어그램, 그리고 기호와 같은 수학적 수단들이 제공되거나 학생들에 의해 탐구되고, 개발되도록 한다는 것을 의미한다.

참고문헌

문교부(1954a). **셈본 6-1**. 대한문교서적주식회사.

문교부(1954b). **셈본 5-2**. 대한문교서적주식회사.

문교부(1956). **산수 5-2**. 국정교과서주식회사.

문교부(1960). **산수 6-1**. 국정교과서주식회사.

문교부(1962). **산수 6-2**. 국정교과서주식회사.

문교부(1965a). **산수 5-1**. 국정교과서주식회사.

문교부(1965b). **산수 6-1**. 국정교과서주식회사.

문교부(1966). **산수 6-2**. 국정교과서주식회사.

문교부(1973). **산수 5-1**. 국정교과서주식회사.

문교부(1974). **산수 5-2.** 국정교과서주식회사.

문교부(1985). **산수 5-2.** 국정교과서주식회사.

문교부(1986). **산수 6-1.** 국정교과서주식회사.

문교부(1987). **산수 6-2.** 국정교과서주식회사.

문교부(1990a). **산수 5-2.** 국정교과서주식회사.

문교부(1990b). **산수 6-1.** 국정교과서주식회사.

문교부(1990c). **산수 6-2.** 국정교과서주식회사.

교육부(1997a). **수학 5-2.** 국정교과서주식회사.

교육부(1997b). **수학 6-1.** 국정교과서주식회사.

교육부(1997c). **수학 6-2.** 국정교과서주식회사.

교육부(1997d). **초등학교 교사용 지도서 수학 5-2.** 국정교과서주식회사.

교육부(2002a). **수학 6-가.** 대한교과서주식회사.

교육부(2002b). **수학 6-나.** 대한교과서주식회사.

유현주(1995). **유리수 개념의 교수현상학적 분석에 의한 학습지도 방향에 관한 연구.** 서울대학교대학원 박사학위논문.

정영옥(2000). 현실적 수학교육. **학교수학, 2** (1), 283-310. 대한수학교육학회.

Bassarear, T. (2001). *Mathematics for elementary school teacher.* houghton Mifflin Company.

Cai, J., & Sun, W. (2002). Developing student's proportional reasoning : A Chinese pers- pective. In B. Litwiller, G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp.195-205). Reston, Virginia. : NCTM.

Cramer, K. et. al. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: research implications", In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom : middle grades mathematics* (pp.159-178). New York : .Macmillan Publishing Company.

Freudenthal H. (Eds.)(1976). Five years IOWO - On H. Freudenthal's retirement from the directorship of IOWO. *Educational studies in mathematics, 7*(3).

__________(1983). *Didactical phenomenology of mathematical* structures, D.Reidel Publishing Company.

__________(1991). *Revisiting mathematics education*, Kluwer Academic Publishers.

Harel, G., & Behr, M., Lesh, R., Post, T.(1994). Invariance of ratio: the case of children's anticipatory scheme constancy of taste, *JRME, 25*(4), 324-345.

Hoffer, A. H. (1988). Ratio and proportional thinking. In T. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8* (pp.285-313). Allyn and Bacon, Inc. : Boston.

Karplus, R., et. al. (1983). Proportional reasoning of early adolescents", In R. Lesh (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Academic Press, 1983.

Lamon,S. J. (1993). Ratio and proportion : children's cognitive and metacognitive processes. In T. P. Carpenter, E. Fennema, T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers* (pp.131-156). New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon,S. J. (1994). Ratio and proportion : cognitive foundation in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp.89-120), Albany, NY:Sunny Press.

Lesh, R., Post, T., Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert, M. Behr (Ed.), *Number concepts and operations in* *the middle grades* (pp.93-118). Lawrence Erlb- aum Associates : NCTM

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept(I), *Educational Studies in Mathematics, 11,* 219-254..

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept(II), *Educational Studies in Mathematics, 11,* 331-363.

Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993), *Street mathematics and school mathematics*, Cambridge University Press.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio : some thoughts on the long term learning process(towards a theory) part I : reflections on a teaching experiment. *Educational Studies in Mathematics, 15,* 327-340...

Smith, D. E. (1925). *History of mathematics, Vol. II.* Ginn and Company.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio : some thoughts on the long term learning process(towards a theory) part II : the outline of the long term learning process. *Educational Studies Mathematics, 16,* 75-94.

The University of Chicago School Mathematics Project(1999). *Everyday mathematics : teacher's reference manual, grades* 4-6, Chicago : Everyday Learning Corpora

Thomson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relation to concepts of Rate" In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicatvie reasoning in the learning of mathematics* (pp.179-234). Albany, NY : Sunny Press.

Tourniaire, F. & Pulos, S.(1985). Proportional reasoning : a review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16,* 1985, pp. 181-204.

Treffers A. (1987). *Three dimensions*. D. Reidel Publishing Company.

Walle, J. A. V. (2001). *Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally(4th edition),* Addison Wesley Longman, Inc.

Weinberg, S. L., Hammrich, P. L., Bruce, M. H. (2003). The giants project. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8,* 406-413.

An educational analysis on ratio concept

Jeong, Eun Sil (Jinju National University of Education)

The purpose of this study is to analyze the essence of ratio concept from educational viewpoint. For this purpose, it was tried to examine contents and organizations of the recent teaching of ratio concept in elementary school text of Korea from 'Syllabus Period' to 'the 7th Curriculum Period'. In these text most ratio problems were numerically and algorithmically approached. So the Wiskobas programme was introduced, in which the focal point was not on mathematics as a closed system but on the activity, on the process of mathematization and the subject 'ratio' was assigned an important place. There are some educational implications of this study which needs to be mentioned. First, the programme for developing proportional reasoning should be introduced early. Many students have a substantial amount of prior knowledge of proportional reasoning. Second, conventional symbol and algorithmic method should be introduced after students have had the opportunity to go through many experiences in intuitive and conceptual way. Third, context problems and real-life situations should be required both to constitute and to apply ratio concept.

While working on context problems the students can develop proportional reasoning and understanding.

Fourth, In order to assist student's learning process of ratio concept, visual models have to recommend to use.

핵심어: ratio(비), proportion(비례), rate(비율), proportional reasoning(비례적 추론), Wiskobas programme(비스코바스 프로그램)