비선형 제어 시스템의 선형화

Linearization of the Nonlinear Control Systems

이 홍 기*
(Hong-Gi Lee)

Abstract : Linearization is one of the most successful approaches nonlinear system control. The objective of this paper is to survey the recent results in linearization theory. It is hoped to be useful in understanding various linearization problems and challenging unsolved problems.

Keywords : nonlinear control systems, linearization, state coordinates change, feedback, dynamic feedback

I. 서론

비선형 제어 시스템의 연구는 선형 시스템의 연구 중 쉬운 부분이 거의 끝나는 1970년대부터 아주 활발히 연구되기 시작됐다. 특히 마이크로 프로세서 등 디지털 장비의 개발로 비선형 피드백의 사용이 용이하게 되고 비행 체계, 로봇 등 정밀한 제어가 요구되는 시스템이 늘어남에 따라 비선형 제어 시스템 설계의 필요성이 더욱 더 요구되어 많은 연구자들이 연구하기 시작하였다. 비선형 제어 시스템 연구의 가장 쉬운 접근 방법은 선형 피드백을 사용한 선형 시스템에서의 제어 문제 또는 제어 방법을 비선형 피드백을 사용한 비선형 시스템의 경우까지 일반화하는 것이다. 본 논문에서 소개할 선형화 기법은 선형 시스템의 제어 방법 중 선형 좌표변환(similarity transformation)에 의해 주어진 시스템을 조단 표준형(Jordan canonical form) 등의 더 유용한 시스템으로 변환하는 아이디어와 비슷하다. 즉, 주어진 비선형 시스템을 비선형 좌표변환을 사용하여 새로운 좌표계에서 시스템이 선형 시스템 식을 만족하게 하는 것이다.

기존의 비선형 시스템의 제어 방법은 비선형 시스템을 동작 궤적(nominal trajectory) 근처에서 Taylor 급수의 2차 이상 고차의 항들을 무시함으로써 선형 시스템으로 근사하여 선형 시스템 제어 이론을 적용하였다. 1970년대에 비선형 피드백을 사용하는 제어 시스템 연구가 시작되고[1,2], Krener[3,4]와 Brockett[5]에 의해 비선형 제어 시스템의 좌표변환에 의한 선형화와 피드백에 의한 선형화 아이디어가 각각 제시되었고 선형 제어 시스템의 많은 문제에서 성공적인 기하학적 접근 방법이 (선형 대수대신 Lie 대수를 이용하여) 비선형 제어 시스템에도 유용하다는 것이 보고되었다.[6-8] 좌표변환에 의한 선형화의 조건은 Sussman[9]에 의해 수정되었고 피드백 선형화 아이디어는 1980년대 초에 Su[10]와 Hunt et al.[11]와 Jakubzyk and Respondek[12]의 서로 독립된 연구에 의하여 잘 정의되고 필요충분조건도 알려졌다. 그 후 선형화 문제는 학계의 많은 관심을 끌었고 수 많은 연구가 진행되었다. 본 논문에서는 이 연구들을 간단히 정리하고 분류한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 가장 기본적인 좌표변환에 의한 선형화 및 피드백 선형화 문제와 조건 등을 2장에서 설명하고 3장에서는 피드백 선형화가 가능하지 않을 경우 차선책으로 생각할 수 있는 근사 선형화 문제와 부분 선형화 문제를 소개한다. 4장과 5장에서는 아직은 초보적인 결과만 알려진 비정칙 피드백 선형화 문제와 동적 피드백 선형화 문제를 각각 소개한다. 마지막으로 6장에서 입출력 선형화 등 선형화 문제 또는 아이디어와 유사한 이론들을 간략히 소개한다.

II. 비선형 제어 시스템의 선형화 문제

비선형 제어 시스템을 선형화하는 도구(tool)는 비선형 좌표변환과 비선형 피드백이다. 본 논문에서는 다음의 비선형 시스템을 고려한다.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1a}$$

$$y = h(x) \tag{1b}$$

여기서, $x \in R^n$는 시스템의 상태변수이고 $u \in R^m$는 입력이고 $y \in R^p$는 출력이다. $f(x)$와 $g(x)$와 $h(x)$는 모두 여러 번 미분가능하고 필요하면 해석적(analytic)이라고 가정한다. 또, 일반성을 잃지 않고 $f(0) = 0$라고 한다. (설명을 간단히 하기 위해 위와 같은 어파인(affine) 시스템을 고려하였지만 일반적인 비선형 시스템을 고려해도 된다.)

좌표변환 $z = S(x)$는 역함수가 존재하는 R^n에서 R^n으로의 함수이다. 만일 x가 시스템의 상태변수이면 z는 새로운 상태변수이다. 새로운 상태변수 z가 만족하는 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{z} = (S_* f)(z) + (S_* g)(z)u \tag{2a}$$

$$y = h(S^{-1}(z)) \tag{2b}$$

$$(S_* f)(z) = \left\{ \frac{\partial S(x)}{\partial x} f(x) \right\} \Bigg|_{x = S^{-1}(z)} \tag{3}$$

* 책임저자(Corresponding Author)
이홍기 : 중앙대학교 전자전기공학부(hglee@cau.ac.kr)
※ 본 연구는 중앙대학교 2001년도 학술연구조성비 지원으로 수행되었으며 지원에 감사를 드립니다.

예를 들어, $S(x)=P^{-1}x$이고 $f(x)=Ax$이고 $g(x)=b$이면, 선형 시스템 책에서와 같이 $(S_*f)(z)=P^{-1}APz$이고 $(S_*g)(z)=P^{-1}b$이다. 간단한 계산에 의해 선형시스템

$$\dot{z}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u \tag{4}$$

에 비선형 좌표변환

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=S^{-1}(z)=\begin{bmatrix}z_1+z_2^2\\ z_2\end{bmatrix} \tag{5}$$

을 고려하면 상태변수 x는 다음의 비선형 시스템 식을 만족함을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1x_2-2x_2^3\\ x_1-x_2^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1+2x_2\\ 1\end{bmatrix}u \tag{6}$$

즉, 선형 시스템 (4)에 비선형 좌표변환 (5)를 적용하여 비선형 시스템 (6)을 얻었다. 이를 달리 생각하면, 비선형 시스템 (6)에 비선형 좌표변환 (5)를 적용하면 선형 시스템 (4)를 얻을 수 있다.

정의 1 : (좌표변환에 의한 선형화)
시스템 (1a)가 새로운 좌표계에서 다음의 가제어성(controllable) 선형 시스템 식

$$\dot{z}=Az+Bu \tag{7a}$$

을 만족하는 좌표변환 $z=S(x)$가 존재하면 시스템 (1a)는 좌표변환에 의한 선형화가 가능하다고 정의한다.

문제 정의에서 선형 시스템이 가제어성이라는 조건은 필요하지 않지만 이 가정이 없이는 문제를 풀기 어려우므로 앞으로 모든 문제에서 선형 시스템은 가제어성이라고 가정한다.

비선형 시스템 연구에서는 Lie 브라켓(bracket)이라는 벡터필드 연산이 자주 쓰이는데 이 연산의 정의는 다음과 같다.

$$ad_f g_i=[f,g_i]=\frac{\partial g_i}{\partial x}f-\frac{\partial f}{\partial x}g_i$$

$$ad_f^0 g_i=g_i$$

$$ad_f^k g_i=ad_f(ad_f^{k-1}g_i),\quad k\geq 1$$

선형 시스템에서의 Kronecker 지수의 개념을 확장하여 비선형 시스템 (1a)의 Kronecker 지수 $(\varkappa_1,\cdots,\varkappa_m)$를 행렬 $A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}$와 행렬 $B=g(0)$인 선형 시스템의 Kronecker 지수로 정의한다. $f(0)=0$이므로

$$ad_f^k g_i(0)=\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}\right)^k g_i(0)$$

임을 알 수 있다.

정리 1 : [9] 시스템 (1a)가 좌표변환에 의한 선형화가 가능하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

1) $\sum_{i=1}^{m}\varkappa_i=n$

2) $[ad_f^{\ell}g_i, ad_f^{\ell'}g_j]=0,\ 1\leq i,j\leq m,\ 0\leq \ell_k\leq \varkappa_k$

좌표변환에 의한 선형화가 가능할 때 원하는 좌표변환을 구하는 방법은 참고문헌 [9,13-16] 등에서 발견할 수 있다. 피드백 선형화는 지금은 누구라도 생각할 수 있는 문제이다. 비선형 시스템

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ x_1^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

에 피드백 $u=-x_1^2+v$을 적용하면 선형 시스템

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}v$$

을 얻을 수 있다. 물론, 피드백만을 적용하여 선형 시스템으로 변환할 수도 있지만 좌표변환까지 적용하면 더 많은 비선형 시스템들이 선형화가 가능하다.

정의 2 : (피드백 선형화)
시스템 (1a)의 폐루프 시스템이 새로운 좌표계에서 다음의 가제어성 선형 시스템 식

$$\dot{z}=Az+Bv$$

을 만족하는 정칙의 피드백 $u=\alpha(x)+\beta(x)v$와 좌표변환 $z=S(x)$가 존재하면 시스템 (1a)는 피드백 선형화가 가능하다고 정의한다.

여기서, 정칙의(regular, nonsingular) 피드백이라 함은 $\beta(x)$가 정칙 행렬이라는 뜻이다. 선형 시스템 이론에서는 벡터들의 집합인 subspace 개념이 자주 나오는데 디스트리뷰션(distribution)은 비슷한 개념으로 벡터필드들의 집합으로서 선형과 달리 주어진 점에 따라 다른 subspace를 가질 수 있다. 비선형 시스템 (1a)에 대해 다음의 디스트리뷰션을 정의한다.

$$D_k=\text{span}\{ad_f^{\ell}g_i,\ 1\leq i\leq m,\ 0\leq \ell\leq k\},\ k\geq 0$$

만일, 디스트리뷰션이 Lie 브라켓 연산에 대해 닫혀 있으면 대합적(involutive)이라고 정의한다.

정리 2 : [10-12] 시스템 (1a)가 피드백 선형화가 가능하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

1) $\sum_{i=1}^{m}\varkappa_i=n$

2) $D_k,\ 0\leq k\leq n-2$ 들이 상수(constant) 차원의 대합적인 디스트리뷰션이다.

피드백 선형화가 가능할 때 원하는 좌표변환과 피드백을 구하는 방법은 참고문헌 [13-16] 등에서 발견할 수 있다. 좌표변환에 의한 선형화와 피드백 선형화 아이디어는 이산 비선형 시스템에도 마찬가지로 적용할 수 있는데 이에 관한 연구들은 참고문헌 [17-22] 등에서 발견할 수 있다. 정의 1과 정의 2에서 상태 방정식만 새로운 좌표계에서 선형 식을 만족하도록 하였는데, 출력 방정식도

$$y = Cz \tag{7b}$$

의 선형 식이 만족하도록 하는 문제는 출력포함 선형화 문제라고 부른다.[13,16,19,23,24] 이 중 MIMO 시스템에 대한 출력포함 피드백 선형화 문제는 아직 완전히 해결되지 않았다.

선형화 기법은 적용 가능할 때 아주 강력한 제어 수단이 되고, 로봇, 항공기, 자동차, 모터 등 우리 주위의 많은 시스템들이 선형화 조건을 만족한다.[25-31] 비선형 시스템의 선형화에 관한 다른 흥미로운 결과들도 참고문헌 [32-36] 등에서 발견할 수 있다. 선형화 이론의 약점 중의 하나는 피드백 선형화가 가능하기 위한 조건이 너무 까다롭고 선형화가 가능하지 않으면 이론을 적용할 수 없다는 것이다. 예를 들어, 다음의 간단한 시스템을 고려해보자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \tag{8}$$

$D_0 := \mathrm{span}\{g_1(x), g_2(x)\}$가 상수차원의 대합적인 디스트리뷰션이 아니므로 시스템 (8)은 피드백 선형화가 가능하지 않다. 지금부터는 이 장에서 설명한 피드백 선형화가 가능하지 않을 경우에 관한 연구들을 소개한다.

III. 근사 선형화 및 부분 선형화

주어진 비선형 시스템이 피드백 선형화가 가능하지 않으면 항상 가능한 과거의 1차 근사 선형화 방법을 적용해야 한다. 근사 선형화(approximate linearization) 문제와 부분 선형화(partial linearization) 문제는 피드백 선형화가 가능하지 않은 비선형 시스템을 최대한 선형 시스템에 가깝게 변환하려는 시도이다. 예를 들어, 시스템 (8)에 피드백

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

을 적용하면 폐루프 시스템은

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} x_1^2 v_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

가 되어 마지막 항을 오차로 간주하면 기존의 1차 근사 보다는 더 정확한 2차 근사 선형화로 생각할 수 있다. 즉, 2차 항은 피드백으로 처리했다.

정의 3 : (근사 피드백 선형화)
시스템 (1a)의 폐루프 시스템이 새로운 좌표계에서 다음의 가제어성 근사 선형 시스템 식

$$\dot{z} = Az + Bv + O(z, v)^{\rho+1}$$

을 만족하는 정칙의 피드백 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$와 좌표변환 $z = S(x)$가 존재하면 시스템 (1a)는 차수를 ρ로 하는 근사 피드백 선형화가 가능하다고 정의한다.

주어진 비선형 시스템을 고차로 근사 선형화 할수록 더 선형 시스템과 비슷해진다. 만일 피드백 선형화가 가능하면 어떤 차수의 근사 선형화도 가능하다. 근사 선형화 문제는 Krener[37]에 의해 제기되었고 현재의 컴퓨터가 좀 더 현명해 진다면 아주 실용적인 제어 기법이 될 것이다.

부분 선형화 문제는 모든 상태변수들과 입력과의 관계를 선형화 할 수 없을 때, 최대한 많은 상태변수들을 입력에 선형인 관계로 만드는 시도이다. 예를 들어, 시스템 (8)에 피드백

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

을 적용하면 폐루프 시스템은

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + x_1^2 v_2 \\ x_3 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix}$$

가 되어 상태변수 x_1에 관한 식은 비선형이지만 상태변수 x_2와 x_3에 관한 식은 선형이 된다.

정의 4 : (부분 피드백 선형화)
시스템 (1a)의 폐루프 시스템이 새로운 좌표계에서 다음의 가제어성 부분적 선형 시스템(partially linear system) 식

$$\dot{z} = Az + Bv, \quad z \in R^{\rho}$$
$$\dot{\xi} = \phi(z, \xi), \quad \xi \in R^{n-\rho}$$

을 만족하는 정칙의 피드백 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$와 좌표변환 $(z, \xi) = S(x)$가 존재하면 시스템 (1a)는 지수(index)를 ρ로 하는 부분 피드백 선형화가 가능하다고 정의한다.

주어진 비선형 시스템을 더 큰 지수로 부분 선형화 할수록 더 선형 시스템과 비슷해진다. 만일 피드백 선형화가 가능하면 지수가 n인 부분 선형화도 가능하고 그 역도 물론 성립한다. 부분 선형화 문제는 Marino[38]에 의해 제기되었고 참고문헌 [15]에 잘 설명되었으나 실용적인 면보다는 이론적인 면이 더 돋보이는 방법이다.

여기서 소개한 방법들은 비선형 시스템에 가깝기는 하여도 여전히 비선형 시스템이므로 주의해야 한다.

IV. 비정적 피드백 선형화

전 장에서는 피드백 선형화가 가능하지 않을 때, 2장에서와 같은 피드백을 사용하여 선형 시스템에 최대한 비슷하게 변환하여 제어하려는 시도를 설명하였다. 여기서는 2장의 피드백이 만족하여야 하는 조건을 완화함으로써 피드백 선형화가 가능한 비선형 시스템의 영역을 넓힌다. 예를 들어, 시스템 (8)에 피드백

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -x_3^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \alpha(x) + \beta(x) v \end{aligned} \tag{9}$$

을 적용하면 폐루프 시스템은

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v \tag{10}$$

가 되어 가제어성 선형 시스템을 얻을 수 있다. $\beta(x)$가 비정칙(singular) $m\times m$ 행렬이면 비정칙 피드백이라고 하는데 $\beta(x)$의 rank가 r일 때 $r< m$이다. 피드백 (9)에서 $\beta(x)$의 rank가 1이므로 2개의 입력 중 한 개를 잃어 버려서 시스템 (10)은 단 입력 시스템과 같다.

정의 5 : (비정칙 피드백 선형화)
시스템 (1a)의 폐루프 시스템이 새로운 좌표계에서 다음의 가제어성 선형 시스템 식

$$\dot z = Az + Bv$$

을 만족하는 피드백 $u=\alpha(x)+\beta(x)v$와 좌표변환 $z=S(x)$가 존재하면 시스템 (1a)는 비정칙 피드백 선형화가 가능하다고 정의한다. 여기서 $\beta(x)$의 rank는 n보다 작을 수도 있다.

주어진 비선형 시스템을 비정칙 피드백 선형화를 할 때 $\beta(x)$의 rank가 클수록 사용 가능한 입력 채널이 많아져 제어에 유리하다. 정의 5에 의하면 피드백 선형화가 가능하면 비정칙 피드백 선형화도 가능하다. 사실 다음의 간단한 사실을 유추할 수 있다.

정리 3 : [41] 시스템 (1a)가 비정칙 피드백 선형화가 가능하면, 시스템 (1a)는 $\beta(x)$의 rank가 1인 비정칙 피드백으로 선형화가 가능하다.

비정칙 피드백 선형화에 관한 연구는 참고문헌 [39-41]에서 발견할 수 있으나 아직 완전히 해결되지 않았다. 비정칙 피드백 선형화 역시 부분 선형화보다는 낫지만 실용적인 면보다는 이론적인 면이 더 돋보이는 방법이므로 좋아하지 않는 연구자들도 있다.

V. 동적 피드백 선형화

비정칙 피드백 선형화는 입력 채널 중 일부를 희생하는데 반해, 이 장에서는 정적 피드백보다 더 강력한(일반적인) 동적 피드백을 사용하여 정적(static) 피드백 선형화가 가능하지 않은 비선형 시스템을 선형화하는 동적 피드백 선형화를 소개한다. 예를 들어, 시스템 (8)에 동적 피드백

$$\begin{aligned} u_1 = & -x_3^2-(2\xi_1x_2+6x_1^2\xi_1+2x_1\xi_2)(x_2+x_1^2\xi_1) \\ & -2x_1x_3\xi_1-4x_1^3\xi_1\xi_2+v_1-x_1^2v_2 \end{aligned}$$

$$u_2=\xi_1$$

$$\dot\xi_1=\xi_2$$

$$\dot\xi_2=v_2$$

과 좌표변환

$$\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\\ z_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2+x_1^2\xi_1\\ x_3+2x_1\xi_1(x_2+x_1^2\xi_1)+x_1^2\xi_2\\ \xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}$$

을 적용하면 확장된(extended) 폐루프 시스템은

$$\begin{bmatrix} \dot z_1\\ \dot z_2\\ \dot z_3\\ \dot z_4\\ \dot z_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2\\ z_3\\ v_1\\ z_5\\ v_2\end{bmatrix}$$

가 되어 가제어성 선형 시스템을 얻을 수 있다. 즉, 2장에서의 피드백보다 더 복잡한(강력한) 피드백을 사용하면 선형화 할 수 있는 시스템의 범위가 늘어난다.

정의 6 : (동적 피드백 선형화)
시스템 (1a)의 확장된 시스템

$$\begin{bmatrix} \dot x\\ \dot \xi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x)+g(x)c(x,\xi)\\ a(x,\xi)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(x)d(x,\xi)\\ b(x,\xi)\end{bmatrix} v$$

이 새로운 좌표계에서 다음의 가제어성 선형 시스템 식

$$\dot z = Az+Bv,\ \ z\in R^{n-s} \tag{11}$$

을 만족하는 정칙 동적 피드백

$$u=c(x,\xi)+d(x,\xi)v$$

$$\dot\xi = a(x,\xi)+b(x,\xi)v,\ \ \xi\in R^s$$

와 좌표변환 $z=S(x,\xi)$가 존재하면 시스템 (1a)는 동적 피드백 선형화가 가능하다고 정의한다.

위 일반적인 동적 선형화 문제는 아주 복잡하고 이에 관한 결과가 전혀 없다고 해도 과언이 아니다. 동적 선형화 문제의 많은 결과들은 거의 다음에 정의하는 제한적인 문제에 관한 것이다.

정의 7 : (제한적인 동적 피드백 선형화)
시스템 (1a)에 대해 순수 적분기로만 구성된 동적 보상기

$$u_i=\begin{cases} \xi_1^i, & d_i\geq 1\\ w_i, & d_i=0\end{cases}$$

$$\dot\xi_\ell^i=\begin{cases} \xi_{\ell+1}^i, & 1\leq \ell\leq d_i-1\\ w_i, & \ell=d_i,\ \ d_i\geq 1\end{cases}$$

을 적용한 확장된 시스템

$$\begin{bmatrix} \dot x\\ \dot \xi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x)+g(x)c'(\xi)\\ a'(\xi)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(x)d'(\xi)\\ b'(\xi)\end{bmatrix} w$$

이 새로운 좌표계에서 다음의 가제어성 선형 시스템 식

$$\dot z = Az+Bv,\ \ z\in R^{n+s}$$

을 만족하는 정칙 정적 피드백 $w=\alpha(x,\xi)+\beta(x,\xi)v$와 좌표변환 $z=S(x,\xi)$가 존재하면 시스템 (1a)는 인덱스를 $(d_1,\cdots,d_m)$로 하는 제한적인 동적 피드백 선형화가 가능하다고 정의한다.

정의 7에서 사용한 제한적인 동적 피드백은

$$u=c'(\xi)+d'(\xi)\alpha(x,\xi)+d'(\xi)\beta(x,\xi)v$$

$$\dot\xi=a'(\xi)+b'(\xi)\alpha(x,\xi)+b'(\xi)\beta(x,\xi)v$$

이고 $\xi \in R^s$이고 $s = d_1 + \cdots + d_m$이다. 이 제한적인 동적 피드백은 다른 문제에서도 일반적인 동적 문제가 어려울 때 징검다리로서 종종 사용된다. 동적 피드백 선형화는 3장과 4장에서 소개한 방법과는 달리 아무런 문제없이 선형화 할 수 있는 비선형 시스템의 집합을 키울 수 있다. 따라서, 현재 선형화 연구자들의 관심을 끄는 분야이지만, 아주 복잡하고 어려운 문제여서 15년 이상의 연구에도 불구하고 아직도 초보적인 단계이다. 기하학적(geometric) 접근 방법과 대수학적(algebraic) 접근 방법 등 동적 피드백 선형화에 관한 연구들은 참고문헌 [42-55] 등에서 발견할 수 있다.

VI. 선형화 이론과 유사한 다른 문제들

선형화 이론과 유사한 문제로서 좌표변환을 사용하지 않는 (사용할 필요가 없는) 입출력 디커플링 문제는 시스템 (1)에 정칙의 피드백 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$를 적용하여 폐루프 시스템의 입출력 관계가

$$y_i^{(\rho_i)} = v_i, \ \ 1 \le i \le p$$

를 만족하도록 하는 것이다. 이 연구는 선형 시스템인 경우도 있는 문제지만, 비선형 시스템의 경우 디커플링과 더불어 선형인 입출력 관계식을 얻는다. Porter[1]와 Freund[2,56] 등의 선구적인 연구에 이어서 많은 연구 결과들을 발견할 수 있다.[7,57-67] 비선형 시스템의 입출력 디커플링과 유사한 문제로서 입출력 선형화[68,69]와 선형 시스템으로의 immersion[70,71] 문제가 있다. 시스템의 출력은 입력에 의존하는 부분과 입력에 의존하지 않고 초기 상태에만 의존하는 부분의 합으로 표현되는데, 입출력 선형화는 피드백을 사용하여 출력 중 입력에 의존하는 부분만 새로운 입력에 대해 선형이 되게 하는 것인 반면, 선형 시스템으로의 immersion는 입력에 의존하지 않는 부분도 원래의 상태변수의 개수와 다를 수 있는 새로운 상태변수에 선형이 되게 하는 것이다.

비선형 시스템의 관측기(observer) 문제도 선형화 이론의 dual 관계를 잘 이용하면 선형 시스템의 관측기의 아이디어를 적용하여 얻을 수 있다[72]. 또한, 선형 시스템에 대해 활발히 연구된 적응제어 이론도 선형화 이론과 결합하면 비선형 제어 시스템에도 적용 가능할 수가 있다[73].

VII. 결론

본 논문에서는 여러 형태의 선형화 문제와 이와 유사한 문제를 간략히 소개했다. 비선형 상태좌표변환이 선형화하는 주요한 수단이며 이 외에 여러 가지 형태의 피드백을 가정한다. 본 논문의 모든 선형화 문제에서 상태변수 피드백을 사용하였는데, 출력 피드백을 사용한 문제도 역시 고려할 수 있고 아직 많은 결과가 알려지지 않았으므로 대학원생들의 좋은 연구 과제가 될 것이다. 4장과 5장에서 소개한 비정칙 피드백 선형화와 동적 피드백 선형화 문제와 같이 최근 이 분야 연구들은 많은 부분 정적 피드백 선형화가 가능하지 않을 때의 해결책에 할애되고 있다.

참고문헌

[1] W. A. Porter, "Diagonalization and inverses of nonlinear system," *Internatio- nal Journal of Control*, vol. 11, pp. 67-76, 1970.

[2] E. Freund, "Decoupling and pole assignment in nonlinear systems," *Electronics Letters*, vol. 9, pp. 373-374, 1973.

[3] A. J. Krener, "On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems," *SIAM J. Control*, vol. 11, pp. 670-679, 1973.

[4] A. J. Krener, "Linearization and bilinearization of control systems," *in Proc. 1974 Allerton Conf. Circuits and System Theory*, 1974.

[5] R W. Brockett, "Feedback invariants for nonlinear systems," *IFAC Congress*, Helsinki, 1978.

[6] R. W. Brockett, "Nonlinear systems and differential geometry," *Proc. of the IEEE*, vol. 64, pp. 61-72, 1976.

[7] A. Isidori, A. J. Krener, C. Gori-Gigi, and S. Manaco, "Nonlinear decoupling via feedback: A differential geometric approach," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 26, pp. 331-345, 1981.

[8] A. Isidori, A. J. Krener, C. Gori-Giorgi and S. Monaco, "Locally (f,g) invariant distributions", *Systems & Control Letters*, vol. 1, pp. 12-15, 1981.

[9] H. J. Sussmann, "Lie brackets, real analyticity and geometric control," *Differential Geometric Control Theory, R.W. Brockett, et al.(ed), Boston: Birkhauser,* pp. 1-116, 1983.

[10] R. Su, "On the linear equivalents of nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 2, pp. 48-52, 1982.

[11] L. R. Hunt, R. Su, and G. Meyer, "Design for multi-input nonlinear system," *in Differential Geometric Control Theory, R.W. Brockett, et al. (ed), Boston: Birkhauser*, pp. 268-293, 1983.

[12] B. Jakubzyk and W. Respondek, "On the linearization of control systems," *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Physics*, vol. 28, pp. 517-522, 1980.

[13] A. Isidori, Nonlinear Control Systems, 3rd ed., Springer-Verlag London Ltd., 1995.

[14] H. Nijmeijer and A. van der Schaft, Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer-Verlag New York Inc., 1990.

[15] R. Marino and P. Tomei, Nonlinear Control Design, Prentice-Hall, 1995.

[16] 이홍기, 비선형 제어 시스템의 선형화, 중앙대학교 출판부, 2001.

[17] J. W. Grizzle, "Feedback linearization of discrete-time systems," *in Lecture Notes in Control and Information Sciences,* Springer-Verlag, vol. 83, pp. 273-281, 1986.

[18] H.G. Lee and S.I. Marcus, "Approximate and local linearizability of nonlinear discrete-time systems," *International Journal of Control*, vol. 44, pp. 1103-1124,

1986.
[19] H. G. Lee, A. Arapostathis, and S. I. Marcus, "On the linearization of discrete-time systems," *International Journal of Control*, vol. 45, pp. 1803-1822, 1987.
[20] B. Jakubczyk, "Feedback linearization of discrete-time systems," *Systems & Control Letters*, vol. 9, pp. 411-416, 1987.
[21] J.W. Grizzle and P.V. Kokotovic, "Feedback linearization of sampled-data systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 33, pp. 857-859, 1988.
[22] K. Nam, "Linearization of discrete-time nonlinear systems and a canonical structure," *IEEE Trans. on AC*, vol. 34, pp. 119-122, 1989.
[23] L. R. Hunt, M. Luksic, and R. Su, "Exact linearization of input-output systems," *Int. J. Control*, vol. 43, pp. 247-255, 1986.
[24] I.-J. Ha and S.-J. Lee, "Input-output linearization with state equivalence and decoupling," *IEEE Trans. on AC*, vol. 39, pp. 2269-2274, 1994.
[25] E. Freund, "Fast nonlinear control with arbitrary pole-placement for industrial robots and manipulators," *in Robot Motion, ed. by Brady, Hollerbach, Johnson, Lozano-Perez, and Mason,* MIT Press, Cambridge, MA, 1982.
[26] H. Ha, A. Tugcu, and N. Boustany, "Feedback linearizing control of vehicle longitudinal acceleration," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, pp. 689-698, 1989.
[27] R. Hunt, R. Su, and G. Meyer, "Application of nonlinear transformations to automatic flight control," *Automatica*, vol. 20, pp. 103-107, 1984.
[28] M. Ilic and F. Mak, " A new class of fast nonlinear voltage controller sandtheir impact on improved transmission capacity," *in Proc. Amer. Contr. Conf.*, 1989.
[29] J. Spong, R. Marino, S. Persada, and D. Taylor,"Feedback linearizing controls of switched reluctance motors," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32, pp. 371-374, 1987.
[30] T. Tarn, A. Bejczy, A. Isidori, Y. Chen, " Nonlinear feedback in robot arm control," *in Proc. 23rd IEEE Conf. Decision Contr.*, Las Vegas, NV, pp. 736-751, 1984.
[31] T. J. Tarn, A. K. Bejczy, and X. Yun, "Coordinated control of two robot arms," *Proceedings of 25th IEEE Conference on Decision and Control*, Athens, Greece, pp. 1193-1202, 1986.
[32] A. Arapostathis, B. Jakubczyk, H. G. Lee, S. I. Marcus, and E.D. Sontag, "The effect of sampling on linear equivalence and feedback linearization," *System & Control Letters,* vol. 13, pp. 373-381, 1989.
[33] J. P. Barbot, S. Monaco, and D. Normand-Cyrot, "Discrete-time approximated linearization of SISO systems under output feedback," *IEEE Trans. On Automatic Control*, vol. 44, pp. 1729-1733, 1999.
[34] W. M. Boothby, "Some comments on global linearization of nonlinear system," *Systems & Control Letters*, vol. 4, pp. 147-147, 1984.
[35] R. B. Gardner, W. F. Shadwick, "The GS algorithm for exact linearization to Brunovsky normal form," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, pp. 224-230, 1992.
[36] A. J. van der Schaft, "Linearization and input-output decoupling for general nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 5, pp. 27-33, 1984.
[37] A. J. Krener, "Approximate linearization by state feedback and coordinate change," *System & Control Letters,* vol. 5, pp. 181-185, 1984.
[38] R. Marino, "On the largest feedback linearizable subsystem," *System & Control Letters,* vol. 6, pp. 345-351, 1986.
[39] Z. Sun and X. Xia, "On nonregular feedback linearization," *Automatica*, vol. 33, pp. 1339-1344, 1997.
[40] S. S. Ge, Z. Sun, and T. H. Lee, "Nonregular feedback linearization for a class of second-order nonlinear systems," *Automatica,* vol. 37, pp. 1819-1824, 2001.
[41] D. Cheng, X. Hu, and Y. Wang, "Non-regular feedback linearization of nonlinear systems via a normal form algorithm," preprint.
[42] E. Aranda-Bricaire, C. H. Moog, and J. B. Pomet, "A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 40, pp. 127-132, 1995.
[43] B. Charlet, J. Levine, and R. Marino, "On dynamic feedback linearization," *Systems & Control Letters*, vol. 13, pp. 143-151, 1989.
[44] B. Charlet, J. Levine, and R. Marino, "New sufficient conditions for dynamic feedback linearization," *Geometric Methods in nonlinear Control Theory*, pp. 39-45, 1989.
[45] B. Charlet, J. Levine, and R. Marino, "Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization," *SIAM J. Control Optim.*, vol. 29, pp. 38-57, 1991.
[46] M. Fliess, J. Levine, P. Martin, and P. Rouchon, "Flatness and defect of non-linear system: introductory theory and examples," *International Journal of Control*, vol. 61, pp. 1327-1361, 1995.
[47] M. Fliess, J. Levine, P. Martin, and P. Rouchon, "On differentially flat nonlinear systems," *Proc. 2nd IFAC NOLCOS, Bordeaux,* pp. 408-412, 1992.
[48] M. Guay, P. J. Mclellan, and D. W. Bacon, "A condition for dynamic feedback linearization of control-affine nonlinear systems," *International Journal of Control*, vol. 68, pp. 87-106, 1997.
[49] B. Jacubczyk, "Remarks on equivalence and linearization of nonlinear systems," *Proc. 2nd IFAC NOLCOS, Bordeaux*, pp. 393-397, 1992.
[50] H. G. Lee, Y. M. Kim, and H. T. Jeon, "On the

linearization via a restricted class of dynamic feedback, *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 45, pp. 1385-1391, 2000.

[51] P Rouchon, "Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization ," *J. Math. Syst. Estim. Control*, vol. 4, pp. 1-14, 1994.

[52] W. M. Sluis, "A necessary condition for dynamic feedback linearization ," *System & Control Letters*, vol. 21, pp. 277-283, 1993.

[53] W. M. Sluis and D. M. Tilbury, "A bound on the number of integrators needed to linearize a control system," *System & Control Letters*, vol. 29, pp. 43-50, 1996.

[54] H. G. Lee, A. Arapostathis, and S. I. Marcus, "Linearization of discrete-time systems via restricted dynamic feedback, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2003, to appear.

[55] H.G. Lee, A. Arapostathis, and S.I. Marcus, "An algorithm for linearization of discrete-time systems via restricted dynamic feedback, *2003 IEEE Conference on Decision and Control,* to appear.

[56] E. Freund, "The structure of decoupled non-linear systems," *International Journal of Control*, vol. 21, pp. 443-450, 1975.

[57] J. W. Grizzle, "Local input-output decoupling of discrete-time nonlinear systems," *Int. J. Control*, vol. 43, pp. 1517-1530, 1986.

[58] J. W. Grizzle and A. Isidori, "Block noninteracting control with stability via static state feedback," *Math. Contr., Sig. Syst.*, vol. 2, pp. 315-341, 1989.

[59] I. J. Ha. "Canonical forms of decouplable and controllable linear systems," *Int. J. Contr.*, vol. 56, pp. 691-701, 1992.

[60] I. J. Ha and E. G. Gilert, "A complete characterization of decoupling control laws for a general class of nonlinear systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 31, pp. 823-830, 1986.

[61] H. J. C. Huijberts and H. Nijmeijer, "Strong dynamic input-output decoupling : From linearity to nonlinearity," *in Proc. IFAC NOLCOS Conf.*, Bordeaux, France, 1992.

[62] A.Isidori and J. W. Grizzle, "Fixed modes and nonlinear noninteracing control with stability," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 33, pp. 907-914, 1988.

[63] S. Monaco and D. Normand-Cyrot, "Some remarks on the invertibility of nonlinear discrete-time systems.", *IEEE AC*, pp. 324-327, 1983.

[64] H. Nijmeijer and W. Respondek, "Decoupling via dynamic compensation for nonlinear control systems.", *IEEE CDC*, pp. 192-197, 1986.

[65] H. Nijmeijer, "Local (dynamic) input-output decoupling of discrete time nonlinear systems," *IMA Journal of Mathematical Control & Information,* vol. 4, pp. 237-250, 1987.

[66] W. Respondek, "Dynamic input-output linearization and decoupling of nonlinear systems," *Proc. 2nd European control conference*, Groningen, pp. 1523-1527, 1993.

[67] W. Respondek and H. Nijmeijer, "On local right-invertibility of nonlinear control systems." *Control Theory and Advanced Technology 4*, pp. 325-348, 1988.

[68] A. Isidori and A. Ruberti, "On the synthesis of linear input-output reponses for nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 4, pp. 17-22, 1984.

[69] H. G. Lee and S. I. Marcus, "On input-output linearization of discrete time nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 8, pp. 249-259, 1987.

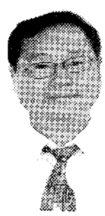
[70] D. Claude, M. Fliess, and A. Isidori, "Immersion, directe et par bouclage, d'un systeme nonlineaire dans un linearire," *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 296, pp. 237-240, 1983.

[71] H. G. Lee and S. I. Marcus, "Immersion and immersion by nonsingular feedback of a discrete-time nonlinear system into a linear system," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 33, pp. 479-483, 1988.

[72] A. J. Krener and W. Respondek, "Nonlinear observers with linearizable error dynamics," *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 23, pp. 197-216, 1985.

[73] K. Nam and A. Arapostathis, "A model reference adaptive control scheme for pure-feedback nonlinear systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 33, pp. 803-811, 1988.

이 홍 기



1981년 서울대학교 전자공학과 공학사. 1983년 서울대학교 전자공학과 공학석사. 1986년 Univ. of Texas at Austin 전기및컴퓨터공학과 박사. 1986~1989년 Louisiana State Univ. 조교수. 1989~현재 중앙대학교 전자전기공학부 교수. 관심분야는 비선형 제어 시스템, 지능제어, Markov Decision Process 등.