

순서를 갖는 척도모수들의 사전정보 하에 k -모집단 와이블분포의 베이지안 모수추정 *

손영숙 ¹⁾ 김성욱 ²⁾

요약

순서화된 척도모수들의 사전정보를 가지는 k -모집단 와이블분포의 모수추정을 위한 베이지안방법이 제시된다. 모수추정은 깃스샘플링에 의해서 이루어지며, 특히 깃스샘플러에서 형태모수의 조건부 사후분포는 로그-오목함수이므로 적응기각표집(Adaptive Rejection Sampling: ARS)방법에 의해 모수생성을 하였다. 논의된 모수추정법을 전기 절연유체 고장시간자료에 적용하여 척도모수의 순서화정보를 반영한 경우와 그렇지 않은 경우를 비교하였다.

주요용어: k -모집단 와이블분포, 순서화된 척도모수, 깃스샘플링, 적응기각표집.

1. 서론

모수들의 크기순서에 대한 정보가 있을 때 모수추정문제는 실생활의 여러 분야에서 요구되어와 많은 통계적문헌에서 이 문제를 다루어 왔다. 통계적 접근방법의 대부분은 frequentist의 접근방법이며, 이에 비교하여 베이지안 접근방법은 소수에 불과하다. 전통적인 베이지안 모수추정을 위해서는 모수의 주변사후분포(marginal posterior distribution)를 구해야 하나 흔히 모수들의 결합사후분포로부터 모수의 주변사후분포를 구하는 단계에서 적분의 어려움 혹은 적분의 불가능함으로 인하여 베이지안추정에 어려움이 있었다. 그러나 Geman과 Geman(1984) 이후 깃스샘플링(Gibbs sampling)방법의 적용은 적분을 필요로 하지 않으며 모수들의 완전 조건부 사후분포(full conditional posterior distribution)들로부터 모수생성을 통하여 모수들의 사후분포를 구할 수 있게 되었다. 물론, 깃스샘플링에서도 각 조건부 사후분포가 표준분포(standard distribution)가 아닌 경우에는 여러가지 모수 생성 방법을 고려해야 하는 문제가 있다.

정광모와 정윤식(1996)은 k -모집단 일모수 지수분포족, 예를 들면 평균이 알려진 정규분포, 형태모수가 알려진 감마분포, 혹은 포아송분포에서 순서제약조건을 가지는 모수들에 대하여 감마사전분포를 가정하고, 감마사전분포의 초사전(hyper prior) 척도모수에 대해 다시 역감마 사전분포를 가정하는 계층적 베이지안모형을 구성하였다. 각 척도모수와 초사전

* 이 논문은 2003년 한양대학교 교내연구비 지원으로 연구되었음.

1) (500-757) 광주광역시 북구 용봉동 300, 전남대학교 자연과학대학 수학교육학부 통계학전공 교수.

E-mail : ysson@chonnam.ac.kr

2) (426-791) 경기도 안산시 상록구 사1동 1271, 한양대학교 과학기술대학 응용수학전공 조교수.

E-mail : seong@hanyang.ac.kr

척도모수에 대한 조건부 사후분포는 각각 절단감마분포(truncated gamma distribution)와 역감마분포가 되며 절단감마분포로부터 모수생성방법은 Gelfand, Smith 및 Lee(1992)에서 언급한 일 대 일 대응추출법에 의해서 비교적 간단하게 해결할 수 있다.

Molitor와 Sun(2002)은 훨씬 복잡한 순서제약조건을 가지는 이모수 확률분포로 확장된다. 즉, 그들은 두개의 모수들을 가지는 k -모집단 정규분포와 k -모집단 감마분포에서 모수들의 함수의 순서제약조건이 있는 경우에 베이지안 모수추정을 논의하였다. k -모집단 정규분포의 모수들에 대하여 공액계층사전(conjugate hierarchical prior)분포를 가정하였다. 깁스샘플러를 구성하는 완전 조건부 사후분포들은 정규, 역감마, 절단정규(truncated normal), 그리고 절단역감마(truncated inverse gamma)분포들이다. 한편, k -모집단 감마분포의 형태모수와 척도모수에 대해서는 Sun과 Ye(1996)의 reference prior를 가정하였다. 최종적으로 유도된 척도모수들의 조건부 사후분포는 절단역감마분포이나 형태모수의 조건부사후분포는 표준분포도 아니고 로그-오목(log-concave)함수도 아니다. 따라서 Gilks와 Wild(1992)의 적응기각표집(Adaptive Rejection Sampling: ARS)방법을 일반화시킨 Gilks, Best 및 Tan(1995)의 적응기각 메트로폴리스표집(ARMS: Adaptive Rejection Metropolis Sampling)방법을 이용하여 모수추정을 하였다.

수명분포모형으로서 널리 사용되는 와이블분포는 지수분포족에 포함되지 않기 때문에 순서화된 모수상에서의 frequentist 접근 방식으로서의 추론은 매우 어렵다. 본 논문에서는 공통의 형태모수를 가지는 k -모집단 와이블분포에서 척도모수들이 순서화정보를 가질 때 모수들의 베이지안추정을 위하여 깁스샘플러를 구성한다. 이때 형태모수의 조건부 사후분포는 로그-오목함수이므로 Gilks와 Wild(1992)의 ARS에 의한 모수생성을 한다. 마지막으로 Nelson(1970)의 전기절연유체 고장시간자료에 본 논문에서 논의된 베이지안모수추정법을 적용하였다.

2. k -모집단 와이블분포, 우도함수 그리고 사전분포

모집단 i ($i = 1, 2, \dots, k$)에서 서로 독립인 고장시간 $T_{ij}, j = 1, 2, \dots, n_i$, 가 공통의 형태모수 α 와 척도모수 β_i 를 가지는 와이블분포를 따른다면 T_{ij} 의 확률밀도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$f(t_{ij}|\alpha, \beta_i) = \left(\frac{\alpha}{\beta_i}\right) \left(\frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^\alpha\right\}, \quad t_{ij} > 0, \alpha, \beta_i > 0.$$

관측값 $\mathbf{t} = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n_1}, t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n_2}, \dots, t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_{kn_k}\}$ 가 주어진다면 모수 α 와 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ 의 우도함수는

$$L(\alpha, \boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left(\frac{\alpha t_{ij}^{\alpha-1}}{\beta_i^\alpha}\right) \exp\left\{-\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{t_{ij}}{\beta_i}\right)^\alpha\right\}, \quad \alpha > 0, \beta_i > 0, i = 1, 2, \dots, k \quad (2.1)$$

이다. (2.1)의 우도함수하에서 제프리스(Jeffreys) 사전분포는

$$\pi(\alpha, \beta) \propto \frac{\alpha}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k}, \quad \alpha > 0, \beta_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$$

가 됨은 쉽게 보여진다. 이제 $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_k < \infty$ 의 사전정보가 주어진다면, 척도 모수들의 순서화정보를 부가한 다음의 사전분포를 가정한다.

$$\pi(\alpha, \beta) \propto \left\{ \frac{\alpha}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k} \right\} 1_{\{0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_k < \infty\}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k), \quad (2.2)$$

여기서 $1_A(a)$ 는 지시함수로서 $a \in A$ 이면 1의 값을 그외는 0의 값을 가진다.

(2.1)과 (2.2)를 결합하여 얻어지는 결합사후분포는 다음과 같다.

$$P(\alpha, \beta | t) \propto \left\{ \frac{\alpha^{n+1} (\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} t_{ij})^{\alpha-1}}{(\prod_{i=1}^k \beta_i) (\prod_{i=1}^k \beta_i^{n_i \alpha})} \right\} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^\alpha \right\}, \quad (2.3)$$

여기서 $n = \sum_{i=1}^k n_i$, $\alpha > 0$, 그리고 $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_k < \infty$.

3. 김스샘플러의 구성과 모수생성방법

β_{-i} 를 i 번째 성분 β_i 를 제거한 $k-1$ 차 벡터 $\beta_{-i} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_k)$ 이라 놓자. 결합사후확률분포 (2.3)으로 부터 완전 조건부(full conditional) 사후분포는 식 (3.1)과 (3.2)로 표시된다.

$$P(\beta_i | \beta_{-i}, \alpha, t) \propto \left\{ \frac{1}{\beta_i^{n_i \alpha + 1}} \right\} \exp \left\{ - \frac{1}{\beta_i^\alpha} \sum_{j=1}^{n_i} t_{ij}^\alpha \right\}, \quad \beta_{i-1} \leq \beta_i \leq \beta_{i+1}, \quad (3.1)$$

$$P(\alpha | \beta, t) \propto \frac{\alpha^{n+1} (\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} t_{ij})^\alpha \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^\alpha \right\}}{\prod_{i=1}^k \beta_i^{n_i \alpha}}, \quad \alpha > 0. \quad (3.2)$$

확률변수 I 가 모수 λ 와 δ 를 가지는 역감마분포를 따른다면 $I \sim IG(\lambda, \delta)$ 라 표시하고 그것의 확률밀도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$f_I(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda) \delta^\lambda} x^{-(\lambda+1)} \exp \left(- \frac{1}{\delta x} \right), \quad \lambda, \delta > 0, 0 < x < \infty.$$

식 (3.1)로 부터 $\gamma_i = \beta_i^\alpha$ 는 절단구간 $(\gamma_{i-1}, \gamma_{i+1})$ 을 가지는 절단 역감마분포 $IG(n_i, 1/\sum_{j=1}^{n_i} t_{ij}^\alpha)$ 를 따른다. 이때 $\gamma_0 = 0, \gamma_{k+1} = \infty$ 으로 놓는다. 절단분포에서 모수생성은 절단전 분포(untruncated distribution)로 부터 생성된 모수가 절단구간에 속하는 경우만 채택하므로써 간단히 해결할 수 있으나 절단구간이 매우 작은 경우에는 채택율이 매우 낮아 비효율적이다. 또 다른 방법으로는 역변환법(inversion method)이 있다. 역감마확률변수 I 의 누적 분포함수(cumulative distribution function: c.d.f.)를 $F_I(x)$ 라 놓으면 절단구간 (a, b) 에서 절단역감마확률변수 I^T 는 Devroye(1996)의 역변환법을 적용한 다음의 식에 의해 생성된다.

$$I^T = F_I^{-1}\{F_I(a) - u(F_I(b) - F_I(a))\}, \quad (3.3)$$

여기서 u 는 표준균일분포로부터 생성된 난수이다. $F_G(x)$ 를 감마확률변수 G 의 c.d.f.이라 놓으면 $1/G$ 은 역감마분포를 따른다는 사실을 이용하여

$$F_I(x) = 1 - F_G(1/x) \quad (3.4)$$

이고, (3.3)과 (3.4)로부터 절단구간 (a, b) 에서 절단역감마확률변수 I^T 는

$$I^T = \left[F_G^{-1} \left\{ F_G(1/a) - u(F_G(1/a) - F_G(1/b)) \right\} \right]^{-1}$$

의 관계식으로 부터 얻을 수 있다. 이제 보통의 통계계산 소프트웨어에 내장되어 있는 감마 c.d.f.와 역감마 c.d.f.의 역함수를 이용하여 절단역감마확률변수를 생성할 수 있다.

기각표집법(rejection sampling)은 확률밀도함수 $f_X(x)$ 로부터 확률변수생성을 위한 일반적인 방법인데 보통 $f_X(x)$ 가 정규화상수 위까지는 명시되어야 한다. 즉, $f_X(x) = g(x)/c$, $x \in D$, 여기서 D 는 $f_X(x)$ 의 공간(support)이며 c 는 정규화상수이다. 이제 $f_X(x)$ 대신 $g(x)$ 로부터 확률변수생성을 위해서는 D 의 모든 x 에 대하여 $g(x) \leq g_U(x)$ 를 만족하는 덮개함수(envelope function) $g_U(x)$ 를 찾아야 하지만 실제로 $g_U(x)$ 를 찾는 것은 어려운 일이다. ARS는 $g(x)$ 의 로그-오목성을 이용하여 $g(x)$ 의 최대값을 찾을 필요가 없다. 즉, x 축 위의 m 개의 좌표점들을 $T_m = \{x_i, i = 1, 2, \dots, m, x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m\}$ 이라 놓자. 그리고 $\log(g(x))$ 의 볼록곡면선상에 있는 m 개의 점들, $(x_i, \log(g(x_i))), i = 1, 2, \dots, m$,에서 접선을 그어 연결하므로써 만들어지는 조각선형덮개(piecewise linear upper hull)함수 $U_m(x)$ 를 사용한 $\exp(U_m(x))$ 를 T_m 에서의 기각덮개함수(rejection envelope function)로 정의한다. 또한 표집확률함수로서는

$$S_m(x) = \exp\{U_m(x)\} / \int_D \exp\{U_m(x')\} dx'$$

를 사용한다. 식 (3.2)의 $P(\alpha|\beta, \mathbf{t})$ 에 로그를 취한후 α 에 관하여 2차 미분한 함수는

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \log P(\alpha|\beta, \mathbf{t}) = -\frac{n+1}{\alpha^2} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{t_{ij}}{\beta_i} \right)^\alpha \left\{ \log \left(\frac{t_{ij}}{\beta_i} \right) \right\}^2 < 0$$

과 같으므로 $\frac{\partial}{\partial \alpha} \log P(\alpha|\beta, \mathbf{t})$ 는 감소함수이고, $\log P(\alpha|\beta, \mathbf{t})$ 는 로그오목함수이다. 따라서 (3.2)의 조건부 사후분포로부터 α 를 생성하기 위해서 아래와 같은 Gilks 와 Wild(1992)의 ARS 알고리즘을 적용할 수 있다.

• 단계 1: 초기화단계

- * $D = \{\alpha | \alpha > 0\}$ 의 공간에서 α 축 좌표점의 수 m 과 좌표점 T_m 을 정하고 T_m 에서의 조각직선덮개함수 $U_m(\alpha)$ 를 구한다.

• 단계 2: 표집단계

- * 표준균일분포로부터 난수 u 를 생성한다.
- * 표집확률함수 $S_m(\alpha)$ 으로 부터 α^* 를 생성한다.
- * $u \leq \exp\left\{\log P(\alpha^*|\beta, t) - U_m(\alpha^*)\right\}$ 이면 α^* 를 채택하고 그렇지 않으면 α^* 를 기각하고 갱신단계로 간다.

• 단계 3: 갱신단계

- * 기각된 α^* 를 α 축 좌표점에 추가하여 좌표점 T_{m+1} 을 만들어 다시 표집단계를 반복한다.

4. 예 제

표 4.1은 고정된 전압이 주어졌을 때 어느 전기절연유체의 고장시간에 관한 자료로서 Nelson(1970)으로 부터 일부를 발췌한 자료이다. 이 자료는 와이블분포를 따르는 것으로 알려져 있으며 서로 다른 전압수준에서 형태모수는 모두 동일하며 척도모수는 다르다고 한다. 이제 3절에서 논의된 깁스샘플링에 의한 k -모집단 와이블분포의 모수추정을 위하여 MATLAB(The MathWorks Inc. 1998)을 사용하여 모든 계산을 수행하였다.

각 전압하에서 와이블분포의 두 모수들을 추정하기 위하여 MATLAB의 weibfit 함수를 이용하여 추정한 모수들의 추정치는 표 4.1의 다섯번째 및 여섯번째 열에 주어지고 이 결과로부터 $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_5 < \infty$ 의 정보를 베이지안 모수추정에 반영하고자 한다. 난수의 생성은 MATLAB의 unifrnd함수를, 감마 c.d.f., 그리고 감마 c.d.f.의 역함수값은 각각 gamcdf와 gaminv함수를 통하여 계산하였다. 깁스샘플러는 11,000회 반복 운영하였고 그중 처음 1000회의 결과값들은 버리고 총 10,000회의 생성된 모수값들이 사후분포를 얻는데 이용되었다. 제일 처음 반복에서 필요로 하는 $\beta_i, i = 2, 3, 4, 5$ 와 α 의 초기값으로는 표 4.1의 개별 모수들의 추정값들인 $\hat{\beta}_i, i = 2, 3, 4, 5$ 와 $\hat{\alpha}_i$ 들의 평균을 각각 사용하였다. 또한 ARS에서 α 축 좌표점의 초기값으로 $\min(\hat{\alpha}_i)$ 과 $\max(\hat{\alpha}_i)$ 의 두개 좌표점을 사용하였다. 이후 깁스샘플링의 매회 α 축 좌표점의 초기값으로는 직전 반복에서 구해지는 표집확률함수 $S_m(\alpha)$ 의 10% 및 90%백분위점을 사용하였다.

표 4.2에 제시된 깁스샘플링에 의한 모수추정결과는 척도모수들의 순서화 사전정보를 반영한 경우와 그렇지 않은 경우로 나뉘어 제시되었다. 10,000회 반복계산에서 순서화제약조건이 있는 경우 $\log P(\alpha|\beta, t)$ 와 $\frac{\partial}{\partial \alpha} \log P(\alpha|\beta, t)$ 의 평균 계산횟수는 2.6983이고 95% 신뢰구간은 [2, 5]이다. 순서화 제약조건이 없는 경우에 평균 계산횟수는 3.3889이고 95% 신뢰구간은 [2, 7]로서 보다 더 많은 계산을 필요로 함을 알 수 있다. 그림 4.1은 깁스샘플링의 반복에 따라 생성된 각 모수들의 값을 나타낸 그림이다. 그림 4.2는 각 모수들의 사후 분포를 뜻수히스토그램으로 나타낸 그림이다. 표 4.2, 그림 4.1, 그리고 그림 4.2로부터 공통된 결과는 척도모수들의 순서화 사전정보를 반영한 경우의 모수들의 사후 분포가 그렇지 않은 경우보다도 더 산포도가 작은 결과를 준다는 것이고 이러한 것은 Molitor 와 Sun(2002)의 수

표 4.1: 전기절연유체의 고장시간자료와 각 와이블 모집단의 모수추정결과

i	전압(KV)	n_i	고장시간(단위: 분)	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_i$
1	38	8	0.47,0.73,1.4,0.74,0.39,1.13,0.09,2.38	1.3630	1.0009
2	36	15	1.97,0.59,2.58,1.69,2.71,25.5,0.35,0.99, 3.99,3.67,2.07,0.96,5.35,2.9,13.77	0.8891	4.2916
3	34	19	0.96,4.15,0.19,0.78,8.01,31.75,7.35,6.5,8.27, 33.91,32.52,3.16,4.85,2.78,4.67,1.31,12.06,36.71,72.89	0.7708	12.2222
4	32	15	0.4,82.85,9.88,89.29,215.1,2.75,0.79,15.93,3.91, 0.27,0.69,100.58,27.8,13.95,53.24	0.5614	25.9310
5	30	11	17.05,22.66,21.02,175.88,139.07,144.12, 20.46,43.4,194.9,47.3,7.74	1.0588	77.5847

표 4.2: 모수들의 사후분포

모수	$0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_5 < \infty$ 의 사전정보하에			
	mean	S.D.	median	95% posterior interval
α	0.7772	0.0743	0.7754	[0.6346, 0.9245]
β_1	1.0366	0.5120	0.9251	[0.4076, 2.3455]
β_2	4.3556	1.5187	4.0985	[2.2119, 8.1120]
β_3	12.8851	3.9350	12.2565	[7.0653, 22.4248]
β_4	33.9168	11.6158	31.8951	[17.3636, 62.4610]
β_5	81.5462	35.0651	73.8103	[37.3600, 171.9581]
모수	척도모수들에 대한 순서화 사전정보를 반영하지 않을 때			
	mean	S.D.	median	95% posterior interval
α_{NO}	0.6871	0.1131	0.6926	[0.4656, 0.8963]
$\beta_{NO,1}$	1.0466	0.5827	0.9093	[0.3922, 2.5266]
$\beta_{NO,2}$	3.8471	1.9744	3.3896	[1.5089, 8.9688]
$\beta_{NO,3}$	11.1733	8.0887	9.1109	[3.1808, 32.3073]
$\beta_{NO,4}$	31.3129	33.4112	21.8017	[5.3689, 111.3009]
$\beta_{NO,5}$	69.9193	94.5158	43.9137	[9.0706, 278.5014]

치분석 결과와도 일치한다. 따라서 순서화 사전정보를 모수추론에 반영한다면 보다 정확한 추정치를 도출해 낼 수 있으리라 기대된다.

5. 결론

본 논문은 k -모집단 와이블분포에서 순서화 척도모수들의 크기순서의 징후가 있는 경우 이를 사전정보에 반영하여 깃스샘플링에 의해 베이지안 모수추정하는 절차를 논의 하였다. 특히 깃스샘플러에서 형태모수의 조건부 사후분포는 표준분포는 아니지만 로그-오목함수 이므로 적응기각표집(ARS)에 의해 모수생성을 하였다. 논의된 모수추정법은 Nelson(1970)의 전기절연유체 고장시간자료에 적용하여 척도모수의 순서화 제약조건이 있는 경우와 없는 경우를 비교하였다. 순서화 사전정보를 반영한 경우의 모수들의 사후 분포는 그렇지 않은 경우보다도 산포도가 보다 작은 결과를 주므로 순서화 사전정보를 모수추론

에 반영한다면 보다 정확한 추론을 도출해 낼 수 있으리라 생각된다.

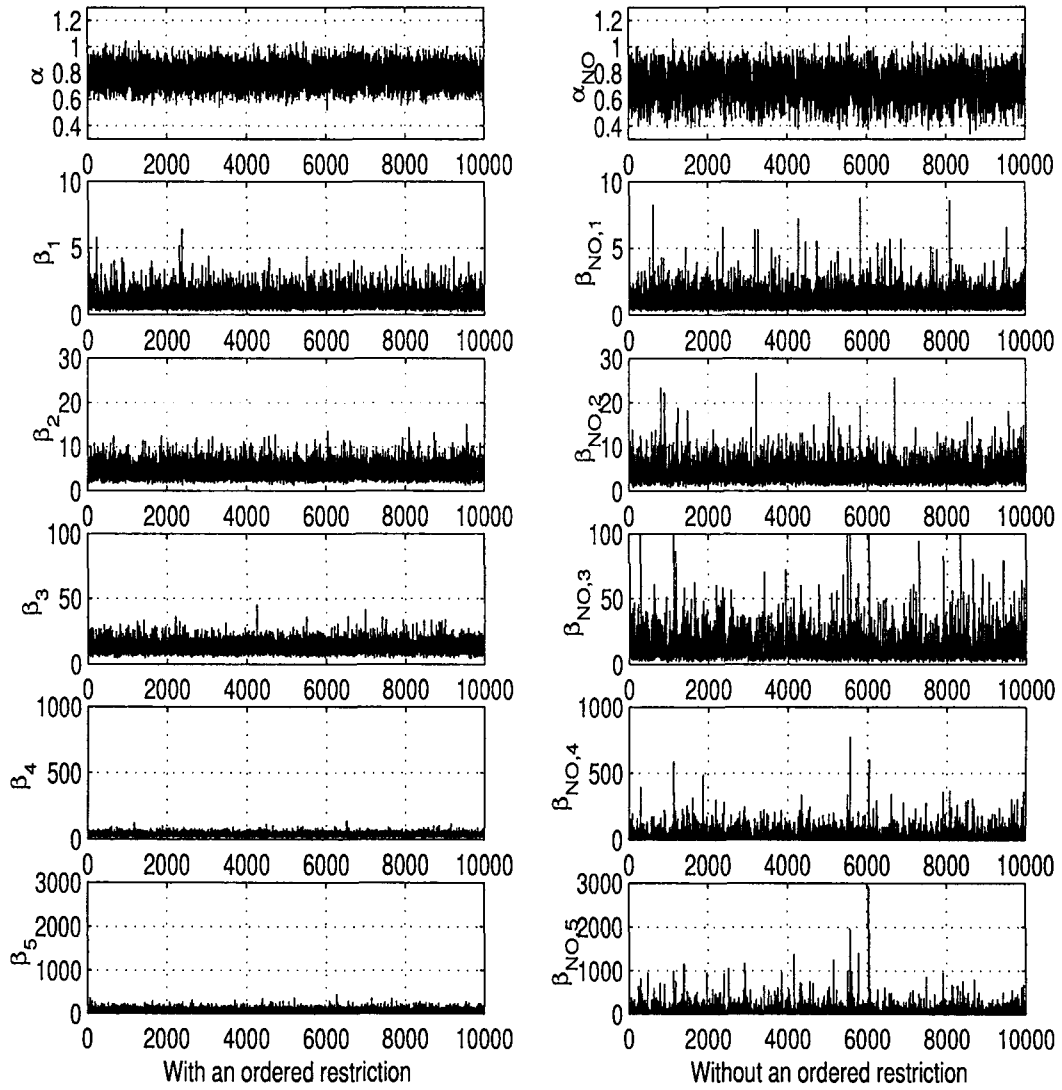


그림 4.1: 깃스샘플링 반복에 따라 생성된 각 모수값들

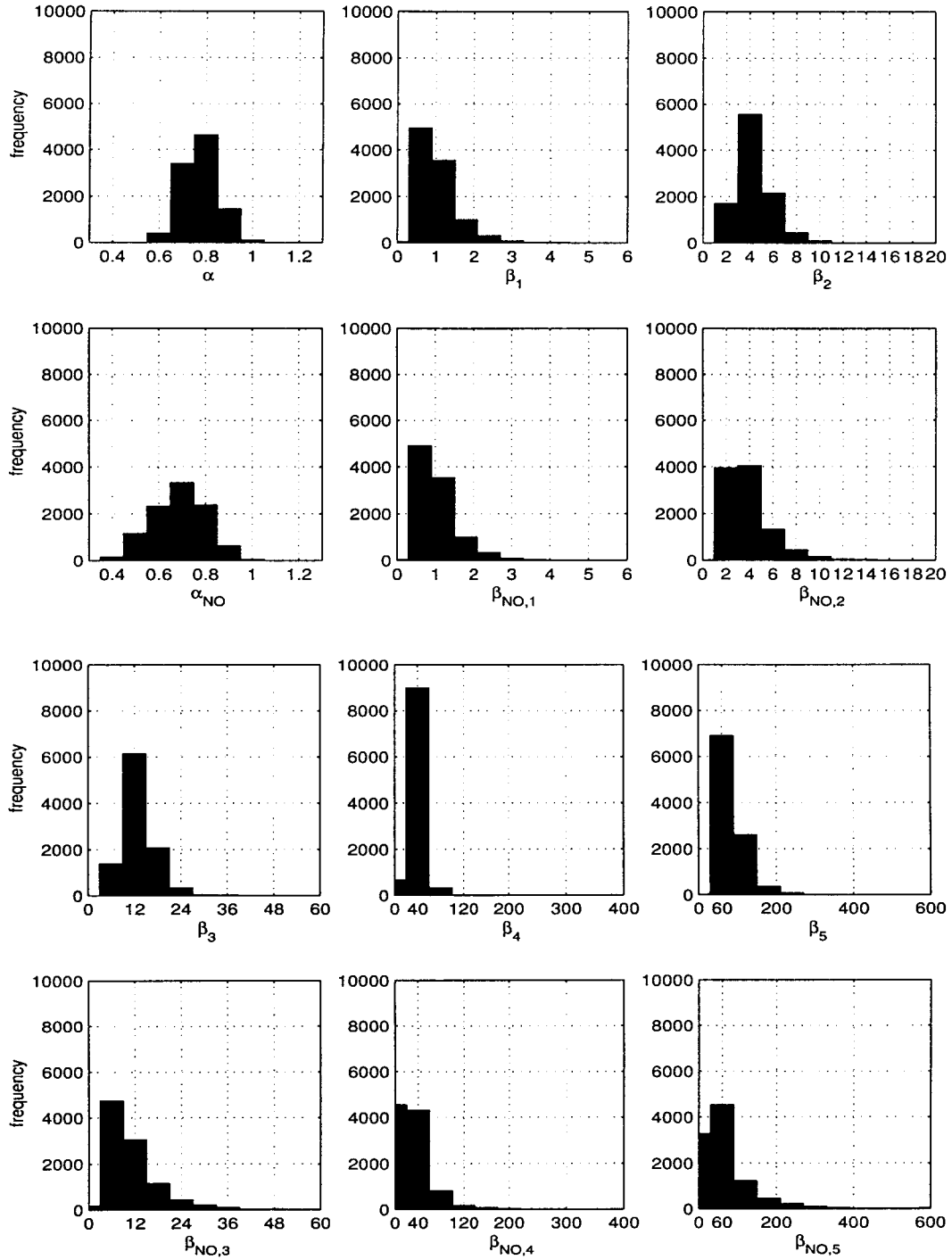


그림 4.2: 깃스샘플링에 의해 생성된 각 모수들의 사후분포

참고문헌

- [1] 정광모, 정윤식 (1996). 순서화 모수에 대한 베이저안 추정, <응용통계연구>, 제9권 1호, 153-164.
- [2] Devroye, L. (1986). *Non-Uniform Random Variate Generation*, New York: Springer-Verlag.
- [3] Gelfand, A. E., Smith, A. F. M., and Lee, T. M. (1992). Bayesian analysis of constrained parameter and truncated data problems using Gibbs sampling, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87, 523-532.
- [4] Geman, S. and Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian resoration of images, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*.
- [5] Gilks, W. R., Best, N. G. and Tan, K. K. C. (1995). Adaptive Rejection Metropolis Sampling within Gibbs Sampling, *Applied Statistics*, Vol. 44, No. 4, 455-472.
- [6] Gilks, W. R. and Wild, P. (1992). Adaptive Rejection Sampling for Gibbs Sampling, *Applied Statistics*, Vol. 41, No. 2, 337-348.
- [7] Molitor, J. and Sun, D. (2002). Bayesian analysis under ordered functions of parameters, *Environmental and Ecological Statistics*, Vol. 9, 179-193.
- [8] Nelson, W. B. (1970). Statistical methods for accelerated lifetest data-the inverse power law model, General Electric Co. Technical Report 71-C-011, Schenectady, New York.
- [9] Sun, D. and Ye, K. (1996). Frequentist validity of posterior quantiles for a two-parameter exponential family, *Biometrika*, Vol. 83, 55-65.
- [10] The MATH WORKS Inc. (1998). *MATHLAB/Statistics Toolbox*, Version 5.2, Natick, MA.

[2002년 10월 접수, 2003년 3월 채택]

Bayesian Estimation of k -Population Weibull Distribution Under Ordered Scale Parameters *

Young Sook Son ¹⁾ Seong W. Kim ²⁾

ABSTRACT

The problem of estimating the parameters of k -population Weibull distributions is discussed under the prior of ordered scale parameters. Parameters are estimated by the Gibbs sampling method. Since the conditional posterior distribution of the shape parameter in the Gibbs sampler is not log-concave, the shape parameter is generated by the adaptive rejection sampling. Finally, we applied this estimation methodology to the data discussed in Nelson (1970).

Keywords: k -population weibull distribution; ordered scale parameter; gibbs sampling adaptive rejection sampling.

* This research was supported by grant of the Hanyang University, 2003.

1) Professor, Department of Statistics, Chonnam National University.

E-mail : ysson@chonnam.chonnam.ac.kr

2) Assistant Professor, Division of Applied Mathematics, 1271 Sa 1-dong, Sangrok-gu, Ansan-si, Kyungki-do, 426-791, Korea.

E-mail : seong@hanyang.ac.kr