

종형 구조물의 맥놀이 지도 작성법과 성덕대왕신종의 맥놀이 지도 Beat Map Drawing Method of Bell Type Structures and Beat Maps of the King Seong-deok Divine Bell

김 석 현 †

Seock Hyun Kim

(2003년 5월 19일 접수 ; 2003년 7월 3일 심사완료)

Key Words : King Seong-deok Divine Bell(성덕대왕신종), Beat Map(맥놀이지도), Slightly Asymmetric Shell(미소 비대칭 셸), Mode Pair(모드쌍), Impulse Response Analysis(충격응답해석)

ABSTRACT

The beat distribution property of the King Seong-deok Divine Bell is investigated by experiment and analysis. The beat map method is proposed to explain the beat distribution property on the circumference of the bell. For the analytical investigation, an analytical model of the vibration beat is derived on a slightly asymmetric shell of revolution by using the modal expansion method. In the analytical method, the beat map can be drawn only if the modal parameters of the bell are obtained. The analytical beat model is applied to draw the beat map of the King Seong-deok Divine Bell. The validity of the analytical method is verified by comparing the analytical beat maps with the experimental results. This paper proposes a visualization method of the beat and theoretically identifies the reason why the clear and unclear beats repeat periodically along the circumference of the bell and how the striking position influences the beat distribution property.

1. 서 론

한국 최고의 범종으로 평가되는 성덕대왕 신종은 그 역사적 배경과 예술적 탁월성 및 우수한 소리로, 세계에 자랑할 만한 한국의 국보급 문화재이다. 최근 타종이 재개되면서 그 소리의 아름다움을 과학적으로 규명 하는데 많은 관심이 모아지고 있다. 한국 종의 소리는 타종 순간의 타격음과, 고 주파수 성분들이 사라진 후, 1차 및 2차 진동음의 저차 성분들이 중심이 되는 중간음, 그리고 맥놀이를 수반하는 1차 진동음의 긴 여운으로 이루어 진다.⁽¹⁾ 이와 같은 소리의 각 부분은 청중들에게 각기 색다른 느낌을 주게 되므로, 세 부분의 소리 특성은 모두 중요하다. 특히, 성

덕대왕신종의 경우, 고 주파수 성분들이 타격 후 10 초 이내에 사라지는데 비해서, 험(hum)으로 불리는 1차 진동음과, 기본음(fundamental)으로 불리는 2차 진동음은 오래 지속되면서 종 소리를 지배한다. 따라서, 이들의 맥놀이는 타격음 이후의 소리의 특성을 결정하는 중요한 요인이 된다. 맥놀이는 소리의 에너지에 변화를 주어, 종이 마치 살아 숨을 쉬는 것처럼 느껴지기도 하고, 포효하거나 곡을 하는 듯한 느낌을 주기도 한다.

맥놀이는 동.서양종에 보편적으로 존재 하는데 종형 구조물의 미세한 비대칭성에 의하여 발생하는 원주 모드쌍의 간섭이 그 원인이며, 타격 위치에 크게 영향을 받는다는 사실이 많은 연구를 통하여 과학적으로 규명되었다.⁽²⁻⁵⁾ 한국종에서는 주조 과정에서 불가피 하게 발생하는 질량 및 강성의 비대칭적 분포와, 표면의 문양 및 종 내부의 텅쇠 등이 비대칭의 원인이 된다. 따라서, 주조 후 이러한 비대칭성을 변경시

† 책임저자, 정회원, 강원대학교 기계메카트로닉스 공학부
E-mail : seock@kangwon.ac.kr
Tel : (033) 250-6372, Fax : (033)257-4190

키면 맥놀이의 주기나 선명도를 조정하는 것도 가능하다. 이에 관련하여, 내부의 적절한 지점을 제거하거나,⁽⁶⁾ 주조 후 열처리를 적용하는 실험적 방법이⁽⁷⁾ 보고되고 있다. 맥놀이에 관련된 흥미로운 현상으로, 최근 성덕대왕신종을 조사하는 과정에서 종 표면상의 위치에 따라 진동 파형이 크게 다르고, 발생하는 소리도 위치에 따라 다르게 들린다는 사실이 실험적으로 확인되었다.^(8,9) 그러나, 아직까지 이러한 현상이 어떠한 원인으로 발생하는지를 이론적으로 명확하게 다룬 연구는 보고된 바 없다. 진동 및 음향에 대하여 많은 연구가 이루어진 서양종의 경우, 맥놀이를 적당한 범위에서 제한시키는 연구가 주로 이루어 졌고,^(10,11) 종의 크기도 작아 소리의 방향성에 대한 관심이 적은 것으로 보인다. 그러나, 성덕대왕신종 같은 한국의 대형 종은, Fig. 1 및 Table 1에서 보는 바와 같이, 직경이 2m를 넘고 높이가 3m를 초과하는 거대한 음원이다. 위치에 따라, 주파수성분별 진동의 크기나 위상이 다르고, 듣는 위치에 따라 전혀 다른 소리를 느끼게 된다. 따라서, 맥놀이 특성을 평가할 때 그 측정 위치에 대한 고려를 하지 않으면, 잘못된 결과가 나올 수도 있다.

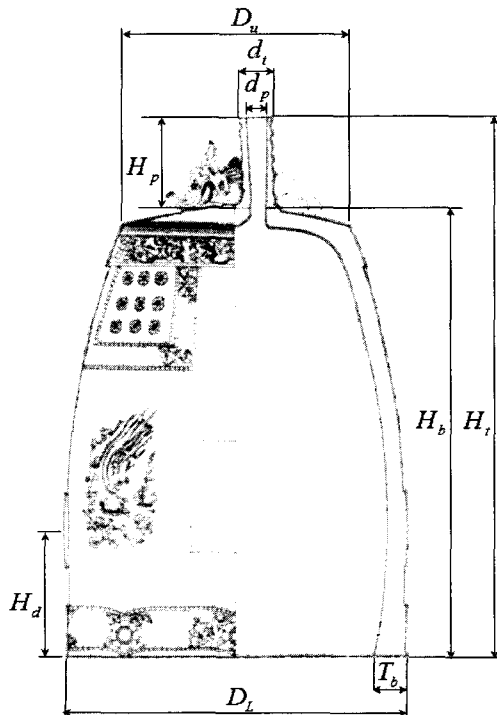


Fig. 1 Structure of the King Seong-Deok Divine Bell

위치에 따른 진동과 음향의 차이에 관련하여, 저자는 집중 질량을 갖는 미소 비대칭 링과 원통 셀을 대상으로 맥놀이 지도를 작성하고, 진동과 소리의 파형이 원주상 측정위치에 따라 모드별로 주기적으로 변하며, 그 분포특성은 타격 지점과 진동 모드쌍의 배치 관계에 따른다는 것을 이론적으로 규명한 바가 있다.^(12,13) 본 논문에서는 한국종을 미소 비대칭 회전 셀로 모델링한 후, 충격응답 해석을 통하여 맥놀이의 이론 모델을 유도한다. 이론모델을 사용하여 실제 범종의 맥놀이 지도를 작성하는 방법을 처음으로 제시하고, 성덕대왕신종에 적용하고자 한다. 한편, 이제까지의 연구에서, 타격 지점인 당좌의 위치가 맥놀이 응답에서 매우 중요한 것으로 되어있다. 즉, 당좌가 모드쌍의 절선배치와 어떠한 관계를 갖는가 하는 것이 맥놀이의 선명도와 분포특성을 결정한다. 본 연구에서는 맥놀이 지도를 사용하여 타격 지점을 변화시킬 때, 맥놀이의 분포 특성이 어떻게 달라지는가를 예측하여 현재의 상태와 비교한다. 종의 원주상에서 맥놀이 특성이 주기적으로 변하는 원인을 이론적으로 규명하고, 선명한 맥놀이가 나오는 지점을 쉽게 파악할 수 있도록 진동의 분포를 가시화 시키는 것이 본 논문의 핵심적인 내용이다.

2. 맥놀이 현상의 이론적 해석

2.1 축대칭 셀의 진동응답

중형 구조물의 운동의 이론 모델을 구하기 위하여, Fig. 2의 일반 회전 셀 구조의 충격 응답을 고려한다. 모드전개 이론에 근거하면, 이와 같은 선형 셀 구조

Table 1 Dimensions of the King Seong-deok Divine Bell parts dimensions(mm)

Parts	Dimensions(mm)
D_u	1,510
d_t	230
d_p	48
H_p	633
H_b	3,030
H_t	3,663
H_d	856
T_b	203
D_l	2,227

계의 일반적인 진동 응답은 다음의 모드 중첩으로 표시된다.⁽¹⁴⁾

$$u_i(\psi, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) U_{ik}(\psi, \theta), \quad (i=1,2,3) \quad (1)$$

여기서 ψ, θ 는 셸의 2차원 곡면 좌표이고, k 번째 모드함수 U_{ik} 에서, $i=1,2,3$ 은 Fig. 2에서 곡면에 접하는 u_1, u_2 성분과, 이들에 수직인 u_3 의 세 방향 성분을 표시한다. 모드기여함수 $\eta_k(t)$ 는 식 (1)이 다음의 Love 운동방정식을 만족시키는 조건으로부터 결정 된다.⁽¹⁵⁾

$$L_i \{u_1, u_2, u_3\} - \lambda \dot{u}_i - \rho h \ddot{u}_i = -q_i \quad (2)$$

여기서, L_i 는 Love의 셸 운동방정식의 미분 연산자이고, ρ 는 밀도, h 는 셸 두께, λ 는 점성감쇠계수, 그리고 q_i 는 면적당 작용력이다. 고유치해석에 따르면, 모드 함수는 다음 관계를 만족 시킨다.

$$L_i \{U_{1k}, U_{2k}, U_{3k}\} = -\rho h \omega_k^2 U_{ik} \quad (3)$$

식 (1)을 식 (2)에 대입하고, 식 (3)을 적용하면, 다음의 모드기여함수 방정식을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\rho h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho h \omega_k^2 \eta_k) U_{ik} = q_i \quad (4)$$

식 (4)에 모드 직교성을 이용하는 통상적인 비연성화 과정을 적용하면, 다음과 같이 비연성화 된 모드기여함수 방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{\eta}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = F_k(t) \quad (5)$$

여기서,

$$F_k(t) = \frac{\int_{\psi} \int_{\theta} (q_1 U_{1k} + q_2 U_{2k} + q_3 U_{3k}) A_{\psi} A_{\theta} d\psi d\theta}{\rho h N_k} \quad (6)$$

$$N_k = \int_{\psi} \int_{\theta} (U_{1k}^2 + U_{2k}^2 + U_{3k}^2) A_{\psi} A_{\theta} d\psi d\theta \quad (7)$$

$$\zeta_k = \lambda / 2\rho h \omega_k \quad (8)$$

A_{ψ}, A_{θ} 는 셸 곡면 형상에 의하여 결정되는 Lamé 변수이다. 정식화 과정에서 감쇠항은 모드감쇠비 ζ_k

를 사용하여 식 (4)를 비연성화 시키는 것으로 처리한다. 종에서와 같이 곡면에 수직방향의 타격력만이 작용하는 경우, $q_1 = q_2 = 0$ 이다. 또한, 소리는 셸 곡면에 수직인 방향의 운동에 지배된다. 따라서, 식 (1)의 모드 전개에서는 수직방향 성분이 지배적인 모드를 고려해도 충분하다. 이 경우, $|U_{3k}| \gg |U_{1k}|, |U_{2k}|$ 이므로, 식 (6)은 다음과 같이 간략화 된다.

$$F_k(t) = \frac{\int_{\psi} \int_{\theta} q_3 U_{3k} A_{\psi} A_{\theta} d\psi d\theta}{\rho h N_k} \quad (9)$$

$$N_k = \int_{\psi} \int_{\theta} U_{3k}^2 A_{\psi} A_{\theta} d\psi d\theta \quad (10)$$

2.2 미소 비대칭 셸의 모드쌍

이상의 정식화 과정에서 진동응답을 구하기 위해서는 셸 곡면에 수직인 방향의 모드 성분 U_{3k} 가 요구된다. 일반적으로 U_{1k}, U_{2k}, U_{3k} 는 서로 연성된 복잡한 관계를 가지나, Donnel-Mushtari-Vlasov의 셸 이론을 사용하면, 축대칭 단힌 셸의 수직방향 모드 함수를 다음의 형태로 표현할 수 있다.⁽¹⁶⁾

$$U_{3mn}(\psi, \theta) = H_{3mn}(\psi) \cos n(\theta - \theta_p) \quad (11)$$

이 모드는 원주상에서 $2n$ 개의 절점을 갖고, 수직 축을 따라서는 m 개의 절원(nodal circle)을 가지며, 그 고유진동수 ω_{mn} 은 이 모드함수가 경계조건을 만족시키는 조건으로부터 결정된다. 여기서, θ_p 는 축대칭성 때문에 주어지는 원주상 임의의 위상이다. 따라서, 강제진동 응답을 구하기 위해서는 다음과 같이 표시되는 직교 모드쌍을 필요로 한다.

$$U_{3m\gamma}(x, \theta) = H_{3mn}(\psi) \cos n(\theta - \phi_{\gamma}) \quad (12)$$

$$\phi_L = \theta_p, \phi_H = \theta_p + \pi / 2n \quad (13)$$

비대칭성이 매우 작을 경우, 식 (12)의 모드쌍은 동일한 고유진동수를 가질 것이나, 비대칭성이 조금이라도 존재하는 경우 두 모드의 고유진동수는 미세한 차이를 갖게 된다. 즉, 두 모드는 고유진동수쌍을 이루는데, 이후 이들의 고유진동수를 ω_{mnL} 과 ω_{mnH} 로 구분하고, 해당 모드를 $(m, n)_L$ 과 $(m, n)_H$ 로 표시한다. 여기서, 하첨자 L 은 약간 낮은 고유진동수를, H 는 높은 고유진동수를 표시한다. 미소 비대

칭성에 의한 모드쌍에 관련하여, Allaei와 Soedel⁽¹⁷⁾은 질량과 강성 비대칭성을 갖는 링을 대상으로, Hong과 Lee⁽¹⁸⁾는 작은 컷을 갖는 미소 비대칭링에 대하여, 그리고 Kim과 Soedel⁽¹⁹⁾은 집중 질량을 갖는 미소 비대칭 원통 셸을 대상으로 모드 특성을 구한 바 있다. 그 결과, 비대칭성이 매우 작은 경우, 원주모드는 식 (12)의 조화함수 형태에 매우 근사한 것으로 확인되었다. 본 연구에서는 식 (12)의 원주모드 위상을 성덕대왕신종의 모드 측정치를 사용하여 구한 후, 이 모드 함수가 모드 측정치에 얼마나 근사하는지를 별도의 과정을 통하여 검증한다.

2.3 충격응답모델

식 (1)에서 음을 방사하는 수직 방향 모드 성분만을 고려하면, 진동응답은 다음과 같이 표시된다.

$$u_3(\psi, \theta, t) = \sum_m \sum_n \sum_\gamma \eta_{mny}(t) U_{3mny}(\psi, \theta) \quad (14)$$

타종을 고려한 충격응답 모델을 구하기 위하여, Fig. 2에서와 같이, 점 충격량(point impulse)을 작용시킨다. 이 경우 면적당 하중함수는 다음과 같이 디랙델타함수(Dirac's delta function)를 사용하여 표시 가능하다.⁽¹⁶⁾

$$q_3 = \frac{\hat{F}}{A_\psi A_\theta} \delta(\psi - \psi^*) \delta(\theta - \theta^*) \delta(t) \quad (15)$$

여기서, \hat{F} 는 Fig. 2에서와 같이, 충격 지점 (ψ^*, θ^*) 에서 곡면에 수직 외향으로 작용하는 충격량의 크기이다. 식 (12)와 식 (15)를 식 (9)와 식 (10)

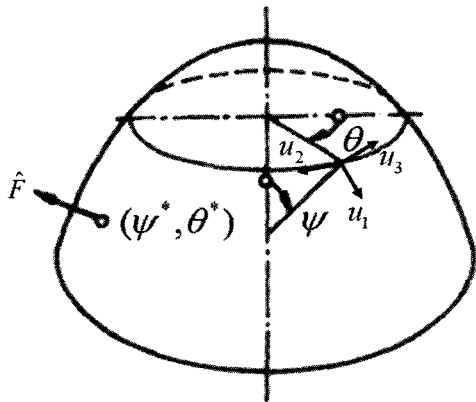


Fig. 2 A shell of revolution under the point impulse

에 대입하면, 식 (5)의 모드기여함수 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\ddot{\eta}_{mny} + 2\zeta_{mny}\omega_{mny}\dot{\eta}_{mny} + \omega_{mny}^2\eta_{mny} = F_{mny}(t) \quad (16)$$

$$F_{mny}(t) = \hat{F}H_{3mn}(\psi^*)\cos n(\theta^* - \phi_\gamma)\delta(t)/\rho h N_{mn} \quad (17)$$

$$N_{mn} = \pi \int_0^L H_{3mn}^2(\psi) A_\psi A_\theta d\psi \quad (18)$$

식 (16)을 라플라스변환 시키고 영의 초기 조건을 적용하면, 다음의 모드기여함수를 얻는다.

$$\eta_{mny}(t) = \frac{\hat{F}H_{3mn}(\psi^*)\cos n(\theta^* - \phi_\gamma)}{\omega_{mny}\rho h N_{mn}} \times e^{-\zeta_{mny}\omega_{mny}t} \sin(\omega_{mny}t) \quad (19)$$

식 (19)를 식 (14)에 대입하고, 식 (12)의 모드 쌍을 적용하면 다음과 같이 충격에 대한 응답을 구할 수 있다.

$$u_3(\psi, \theta, t) = \sum_m \sum_n \sum_\gamma \frac{\hat{F}H_{3mn}(\psi^*)H_{3mn}(\psi)\cos n(\theta^* - \phi_\gamma)\cos n(\theta - \phi_\gamma)}{\omega_{mny}\rho h N_{mn}} \times e^{-\zeta_{mny}\omega_{mny}t} \sin(\omega_{mny}t) \quad (20)$$

모드감쇠비 ζ_{mny} 가 매우 작은 경우, 속도와 가속도 응답은 다음과 같이 구해진다.

$$\dot{u}_3(\psi, \theta, t) = \sum_m \sum_n \sum_\gamma \frac{\hat{F}H_{3mn}(\psi^*)H_{3mn}(\psi)\cos n(\theta^* - \phi_\gamma)\cos n(\theta - \phi_\gamma)}{\rho h N_{mn}} \times e^{-\zeta_{mny}\omega_{mny}t} \cos(\omega_{mny}t) \quad (21)$$

$$\ddot{u}_3(\psi, \theta, t) = -\sum_m \sum_n \sum_\gamma \frac{\omega_{mny}\hat{F}H_{3mn}(\psi^*)H_{3mn}(\psi)\cos n(\theta^* - \phi_\gamma)\cos n(\theta - \phi_\gamma)}{\rho h N_{mn}} \times e^{-\zeta_{mny}\omega_{mny}t} \sin(\omega_{mny}t) \quad (22)$$

2.4 모드쌍 맥놀이 응답 모델

식 (22)에서 고유진동수쌍 ω_{mny} ($\gamma=L, H$)가 서로 근접한 고유진동수를 가질 때, $(m, n)_L$, $(m, n)_H$ 모드쌍은 맥놀이를 발생시킬 것이다. 특정 모드의 맥놀이 응답은 식 (22)에서 (m, n) 모드항만을 추출함으로써 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\ddot{u}_{3mn}(\psi, \theta, t) = -\frac{\omega_{mn} \hat{F} H_{3mn}(\psi^*) H_{3mn}(\psi)}{\rho h N_{mn}} \times e^{-\zeta_{mna} \omega_{mna} t} [\cos n(\theta^* - \phi_L) \cos n(\theta - \phi_L) \sin(\omega_{mnl} t) + \cos n(\theta^* - \phi_H) \cos n(\theta - \phi_H) \sin(\omega_{mnh} t)] \quad (23)$$

여기서, (m, n) 모드의 주파수쌍과 감쇠비쌍에 대해서는 다음의 평균치를 사용한다.

$$\omega_{mna} = (\omega_{mnl} + \omega_{mnh}) / 2 \quad (24)$$

$$\zeta_{mna} = (\zeta_{mnl} + \zeta_{mnh}) / 2 \quad (25)$$

타격점 높이에서의 원주상 가속도 응답은 $\psi = \psi^*$ 를 대입하여 다음과 같이 구한다.

$$\ddot{u}_{3mn}(\psi^*, \theta, t) = -C_{mn} e^{-\zeta_{mna} \omega_{mna} t} \times [\cos n(\theta^* - \phi_L) \cos n(\theta - \phi_L) \sin(\omega_{mnl} t) + \cos n(\theta^* - \phi_H) \cos n(\theta - \phi_H) \sin(\omega_{mnh} t)] \quad (26)$$

$$C_{mn} = \frac{\omega_{mna} \hat{F} H_{3mn}^2(\psi^*)}{\rho h N_{mn}} \quad (27)$$

$-C_{mn}$ 은 모드별로 일정한 값으로 주어지는 상수항이므로 1로 처리한다. 식 (26)은 모드별 맥놀이 파형을 이론적으로 구하는 근거가 된다. 이를 사용하여 맥놀이 지도를 작성하면, 원주상 위치에 따른 맥놀이의 변화를 모드별로 파악할 수가 있다.

3. 성덕대왕신종의 맥놀이 지도 작성법

3.1 맥놀이 지도 작성 이론

종의 원주상 맥놀이의 변화를 쉽게 파악하는 방법으로 맥놀이 지도를 제시한다. 맥놀이 지도는 원주상 각 지점에서 진동모드별 맥놀이 파형을 방사형으로 배열시킨 그림을 의미한다. 진동의 분포는 종 주변 소리의 파형분포를 결정하므로, (8) 진동의 맥놀이 지도를 이용하면, 듣는 위치에 따른 소리의 차이를 설명할 수 있고, 좋은 맥놀이가 나오는 위치를 찾아낼 수도 있다. 실험으로 맥놀이 지도를 얻기 위해서는 많은 지점에서 진동이나, 음향 파형을 측정 한 후, 주파수 성분별로 필터링하여야 하는 번거로운 작업이 요구된다. 여기서는 식 (26)에 종의 모드정보를 적용하여 맥놀이 지도를 그리는 방법을 제시한다. 모드 측정 데이터로부터, 위상각 ϕ_L 과 ϕ_H , 고유진동수 및

감쇠비 쌍을 구한 후, 이론식 (26)을 사용하여 실제에 근사한 진동파형을 그려낼 수 있다. 여기서 사용하는 원주상 모드 측정치는 전보의 연구결과(9)를 사용한다. 한편, 모드함수 $H_{3mn}(\psi)$ 는 종 높이에 따른 형상과, 모델링이 어려운 경계조건에 지배되므로, 이론적으로 결정하기가 어렵다. 그러나, 다행스럽게도 한국종에서는 1차 진동음과 2차 진동음을 내는 (0,2)와 (0,3) 모드가 종 높이상에서 위상 변화가 없는 매우 단조로운 형상을 갖는다. 성덕대왕신종의 경우도 하대 부분에서 변위가 크고 위로 올라가면서 변위가 작아지는 비교적 단순한 형상을 보이는 것으로 측정을 통하여 밝혀졌다.(20) 따라서, 이 함수를 미지로 두더라도 종 높이상에서의 맥놀이 변화를 평가하는데 큰 어려움은 없다. 결론적으로, 식 (12)의 원주모드 함수가 측정치에 매우 가깝다면, 식 (26)으로 그린 원주상 맥놀이 지도는 실제에 근접하게 될 것이다.

3.2 맥놀이 지도용 데이터의 결정

식 (26)으로 원주상 맥놀이 분포특성을 구할 때, 가장 중요한 인자는 위상 ϕ_L, ϕ_H 이다. 이 위상각과 타격위치 θ^* , 그리고 측정위치 θ 사이의 관계에 의하여 L, H 주파수성분의 상대적인 크기가 지배되고, 그결과 맥놀이의 선명도가 결정되기 때문이다. 이전의 실험적 연구(8)에서 성덕대왕신종의 1차 및 2차 진동음의 원주상 진동모드는 Fig. 3 및 Fig. 4에서와 같이, 조화함수의 형태를 갖는 것으로 밝혀졌다. 원주상 24개 위치에서 측정 한 모드별 가속도 데이터로 다

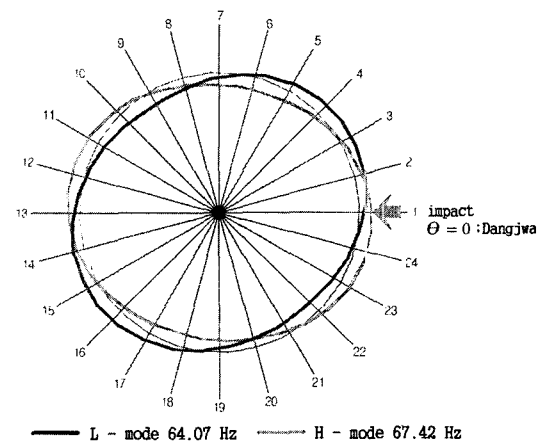


Fig. 3 Measured (0,2) mode pair of the King Seong-deok Divine Bell on the circumference (top view)(8)

음의 최소오차자승법⁽²¹⁾을 수행하면 모드쌍의 위상각을 구할 수 있다. 가속도 측정치와 이론 모드함수 사이의 자승 오차를 다음과 같이 정의한다.

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{24} [p_j - A \cos n(\theta_j - \phi_\gamma)]^2 \quad (n=2,3), (\gamma=L,H) \quad (28)$$

여기서, p_j 는 가속도 측정값이고 A 는 모드별 크기를 의미한다. 다음과 같이, 각 모드별로 모드 함수와 측정치 사이의 자승오차를 최소화 시키는 조건을 적용한다.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi_\gamma} = 0 \quad (\gamma=L,H) \quad (29,30)$$

식 (29), (30)으로부터, 위상각 ϕ_γ 에 대한 다음의 조건식을 얻을 수가 있다.

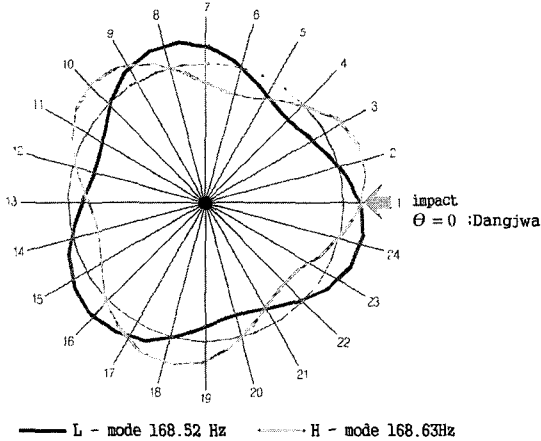


Fig. 4 Measured (0,3) mode pair of the King Seong-deok Divine Bell on the circumference (top view)⁽⁸⁾

Table 2 Modal parameters of the King Seong-deok Divine Bell

Parameters	(0,2) mode	(0,3) mode
ϕ_L	0.642 rad	-0.267 rad
ϕ_H	-0.143 rad	0.276 rad
ω_{mnL}	402.56 rad/s	1058.84 rad/s
ω_{mnH}	404.76 rad/s	1059.53 rad/s
ζ_{mna}	0.00013	0.00030

$$\frac{\sum p_j \cos n(\theta_j - \phi_\gamma)}{\sum p_j \sin n(\theta_j - \phi_\gamma)} - \frac{\sum \cos^2 n(\theta_j - \phi_\gamma)}{\sum \sin n(\theta_j - \phi_\gamma) \cos n(\theta_j - \phi_\gamma)} = 0 \quad (n=2,3 \text{ and } \gamma=L,H) \quad (31)$$

Matlab⁽²²⁾을 사용하여 모드별로 위상값을 구한 결과를 Table 2에 보인다. Table 2에서 고유 진동수쌍은 이전의 실험에서 구해진 1차 및 2차 진동수 주파수 값이고,⁽⁹⁾ 감쇠비는 모드별로 대수감소법(logarithmic decrement method)을 사용하여 구한 값이다.⁽¹⁴⁾ 각 모드의 절점에서 측정된 신호를 사용함으로써, L, H 모드의 주파수 성분을 분리시켜 추출한 후, 각각의 신호로부터 모드 감쇠비를 추정할 수 있었다. 1,2차 진동수 모두에서, L, H 모드쌍의 감쇠비는 거의 동일한 값으로 나왔으며, 따라서 식 (25)의 평균치를 사용하는데 문제가 없었다.

3.3 모드함수의 평가

전술한 바와같이, 식 (12)의 조화함수로 표현된 모드쌍이 측정치에 얼마나 근접하는 지가 맥놀이지도 작성에서 매우 중요하다. 그 근접도를 다음의 모드상관함수(modal assurance criteria)⁽²³⁾를 사용하여 평가한다.

$$MAC(\{p_E\}, \{p_A\}) = \frac{[\{p_E\}^T \{p_A\}]^2}{(\{p_E\}^T \{p_E\})(\{p_A\}^T \{p_A\})} \quad (32)$$

여기서, $\{p_E\}$ 는 원주상 24개 지점에서의 가속도 측정치로 구성된 모드 벡터이고, $\{p_A\}$ 는 이론 모드함수 $\cos n(\theta - \phi_\gamma)$ 를 사용하여 동일하게 구성된 모드 벡터이다. Fig. 5는 (0,2)와 (0,3) 모드벡터 사이의

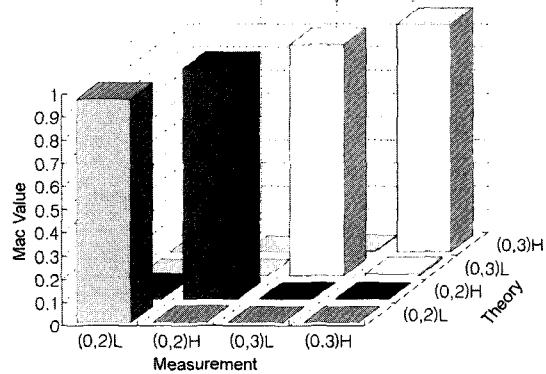


Fig. 5 MAC values of the circumferential modes

모드상관 함수 계산치를 보인다. 계산 결과, 동일한 모드 사이에서는 0.96이상, 이종의 모드 사이에서는 0.04이내로 나왔다. 이러한 결과는 성덕대왕 신종의 1, 2차 진동 모드의 원주상 형상을 $\cos n(\theta - \phi_r)$ 형태의 조화 함수로 모델링 하는데 현실적으로 큰 문제가 없음을 뒷받침한다.

4. 성덕대왕신종의 맥놀이 지도

4.1 1차 진동음의 맥놀이 지도

타종후 발생하는 1차 진동음 성분이 위치에 따라 어떻게 다른지를 Fig. 6에 보인다. 그림에서 측정된 파형과 이론식으로 형성시킨 진동파형을 비교한다. 측정파형은 타격력을 가능한 일정하게 유지하면서 얻은 가속도 신호로부터 1차 진동음 성분만을 필터링(62 Hz~66 Hz digital filtering)한 결과이고, 해석결과는 식 (26)에서 (0,2) 모드만을 고려하여 구한 가속도 파형이다. 1번 지점을 타격위치로 하므로, 이론식에서 $\theta^* = 0$ 으로 하였다. Fig. 6에서 측정결과와 이론결과는 파의 시작점을 제외하고는 거의 일치하는데, 이는 모드쌍의 위상정보와 주파수쌍 및 모드감쇠치가 적절히 구해졌음을 반증한다. 1번 지점에서 파의 진폭은 크나 맥놀이는 선명하지 못한 반면, 4번 위치에서는 진폭은 작으나 맥놀이가 선명하다.

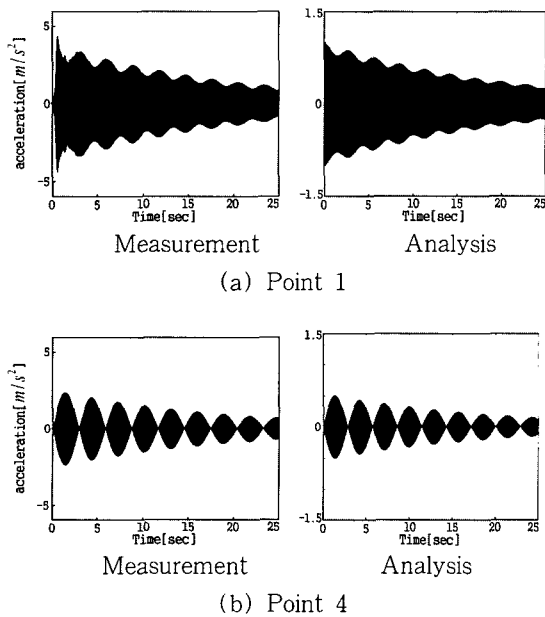


Fig. 6 Comparison of the beats of (0,2) mode

이론상, 맥놀이는 두 주파수성분의 크기가 대등할 때 선명하고, 어느 한쪽이 커지면 선명하지 못하게 된다. 당좌(1번 지점)를 타격할 때, Fig. 3에서와 같이, 모드 (0,2)_H는 잘 가진된다. 동시에 1번 지점은 이 모드의 응답도 큰 지점이다. 따라서, 1번 지점에서 ω_{02H} 주파수성분은 큰 파워를 가지고 발생한다. 반면, (0,2)_L 모드는 이 지점의 가진과 응답이 모두 작으므로, ω_{02H} 성분은 ω_{02H} 에 비하여 상대적으로 약하게 발생하고 그 결과 맥놀이가 잘 보이지 않게 된다. 한편, 4번 측정 지점에서는 모드 (0,2)_L의 응답이 (0,2)_H 보다 상대적으로 크다. 이는 (0,2)_L을 작게 가진하는 타격조건과 상쇄되어, 4번 지점에서 두 주파수성분은 비슷한 크기로 발생하고 이들의 간섭은 선명한 맥놀이를 만든다. 이러한 해석은 식 (26)에 가진 위치와 측정 위치를 적용하여, ω_{mL} , ω_{mH} 두 주파수성분의 크기를 비교해 봄으로써 가능하다. 결국, 맥놀이 응답의 분포는 L, H 모드쌍의 배치와 타격 위치라는 두가지 요인에 지배되는 것을 알 수 있다. 그런데, 모드쌍의 배와 절점은 원주상에서 주기적으로 분포하므로, 선명한 맥놀이도 역시 주기적으로 분포하게 된다. 또한, 큰 진폭의 진동이 원주상에서 주기적으로 나타나는 것은, 타종시 응력이 크게 발생하는 부분이 주기적으로 분포 한다는 것을 의미하는데, 이는 종 구조의 피로 측면에서의 흥미로운 연구과제가 될 수 있을 것이다.

1차 진동음의 맥놀이 지도를 작성하기 위하여, 원주상 24개 지점에서 타격 직후 10초 길이의 파형을 추출한 후, 해당 위치에 방사형으로 배열하였다. Fig. 7은 이론 모델을 사용한 맥놀이 지도와 측정에 의한 맥놀이 지도를 보인다. 선명한 맥놀이가 원주상에서 주기적으로 분포하는 것이 두 결과에서 일치한다. 전, 후 당좌 부근(24, 1번 지점 및 12, 13번 지점), 그리고 이들과 수직인 위치(6, 7번 지점 및 18, 19번 지점)에서는 진동은 크나 맥놀이가 선명하지 못하다. 그 결과 소리는 크게 나오나 맥놀이는 선명하지 않다. 반대로 이들의 중간 지점(3, 4, 9, 10, 15, 16, 21, 22)에서 진폭은 작으나, 매우 선명한 맥놀이가 발생한다. 이러한 현상은 1차 진동음의 여운에서 선명한 맥놀이를 듣거나 기록하기 위해서는 특정한 위치가 선택되어야 함을 의미한다. 이러한 맥놀이의 분포 특성에서, Fig. 7은 이론에 의한 맥놀이 지도와 측정에 의한 맥놀이 지도가 거의 일치함을 보인다. 이는 범종의 모드쌍의

배치에 관한 정확한 정보만 확보된다면, 식 (26)의 맥놀이 이론 모델을 사용하여 맥놀이 지도를 그릴 수 있고, 맥놀이의 원주상 분포특성을 충분히 설명할 수 있음을 의미한다.

4.2 2차 진동음의 맥놀이 지도

성덕대왕신종에서 (0,3) 모드가 내는 2차 진동음(168 Hz)은 1차 진동음(64 Hz) 보다 훨씬 높은 주파수를 가지므로, 청명한 소리로 신종의 우수성을 높이는 데 중요한 역할을 한다. 타격 후, 신종의 소리가 약 20초 동안 '우~웅' 하면서 커졌다 작아지다 다시 살아나는 힘찬 느낌을 주는 것은 바로 2차 진동음의 효

과이다. 이 음은 듣는 위치에 따라, 또 시간에 따라 음향에너지의 변화를 보이면서, 청중들에게 다양한 느낌을 준다. 2차 진동음의 파형의 차이를 Fig. 8에 보인다. 1번 및 3번 지점에서는 맥놀이를 볼 수 있으나, 2번에서는 맥놀이가 전혀 발생하지 않는다. 또한, 1번 지점에서는 크게 발생한 진동이 감쇠되어 가다가 약하게 다시 한번 살아나고, 3번 지점에서는 점차 강해지다 감쇠되는 1회의 선명한 맥놀이를 보인다. 2차 진동음을 내는 (0,3) 모드는 1차 진동음의 (0,2) 모드에 비해서 감쇠가 크고 맥놀이의 주기도 9초 정도로 긴 결과, 이와 같이 1~2회의 맥놀이만을 내고 사라진다. 이러한 모든 특징은 이론에 의한 파형과 측정파형에서 거의 일치한다. 타종 후 약 20초 동안, 종이 포효하는 것 같기도 하고, 곡을 하는 것 같기도 하다는 세간의 표현은 위치에 따라 다르게 분포하는 2차 진동파의 존재에서 그 원인을 찾을 수 있을 것이

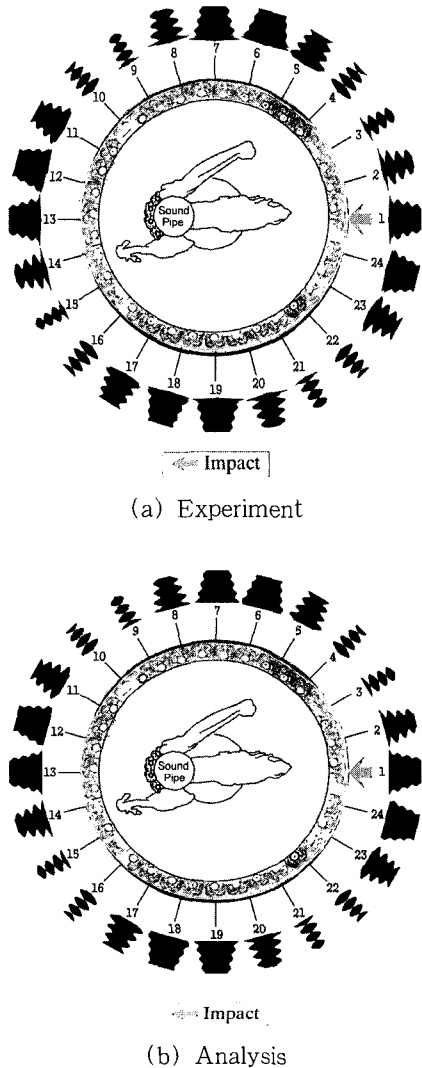


Fig. 7 Comparison of beat maps of (0,2) mode (top view)

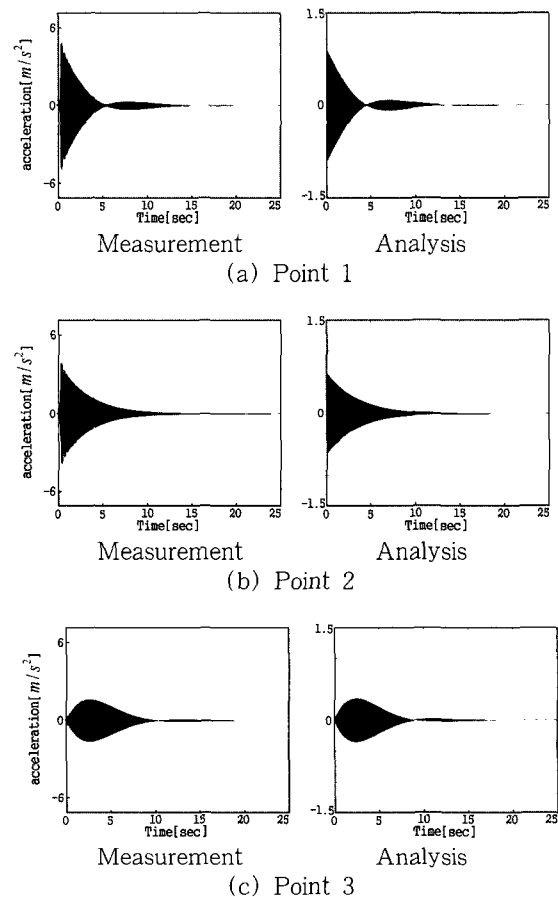
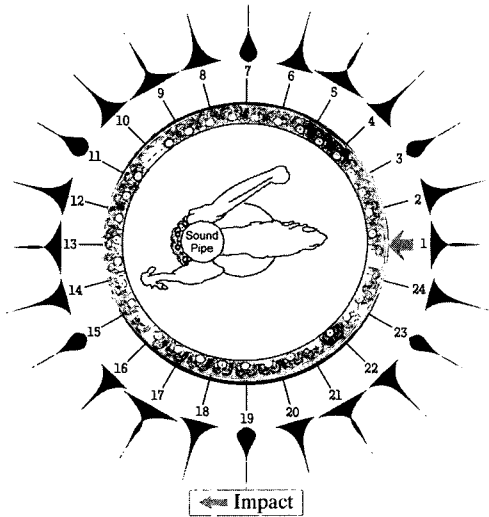


Fig. 8 Comparison of beats in vibration of (0,3) mode

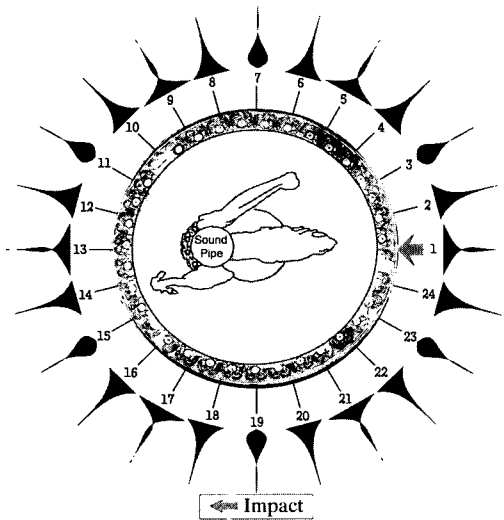
다. Fig. 9는 실험과 이론에 의한 2차 진동음의 맥놀이 지도를 비교한다. 측정과정은 타종 신호로부터 2차 진동음 성분만을 디지털 필터링(165 Hz~175 Hz)한 후, 타격 직후 20초 길이를 추출한 것이며, 이론과정은 식 (26)에서 1차 진동 모드와 동일한 방법으로 얻었다. 2차 진동음에서도 이론에 의한 맥놀이지도는 측정 결과와 거의 동일한 분포특성을 보인다. Fig. 4에서 보듯이, 2차 진동음에서는 당좌가 (0,3)_L, (0,3)_H 모드쌍 절점의 중앙에 위치하므로, 두 모드는 대등하게 가진된다. 그 결과, 두 모드가 동일한 크기

로 응답하는 위치(1, 3, 5, 7, ...)에서 선명한 맥놀이가 발생한다.

이러한 지점에서 식 (26)의 ω_{03L} , ω_{03H} 성분은 대등한 크기를 갖기 때문이다. Fig. 9에서 2차 진동음의 선명한 맥놀이는 원주상에서 $\pi/6$ 의 주기로 반복된다. 이 주기는 (0,3) 모드쌍이 대등하게 발생하는 지점이 원주상에서 반복되는 주기를 의미한다. 따라서, (m, n) 모드쌍을 동일하게 가진하는 타격 조건하에서, (m, n) 모드의 가장 선명한 맥놀이가 발생되고, 선명한 맥놀이의 원주상 분포 주기는 $\pi/2n$ 가 될 것



(a) Experiment



(b) Analysis

Fig. 9 Comparison of beat maps of the (0,3) mode

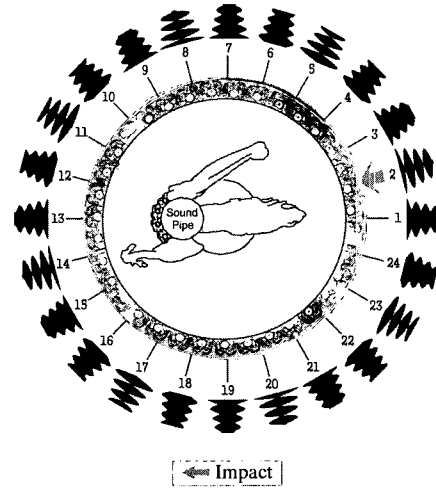


Fig. 10 Beat map of (0,2) mode under the striking at point 2 (top view)

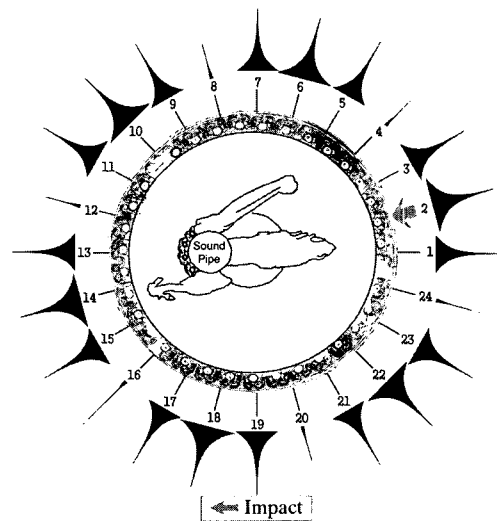


Fig. 11 Beat map of (0,3) mode under the striking at point 2 (top view)

임을 예상할 수 있다.

5. 당좌 위치의 영향

당좌로 불리는 한국종의 타격지점은, 종 높이상에서는 타격중심 부근에 위치하여 상부 지지점에서의 반력을 최소화시킨다. 정밀 측정자료를 근거로 신종의 타격 중심을 계산할 때, 현당좌와 타격 중심 계산치는 종 높이 대비 6% 정도의 차이밖에 보이지 않는다는 사실이 밝혀진 바 있다.⁽²⁴⁾ 당좌는, 약간 두꺼운 원형의 문양으로 만들어, 반복되는 타격에 유리하도록 설계되어 있다. 한편, 맥놀이 측면에서는 최대한 선명한 맥놀이를 내는 타격 지점이 선호되는데, 이를 위해서 중요한 진동음의 모드쌍을 대등하게 가진하는 원주상 지점에 당좌가 위치해야 한다. 흥미로운 점은 현재의 당좌는 1차 진동음 모드쌍을 대등하게 가진할 수 있는 위치에 있지 않다는 점이다. 이론상, Fig. 3의 2번 부근(당좌중심 우측 30cm 지점)을 가진하는 것이 가장 선명한 1차 진동음의 맥놀이를 낼 수 있을 것이다. 이 경우의 맥놀이지도를 이론 모델을 사용하여 그릴 수가 있다. Fig. 10에서, 2번 타격위치로부터 $\pi/4$ 의 간격으로(2, 5, 8, 11, ... 지점) 큰 진폭의 선명한 맥놀이가 반복되는 것을 볼 수 있다. Fig. 7과 비교할 때, 현재보다 더욱 선명하고 강한 1차 진동음의 맥놀이가 많은 위치에서 발생하는 것이 흥미롭다. 또한, 선명한 맥놀이가 나오는 위치도 변화한다. 결국, 1차 진동음만을 고려한다면 2번 지점이나 그와 동일한 조건의 위치 (5, 8, 11, 14, 17, 20, 23번 지점)를 타격하는 것이 현재의 당좌를 타격하는 것보다 선명하고 강한 맥놀이를 내게 될 것이다. Fig. 9와 Fig. 10을 보면, 모드쌍을 대등하게 가진할 때, (m, n) 모드의 선명한 맥놀이는 원주상에서 $\pi/2n$ 의 주기로 분포한다는 것을 다시 한번 확인할 수 있다.

다음에는 2번 지점 타격시, 2차 진동음의 맥놀이가 어떻게 나오는지 Fig. 11의 맥놀이지도에서 살펴본다.

예상되는 결과이지만, 2차 진동음의 맥놀이는 어디에서도 발생하지 않는다. Fig. 4의 2번 지점이 $(0,3)_L$ 모드의 절점상에 오므로, ω_{03L} 의 주파수성분이 발생하지 못하는데 그 원인이 있다. 또한, 이 경우 168 Hz의 2차 진동음 성분은 $(0,3)_H$ 모드만의 진동에 의하여 발생되므로, 그 절점부근에 위치하는 지점(4, 8, 12,

16, 20, 24번)에서는 168 Hz 성분의 진동이 발생하지 않는다. 이러한 결과는 1차 진동음보다 훨씬 잘 들리는 2차 진동음이 매우 단조롭게 감소할 것임을 의미한다.

결과적으로, 2번 위치를 타격할 때, 1차 진동음에 의한 여운에서는 현재보다 선명하고 큰 맥놀이를 들을 수 있겠으나, 타격 이후 20초 동안 나오는 청명하면서도 힘찬 2차 진동음의 맥놀이는 들을 수 없게 될 것이다. 이와 같이 맥놀이지도를 사용하여 당좌의 위치 효과를 검토할 때, 성덕대왕신종의 당좌는 2차 진동음의 맥놀이면에서 원주상 최적의 지점에 위치하며, 그 결과 1차 진동음의 장중함에 더하여 맑고 힘찬 2차 진동음의 맥놀이를 함께 들을 수 있도록 한다.

6. 결 론

미소 비대칭셀의 충격응답함수를 사용하여 중형구조물 맥놀이의 이론모델을 구하였다. 이에 근거하여 실제 범종의 맥놀이지도 작성하는 방법을 제시하였다. 성덕대왕 신종의 맥놀이지도 작성을 위하여 사용한 이론 모드함수와 측정된 모드 사이의 상관도는 매우 높은 것으로 확인되었다. 그 결과, 이론모델을 사용한 맥놀이지도는 실측에 의한 맥놀이지도에 매우 가깝게 나왔다. 선명하고, 선명하지 않은 맥놀이 파형이 원주상에서 주기적 발생하고, 그 분포특성은 진동 모드 별로 다르며, 타격 위치와 모드쌍의 배치관계에 의하여 결정된다는 사실이 처음으로 확인되었다.

성덕대왕신종의 맥놀이지도를 사용하여, 가장 중요한 1차 및 2차 진동음의 발생기전을 과학적으로 규명하고, 1, 2차 진동음에서 선명한 맥놀이가 나오는 위치를 찾아내었다. 맥놀이 지도로부터, 현재의 당좌(타격지점)는 1차 진동음 보다는 2차 진동음의 맥놀이를 매우 선명하게 발생 시키는 위치에 있다는 사실이 밝혀졌다. 본 연구에서 제시된 맥놀이지도 작성법은 일반적인 중형 구조물의 맥놀이지도 그리기 방법으로, 다른 범종의 진동 및 소리의 평가에도 그대로 적용될 수 있을 것이다.

후 기

성덕대왕신종의 측정에 협조해 주신 국립 경주박물관측에 감사드린다. 또한 논문의 그래픽작업을 도와

준 강원대 박석균 석사 과정에게도 고마움을 표한다.

참 고 문 헌

- (1) 염영하, 1984, "한국종의 연구," 한국정신문화연구원 연구논총 84 -14.
- (2) Charnley, T. and Perrin, R., 1978, "Studies with an Eccentric Bell," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 58, No. 4, pp. 517~525.
- (3) Rossing, T. D., 1987, "Vibration of Bells," *Applied Acoustics*, Vol. 20, pp. 41~70.
- (4) 이장무, 전성하, 김석현, 염영하, 1989, "한국종의 진동특성에 관한 연구(I)," *대한기계학회지*, 제 13 권, 제 3 호, pp. 397~403.
- (5) Cheng, J. and Lan, C., 2003, "Experimental Studies on Sound and Vibration of a Two-tone Chinese Peace Bell," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 261, pp. 351~358.
- (6) Lee, J. M., Kim, S. H., Lee, S. J., Jeong, J. D. and Choi, H. G., 2002, "A Study on the Vibration Characteristics of a Large Size Korean Bell," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, pp. 779~790.
- (7) Perrin, R., Swallowe, G. M., Charnley, T. and Marshall, C., 1999, "On the Debossing, Annealing and Mounting of Bells," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 227, pp. 409~425.
- (8) 김석현, 2002, "성덕대왕신종의 진동 및 음향 특성 분석," 경주박물관 학술조사보고서, 국립경주박물관.
- (9) 김석현, 김정현, 정지덕, 이장무, 2002, "성덕대왕 신종의 진동 및 음향특성," 한국소음진동공학회논문집, 제 12 권, 제 7 호, pp. 534~541.
- (10) Rossing, T. D., 1989, "Acoustics of Eastern and Western Bells, Old and New," *Journal of Acoustical Society of Japan*, Vol. 10, pp. 241~252.
- (11) Perrin, R., Charnley, T. and Swallowe, G. M., 1995, "On the Tuning of Church and Carillon Bells," *Applied Acoustics*, Vol. 46, pp. 83~101.
- (12) 김석현, 박석균, 박기영, 서백수, 2002, "미소비대칭링의 맥놀이 지도," 한국소음진동공학회논문집, 제 12 권, 제 9 호, pp. 685~693.
- (13) 김석현, 2002, "성덕대왕신종의 맥놀이 지도," 한국소음진동공학회 추계학술대회 초록집.
- (14) Meirovitch, L., 2001, "Fundamentals of Vibrations," McGraw-Hill Companies, Inc.
- (15) Leisa, A. W., 1973, "Vibrations of Shells," NASA SP-288, Washington D. C. : U. S. Government Printing Office.
- (16) Soedel, W., 1993, "Vibration of Shells and Plates," Marcel Dekker.
- (17) Allaei, D., Soedel, W. and Yang, T. Y., 1986, "Natural Frequencies and Modes of Rings That Deviate from Perfect Axi-symmetry," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 111, No. 1, pp. 9~27.
- (18) Hong, J. S. and Lee, J. M., 1994, "Vibration of Circular Rings with Local Deviation," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, No. 2, pp. 317~322.
- (19) Kim, S. H., Soedel, W. and Lee, J. M., 1994, "Analysis of the Beating Response of Bell Type Structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 173, No. 4, pp. 517~536.
- (20) 김양한, 박연규, 김영기, 1997, "성덕대왕신종의 3차원 진동신호 측정 및 분석결과," 한국음향학회지, 제 16 권 제 6 호, pp. 41~47.
- (21) Mathews, J. H., 1992, "Numerical Method for Computer Science, Engineering and Mathematics," 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- (22) Palm, W., 1999, "Matlab for Engineering Applications," McGraw-Hill, Companies, Inc.
- (23) Maia, N. M. M. and Silva, J. M. M., 1997, "Theoretical and Experimental Modal Analysis," Research Studies Press Ltd.
- (24) 이장무, 김석현, 1999, "성덕대왕신종의 설계와 진동 음향특성의 상관관계," 경주박물관 성덕대왕신종 종합논고집, pp. 320~339.