Commun. Korean Math. Soc. **18** (2003), No. 3, pp. 393–427

초청논문

마쓰-야코비 형식에 관한 연구

양재현

요 약. 마쓰 형식을 일반화하는 마쓰-야코비 형식의 개념을 소개하고 이 형식의 성질을 연구한다. 그리고 마쓰-야코비 형식의 연구와 관련된 중요한 문제들을 제시한다.

머리말

아래의 Lie 군

$$SL_{2,1}(\mathbb{R}) := SL(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{(1,2)}$$

는 특별선형군 $SL(2,\mathbb{R})$과 가환군 $\mathbb{R}^{(1,2)}$과의 반직접곱이다. 여기서 $\mathbb{R}^{(1,2)}$는 1×2 실행렬들의 집합을 나타내고 있다. $SL_{2,1}(\mathbb{R})$에서의 곱은

$$(0.1) \qquad (g,\alpha)\cdot(h,\beta) = (gh,\, \alpha\,{}^t h^{-1} + \beta)$$

(단, $g,h \in SL(2,\mathbb{R}),\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{(1,2)}$)으로 주어진다. 그리고

$$SL_{2,1}(\mathbb{Z}) := SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^{(1,2)}$$

를 $SL_{2,1}(\mathbb{R})$의 이산 부분군이라 하자.

$\mathbb{H}$를 Poincaré 상반평면이라 하면 Lie 군 $SL_{2,1}(\mathbb{R})$은 등질공간 $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 상에서

$$(0.2) \quad (g,\alpha)\circ(\tau,z) = ((d\tau-c)(-b\tau+a)^{-1}, (z+\alpha_1\tau+\alpha_2)(-b\tau+a)^{-1})$$

와 같이 추이적으로 작용한다. 여기서 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}),\ \alpha = (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^{(1,2)}$이고 $(\tau,z) \in \mathbb{H}\times\mathbb{C}$이다.

Received June 4, 2003.

Key words and phrases: 마쓰 형식, 마쓰-야코비 형식, 불변 미분작용소, Eisenstein 급수, 야코비 군의 표현.

이 논문은 2000년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음 (KRF-2000-041-D00005).

본 논문은 마쓰 형식을 일반화하는 마쓰-야코비 형식의 개념을 소개하고 이 형식의 여러 성질을 연구한다. 또한 마쓰-야코비 형식의 연구와 관련된 중요한 문제들을 제시한다.

제 1 절에서는 마쓰 형식의 연구와 관련된 여러 결과들과 문제들을 살펴본다. 제 2 절에서는 (0.2)의 작용에 불변인 $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 상의 미분작용소들을 구체적으로 계산한다. $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 상의 불변 Riemann 계량을 구한 후 이 계량의 라플라스 작용소를 구체적으로 계산한다. 제 3 절에서는 $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 상에서 마쓰 형식을 일반화하는 마쓰-야코비 형식의 개념을 정의하고 이 형식의 여러 성질을 연구한다. 제 4 절에서는 $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 상의 라플라스 작용소의 고유함수를 사용하여 $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 상에 Eisenstein 급수를 형식적으로 구성한 후 마쓰-야코비 형식의 구성법에 관하여 논한다. 제 5 절에서는 야코비 군의 표현에 관하여 간략하게 논한다. 제 6 절에서는 마쓰-야코비 형식의 연구와 관련된 문제들을 제시한다.

기호 : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 는 각각 정수환, 유리수체, 실수체, 복소수체 등을 나타낸다. $\mathbb{H}$ 는 Poincaré 상반평면을 나타낸다. $\mathbb{Z}^+$ 는 자연수들의 집합을 나타낸다. “$:=$” 는 오른쪽의 내용이 왼쪽 수식의 정의이다라는 의미를 나타내는 기호이다. 가환환 F 에 대하여 $F^{(k,l)}$ 는 $k\times l$ F-행렬을 나타낸다. 임의의 행렬 $M\in F^{(k,l)}$ 과 $B\in F^{(k,k)}$ 에 대하여 ${}^tM$ 은 M 의 전치행렬을 나타내고 $B[M]:={}^tMBM$ 를 나타낸다. I_n은 $n\times n$ 단위행렬이다. 정방행렬 A 에 대하여 $\sigma(A)$ 는 A 의 대각합(trace)을 나타낸다.

제 1 절 마쓰 형식(Maass forms)

이 절에서는 지난 50여년 동안 마쓰형식에 관하여 얻어졌던 여러 결과들을 소개한다.

$\mathbb{H}=\{\tau\in\mathbb{C}\,|\,\operatorname{Im}\tau>0\}$ 를 Poincaré 상반 평면이라 하자. 그러면 특별 선형군 $SL(2,\mathbb{R})$은 $\mathbb{H}$상에서

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\langle\tau\rangle := (a\tau+b)(c\tau+d) \tag{1.1}$$

(단, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $ad-bc=1$) 와 같이 추이적으로(transitively)작용한다. $\mathbb{H}$ 상의 좌표를 $\tau=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$, $y>0$) 이라 놓으면 $\mathbb{H}$ 상의 계량

$$ds^2=\frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)=\frac{dz\,d\bar{z}}{y^2} \tag{1.2}$$

는 작용 (1.1)에 불변인 Kaehler 계량이다. 이것을 $\mathbb{H}$ 상의 Poincaré 계량이라고 한다. Poincaré 계량 ds^2의 라플라스 작용소 Δ는

$$\Delta=y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1.3}$$

으로 주어지며 작용 (1.1)에 불변인 미분작용소이다.

정의 1.1. $\mathbb{H}$상의 복소함수 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 가 있어 아래의 성질 $(M1)$-$(M3)$을 만족할 때 f를 **마쓰 형식**(Maass form 또는 Maass waveform)이라고 부른다.

$(M1)$ f는 Δ의 고유함수이다.

$(M2)$ 임의의 $\gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$에 대하여 $f(\gamma\langle\tau\rangle) = f(\tau)$이다.

$(M3)$ f는 무한점에서 기껏해야 다항식적인 증가성을 지니고 있다. 다시 말하면, 적당한 상수 C와 상수 k가 존재하여, 변수 x에 균등하게 $y \to \infty$일 때 $|f(x+iy)| \leq C\,y^k$ 이다.

$(M1)$에 의하여 $\Delta f = \lambda f$ (단, λ 는 상수)는 타원 편미분 방정식이므로 마쓰 형식 f는 실해석적(real analytic)이다. (참고문헌 : [11]) 기호편의상

$$\Gamma = SL(2,\mathbb{Z}), \quad \Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & * \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \right\}$$

이라 표기한다. 주어진 복소수 $s \in \mathbb{C}$에대하여 Eisenstein 급수 $E_s(\tau)$를 형식적으로(formally)

$$E_s(\tau) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\operatorname{Im} \gamma\langle\tau\rangle)^s, \quad \tau \in \mathbb{H} \tag{1.4}$$

이라 정의한다. 여기서 $\Gamma_\infty = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\langle\infty\rangle = \infty\}$ 임을 유의하고 임의의 $\gamma \in \Gamma_\infty$에 대하여 $\operatorname{Im}\gamma\langle\tau\rangle = \operatorname{Im}\tau$임을 쉽게 알수 있다. 급수 (1.4)는 s의 실수 부분 $\operatorname{Re} s$가 1보다 클 때에만 수렴한다는 사실을 어렵지 않게 보일수 있다. 실제로 $\operatorname{Re} s > 1$이면 Eisenstein 급수 $E_s(\tau)$는 고유값이 $s(s-1)$인 마쓰 형식임을 알 수 있다. 구체적으로 기술하면

$$\Delta E_s(\tau) = s(s-1)E_s(\tau). \tag{1.5}$$

$$E_s(\gamma\langle\tau\rangle) = E_s(\tau), \quad \gamma \in \Gamma. \tag{1.6}$$

$$E_s(\tau) \sim y^s \quad y \to \infty. \tag{1.7}$$

또한 $E_s(\tau)$가 s의 함수로 간주되었을 때 $E_s(\tau)$는 전복소평면 $\mathbb{C}$상으로 해석적으로 접속이 가능하며, 이 해석접속 (analytic continuation) $E_s(\tau)$는 $s=1$에서 단순극(simple pole)을 갖는 유리형(meromorphic)함수이다. $s=1$에서의 $E_s(\tau)$의 유수(留數; residue)는 $3/\pi$이며 이 값은 기본영역 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$의 부피와 같음이 알려져 있다. 그러므로 $E_s(\tau)$는 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$의 기하학적인 성질과 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다. $E_s(\tau)$는 $L^1(\Gamma\backslash\mathbb{H})$의 원소이지만 $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$의 원소가 아님을 유의하기 바란다.

이제부터는

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

으로 정의되는 감마함수이고

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}\ s > 1$$

을 Riemann 제타함수라고 하자. $\Gamma(z)$ 와 $\zeta(s)$ 는 전복소평면 $\mathbb{C}$ 상으로의 해석접속을 지니고 있다는 사실은 잘 알려져 있다. 이들의 해석접속도 역시 같은 기호 $\Gamma(z)$ 와 $\zeta(s)$ 로 표기하기로 한다. K-Bessel함수 $K_s(z)$는

$$K_s(z) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{z}{2}(t+t^{-1})\right] \cdot t^{s-1}dt, \qquad \mathrm{Re}\ z > 0$$

으로 정의한다. 그러면 $\mathrm{Re}\, s > 0$ 인 복소수 $s \in \mathbb{C}$ 를 고정하면 $z \to 0$ 일 때, $K_s(z) \sim 2^{s-1}\Gamma(s)z^{-s}$ 이고 $z \to \infty$ 일 때는 $K_s(z) \sim (\pi/(2z))^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-z}$ 임을 알 수 있다. (참고문헌 : [20], [32])

Eisenstein 급수 $E_s(\tau)$는

$$\Lambda(s)E_s(\tau) = \Lambda(1-s)E_{1-s}(\tau), \quad s \in \mathbb{C},\ \tau \in \mathbb{H} \tag{1.8}$$

으로 주어지는 함수방정식을 만족한다. 여기서

$$\Lambda(s) := \pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta(2s).$$

함수 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 가 고유값 $s(s-1)$ 을 갖는 마쓰 형식이라고 하면 f는

$$f(x+iy) = ay^s + by^{1-s} + \sum_{n\neq 0} a_n y^{\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) \cdot e^{2\pi inx} \tag{1.9}$$

와 같은 형태로 주어지는 푸리에 전개를 갖는다는 사실을 어렵지 않게 증명할 수 있다.

정리 1.2. 함수 $E_s^*(\tau) := \Lambda(s)E_s(\tau)$ 의 푸리에 전개는

$$\begin{aligned} E_s^*(x+iy) = \ & y^s\Lambda(s) + y^{1-s}\Lambda(1-s) \\ & + 2\sum_{n\neq 0} |n|^{s-1}\sigma_{1-2s}(n) y^{\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) \cdot e^{2\pi inx} \end{aligned} \tag{1.10}$$

으로 주어진다. 단, $\sigma_s(n) = \sum_{0<d|n} d^s$ 는 약수함수(division function)이다.

이제 복소수 $\lambda \in \mathbb{C}$ 에 대하여 고유값 λ 를 갖는 마쓰 형식들로 이루어진 벡터공간을 $M(\Gamma, \lambda)$ 로 표기하기로 한다. 마쓰 형식 $f \in M(\Gamma, \lambda)$ 의

푸리에 전개 (1.9)에서 이의 상수항이 0 일 때 f 를 **첨점 형식**(cusp form)이라 한다. 즉 f 가 첨점 형식이면

$$\int_0^1 f(x+iy)\,dx = ay^s + by^{1-s} = 0$$

이다. 고유값 λ 를 지니는 첨점 형식들의 벡터공간을 $M_0(\Gamma,\lambda)$ 로 표기하기로 한다. 첨점 형식 f 의 푸리에 전개 (1.9)에서의 K-Bessel함수 $K_s(y)$ 의 점근적 성향과 기본 영역 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ 의 부피가 $3/\pi$ 이라는 사실로부터 f 는 $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ 의 원소임을 알 수 있다. 애석하게도 첨점 형식이 무수히 많다는 사실은 알려져 있지만 구체적으로 구성된 첨점 형식은 아직까지도 알려져 있는 것이 없다.

정리 1.3. *(a)* Re $s > \frac{1}{2}$ *이고* $s \notin [\frac{1}{2},1]$ *이면* $M(\Gamma, s(s-1)) = \mathbb{C}E_s$ *이다.*

(b) $M(\Gamma,0) = \mathbb{C}$.

(c) Re $s = \frac{1}{2}$ *또는* $s \in [\frac{1}{2},1]$ *이면*

$$M(\Gamma, s(s-1)) = \mathbb{C}E_s \oplus M_0(\Gamma, s(s-1)).$$

(d) $s \in [\frac{1}{2},1)$ *이면* $M_0(\Gamma, s(s-1)) = 0$ *이다.*

(e) 집합 $\{s \in \mathbb{C} \mid M_0(\Gamma, s(s-1)) \neq 0\}$ *는 무한집합이다.*

정리 1.4. $M_0(\Gamma, s(s-1))$ *의 원소인 첨점 형식* f *의 푸리에 전개가*

$$f(z) = \sum_{n\neq 0} a_n\, y^{\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)\, e^{2\pi i n x}$$

으로 주어진다고 하자. 그러면

$$|a_n| < c\,|n|^{1/2}$$

이다. 단, c *는* n *에 의존하지 않는 어떤 상수이다.*

정리 1.5. *(a)* $M_0(\Gamma,\lambda) \neq 0$ *이면* $\lambda < -\frac{3}{2}\pi^2$ *이다.*

(b) $M_0(\Gamma,\lambda)$ *는 유한차원의 벡터공간이다.*

복소수 $s \in \mathbb{C}$ *에 대하여*

$$M_0^e(\Gamma, s(s-1)) = \{f \in M_0(\Gamma, s(s-1)) \mid f(-\bar{\tau}) = f(\tau),\ \tau \in \mathbb{H}\}$$

이라 하고

$$S_{\Gamma,e} = \{s \in \mathbb{C} \mid M_0^e(\Gamma, s(s-1)) \neq 0\}$$

이라 정의한다. 이 때 $M_0^e(\Gamma, s(s-1))$ *의 원소를 첨점 우형식(even cusp form)이라고 한다. 실제로* $S_{\Gamma,e}$ *는 무한집합이라는 사실을 알 수 있다.*

$\mathbb{R}^- := (-\infty, 0]$, $\mathbb{C}' := \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ 이라 놓고 함수 $\chi_s : \mathbb{C}' \longrightarrow \mathbb{C}$ (단, $s \in \mathbb{C}$)와 $E : \mathbb{C} - 2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ 를 각각

$$\chi_s(z) := z^s, \qquad E(z) := \frac{1}{e^z - 1}$$

이라 정의한다. $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$, $\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ 이라 두고, 복소수 $s \in \mathbb{C}$와 $f \in C(\mathbb{R}^+)$ ($\mathbb{R}^+$상의 연속함수들의 집합)에 대하여 $\mathbb{R}^+$상에서 f의 제 2의 Hankel 변환 $\mathcal{H}_s f$ 는

$$\mathcal{H}_s f(y) := \int_0^\infty f(x) \left(\frac{x}{y}\right)^{s-\frac{1}{2}} J_{2s-1}(2\sqrt{yx})dx, \quad y \in \mathbb{R}^+ \tag{1.11}$$

으로 정의된다. 단, J_ν 는 위수(位數;order) ν인 Bessel 함수이다. 복소수 $s \in \mathbb{C}$에 대하여

$$\mathcal{E}_s^0 = \{f \in C(\mathbb{C}) \mid \chi_{-1} f \in L^\infty(\mathcal{R}) \cap L^2(i\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \mathcal{H}_s(E \cdot f) = f\ \}$$

이라 정의한다. J. B. Lewis [21] 는 Re $s > 0$ 인 임의의 $s \in \mathbb{C}$ 에 대하여 벡터공간 $M_0^e(\Gamma, s(s-1))$ 에서 $\mathcal{E}_s^0$ 으로의 자연스런 전단사 사상 $\mathcal{U}_s$가 존재한다는 사실을 증명하였다. 실제로 사상 $\mathcal{U}_s : M_0^e(\Gamma, s(s-1)) \longrightarrow \mathcal{E}_s^0$ 는

$$\mathcal{U}_s(f)(z) := z^{1-s}(1 - e^{-z}) \int_0^\infty \sqrt{zy}\, J_{s-\frac{1}{2}}(zy) f(iy)\, dy \tag{1.12}$$

으로 주어진다. 다시 말하면 Lewis는 첨점 우형식을 어떤 성질을 만족하는 $\mathbb{C}$상의 복소해석적 함수로 특징화 (characterization)하였다.

함수 $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$가 고유값 $r(r-1)$을 갖는 마쓰 형식이라 하자. 그러면 (1.9)에 의하여 f의 푸리에 전개는

$$f(\tau) = ay^r + by^{1-r} + \sum_{n \neq 0} a_n\, y^{\frac{1}{2}}\, K_{r-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)\, e^{2\pi i n x} \tag{1.13}$$

으로 주어진다. 이 때 f의 Mellin변환

$$W_f(s) := \int_0^\infty \{f(iy) - a\, y^r - b\, y^{1-r}\}\, y^{s-1}\, dy \tag{1.14}$$

은 K-Bessel 함수의 적분 공식에 의하여

$$W_f(s) = 2^{-\frac{s}{2}} \pi^{-(s+\frac{1}{2})} \Gamma\left(\frac{s-r+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+r}{2}\right) \sum_{n \neq 0} a_n |n|^{-(s+\frac{1}{2})} \tag{1.15}$$

으로 주어지는 등식을 만족함을 보일수 있다. H. Maass [24] 는 마쓰 형식과 이에 대응되는 Dirichlet 급수와의 관계가 아래와 같이 주어짐을 증명하였다.

정리 1.6. 함수 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 가 푸리에 전개 (1.13)을 갖는다고 하자. 그러면 f 가 $M(\Gamma, r(r-1))$ 의 원소이기 위한 필요충분조건은 아래의 두 조건 (ㄱ) 과 (ㄴ) 의 성질을 만족하는 것이다.

(ㄱ) Dirichlet급수

$$W_f(s) - a\left(\frac{1}{s-r} + \frac{1}{-s-r}\right) - b\left(\frac{1}{s+r-1} + \frac{1}{-s+r-1}\right)$$

이 수직대(vertical strip)에서 유계인 전해석적(entire) 함수이고 함수 방정식 $W_f(s) = W_f(-s)$ 을 만족한다.

(ㄴ) 2차 Dirichlet 급수

$$W_{f_x}(s) := 2^{-\frac{s}{2}}\pi^{-(s+\frac{1}{2})}\Gamma\left(\frac{s-r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+r}{2}\right)\cdot\sum_{n\neq 0}(2\pi n)a_n|n|^{-(s+\frac{1}{2})}$$

도 역시 (ㄱ) 과 유사한 성질을 갖는다. 여기서 f_x는 변수 x 에 대한 f 의 미분함수를 나타낸다.

정의 1.7. 마쓰 형식 $f \in M(\Gamma, r(r-1))$ 에 대하여 Hecke 작용소 $T_n\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 을

$$T_n f(\tau) := n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{ad = n,\ d > 0 \\ b \bmod d}} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right) \tag{1.16}$$

으로 정의한다. 두 개의 마쓰 형식 $f, g \in M(\Gamma, r(r-1))$ 에 대하여 Petersson 내적을 형식적으로

$$(f, g) := \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(\tau)\,\overline{g(\tau)}\,\frac{dxdy}{y^2}$$

으로 정의한다.

Hecke 작용소는 아래와 같은 성질을 지니고 있다.

정리 1.8. (1) $T_n(M(\Gamma, r(r-1)) \subset M(\Gamma, r(r-1))$ 이고

$$T_n(M_0(\Gamma, r(r-1)) \subset M_0(\Gamma, r(r-1))$$

이다.

(2) 마쓰 형식 $f \in M(\Gamma, r(r-1))$ 가 푸리에 급수 (1.13)을 갖는다고 하자. 그러면 마쓰 형식 $T_n f\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 의 푸리에 급수는

$$T_n f(\tau) = c\,y^r + d\,y^{1-r} + \sum_{m\neq 0} c_m\, y^{\frac{1}{2}}\, K_{r-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)\, e^{2\pi i m x}$$

으로 주어진다. 여기서

$$c = n^{1/2-r}\sigma_{2r-1}(n)\,a, \qquad d = n^{r-1/2}\sigma_{1-2r}(n)\,b$$

이고

$$c_m = \sum_{d|(m,n)} c_{mn/d^2}$$

이다.

(3) Hecke 작용소 $T_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ 에 의하여 생성되는 Hecke 대수는 가환대수이다. 그리고 T_n 은

$$T_mT_n = T_nT_m = \sum_{d|(m,n)} T_{mn/d^2}$$

의 관계를 만족한다. 여기서 (m,n)은 m 과 n 의 최대공약수를 나타내고 있다.

(4) 첨점형식 $f,g \in M_0(\Gamma, r(r-1))$ 에 대하여 항상 $(T_nf,g)=(f,T_ng)$ (단, $n=1,2,3,\cdots$). 그러므로 Hecke 작용소는 벡터공간 $M_0(\Gamma,r(r-1))$ 상에서 동시에 대각화가 가능하다.

(5) 마쓰 형식 $f \in M_0(\Gamma,r(r-1))$ 가 푸리에 전개 (1.13)을 가지며 모든 Hecke 작용소 $T_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ 의 고유함수라고 가정하자. 그리고 $T_nf=\lambda_nf\,(n=1,2,3,\cdots)$ 이라 가정하자. 그러면

$$a_n = \lambda_{|n|}a_{n/|n|}$$

의 관계가 성립하고 f와 연관되어 있는 Dirichlet 급수 $L_f(s)$ 와 $L_{f_x}(s)$ 는

$$\begin{aligned} L_f(s-1/2) &:= \sum_{m\neq 0} a_m|m|^{-s} = (a_1+a_{-1})\prod_p (1-u_pp^{-s}+p^{-2s})^{-1} \\ L_{f_x}(s+1/2) &:= \sum_{m\neq 0}(2\pi im)a_m|m|^{-s-1} \\ &= 2\pi i(c_1-c_{-1})\prod_p(1-u_pp^{-s}+p^{-2s})^{-1} \end{aligned}$$

으로 주어지는 Euler 곱을 갖는다. 여기서 p 는 모든 소수들의 집합 위를 움직인다. 역으로 상기와 같은 Euler 곱을 갖는 Dirichlet 급수 L_f 와 L_{f_x} 에 대응되는 마쓰 형식 $f \in M(\Gamma,r(r-1))$ 은 모든 Hecke 작용소의 고유함수이다.

모듈라 곡선 $X(\Gamma) := \Gamma\backslash\mathbb{H}$ 상의 라플라스 작용소 $-\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ 는 $L^2(X(\Gamma))$ 상의 음이 아닌 자기수반 작용소 Δ_Γ 로 확장된다. 이제 힐베르트 공간 $L^2(X(\Gamma))$ 상에서의 작용소 Δ_Γ 의 스펙트럼 분해에 관하여 설명하겠다.

우선 $L^2(X(\Gamma))$ 상에 내적

$$(f,g) := \int_{X(\Gamma)} f(\tau)\,\overline{g(\tau)}\,\frac{dxdy}{y^2}, \qquad f,g\in L^2(X(\Gamma)) \tag{1.17}$$

을 정의한다. 그러면 임의의 $f \in L^2(X(\Gamma))$는

$$(1.18) \qquad f(\tau) = \sum_{n \geq 0} (f, u_n) u_n + \frac{1}{4\pi i} \int_{\mathrm{Re}\ s = \frac{1}{2}} (f, E_s)\, E_s(\tau)\, ds$$

와 같이 분해된다. 여기서 $u_0 = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$, $\{u_n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$은 첨점 형식들의 집합으로 $(u_m, u_n) = \delta_{mn}$, $\Delta_\Gamma u_n = \lambda_n u_n$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$을 만족하고 $\{u_0, u_1, u_2, \cdots\}$은 $L^2(X(\Gamma))$의 이산부분 공간의 정규 직교기저이다. (1.18)로 주어지는 분해를 **Roelcke-Selberg 분해**라고 한다.

$$L^2_{(1)}(X(\Gamma)) := \{f \in L^2(X(\Gamma)) \mid f(-\bar{\tau}) = -f(\tau),\ \tau \in \mathbb{H}\},$$

$$L^2_{(2)}(X(\Gamma)) := \{f \in L^2(X(\Gamma)) \mid f(-\bar{\tau}) = f(\tau),\ \tau \in \mathbb{H}\}$$

이라 놓으면

$$L^2(X(\Gamma)) = L^2_{(1)}(X(\Gamma)) \bigoplus L^2_{(2)}(X(\Gamma)) \qquad \text{(direct sum)}$$

이 된다. 작용소 Δ_Γ의 이산 스펙트럼의 (상수가 아닌) 고유함수들에 의하여 생성되는 $L^2(X(\Gamma))$의 닫힌 부분공간을 $L^2_{\mathrm{cusp}}(X(\Gamma))$로 표기하고 Δ_Γ의 연속 스펙트럼의 고유함수들에 의하여 생성되는 $L^2(X(\Gamma))$의 부분공간을 $L^2_{\mathrm{cont}}(X(\Gamma))$로 표기한다. 실제로 $L^2_{\mathrm{cusp}}(X(\Gamma))$는 Γ에 대한 첨점 형식들의 집합이다. 그러면 힐베르트공간 $L^2(X(\Gamma))$는

$$L^2(X(\Gamma)) = L^2_{\mathrm{cusp}}(X(\Gamma)) \oplus \mathbb{C} \oplus L^2_{\mathrm{cont}}(X(\Gamma)) \quad \text{(direct sum)}$$

으로 분해된다. Eisenstein 급수 $E_s(\tau)$는 $E_s(-\bar{\tau}) = E_s(\tau)$의 성질을 만족하므로 $L^2_{\mathrm{cont}}(X(\Gamma))$는 $L^2_{(2)}(X(\Gamma))$의 부분집합이다.

$$R(\tau) := E_6(\tau) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)\, e^{2\pi i \tau}$$

$$Q(\tau) := E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)\, e^{2\pi i \tau}$$

$$P(\tau) := E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)\, e^{2\pi i \tau}$$

를 각각 무게(weight)가 $6, 4, 2$인 해석적 Eisenstein 급수라고 두고 함수 $S : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$를

$$S(\tau) := P(\tau) - 3\pi \cdot \mathrm{Im}\, \tau, \qquad \tau \in \mathbb{H}$$

이라 정의한다. 그리고 음이 아닌 정수 k에 대하여 함수 $e_k : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$를

$$e_k(\tau) := (\mathrm{Im}\ \tau)^k R(\tau)^{k_1} Q(\tau)^{k_2} S(\tau)^{k_3}\, \overline{R(\tau)^{m_1} Q(\tau)^{m_2} S(\tau)^{m_3}},$$

$$k = 6k_1 + 4k_2 + 2k_3 = 6m_1 + 4m_2 + 2m_3,$$

$k_j,\, m_j\ (j = 1, 2, 3)$ 는 음이 아닌 정수 와 같이 정의한다. $e_0 = 1$ 임을 유의하라. 집합 $\{e_k \mid k$ 는 음이 아닌 정수$\}$에 의하여 생성되는 복소벡터공간을 M_E 이라고 표기한다. 또 $L^2(X(\Gamma))$ 안에서의 작용소 Δ_Γ 의 정의역을 $D(\Delta_\Gamma)$ 이라 표기한다. 그리고

$$M_E^D := M_E \cap D(\Delta_\Gamma)$$

이라 정의한다. A. Venkov [31]는

$$\overline{M_E^D} = L^2_{(2)}(X(\Gamma))$$

임을 증명하였다. 여기서 $\overline{M_E^D}$ 는 $L^2_{(2)}(X(\Gamma))$ 안에서의 M_E^D의 폐포(closure)를 나타내고 있다.

수론에서 심오하고 중요한 업적 중의 하나인 $\Gamma := SL(2, \mathbb{R})$ 에 관한 Selberg 대각합 공식(trace formula)에 관하여 간략하게 설명하겠다. Γ 의 원소들은 다음과 같이 분류된다.

(Γ1) $I_2, -I_2$.

(Γ2) 포물원(parabolic elements): Jordan 형식이 $\pm\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (단, $a \neq 0$) 의 형태로 주어지는 Γ 의 원소들임.

(Γ3) 타원원(elliptic elememnts): Jordan 형식이 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ (단, $a \notin \mathbb{R},\ |a| = 1$) 의 형태로 주어지는 원소들임.

(Γ4) 쌍곡원(hyperbolic elememnts): Jordan 형식이 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ (단, $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0, \pm 1$) 의 형태로 주어지는 원소들임.

$\gamma \in \Gamma$ 에 대하여 집합 $\{\gamma\} := \{\gamma_1\gamma\gamma_1^{-1} \mid \gamma_1 \in \Gamma\}$ 를 Γ 안에서 γ 의 공액류(concugacy class)라고 부르며 집합 $\Gamma_\gamma := \{\gamma_1 \in \Gamma \mid \gamma_1\gamma\gamma_1^{-1} = \gamma\}$ 을 Γ 안에서 γ 의 중심화군 (centralizer)이라고 한다. 쌍곡원 $\gamma \in \Gamma$ 의 Jordan 형식이 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ (단, $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0, \pm 1$)으로 주어질 때 $N\gamma := a^2$ 를 γ 의 노옴(norm)이라고 일컫는다. 쌍곡원 γ 의 중심화군 Γ_γ 은 무한 순환군 $\Gamma_\gamma = \langle \gamma_0 \rangle$ 임을 쉽게 알 수 있다. 이 때 Γ_γ 의 생성원 γ_0 를 원시 쌍곡원 (primitive hyperbolic element)이라고 한다.

편의상 $G = SL(2, \mathbb{R}),\ K = SO(2)$ 이라 두자. 그러면 대칭공간 G/K는 $\mathbb{H}$와 겹복소해석적(biholomorphic)임을 유의한다. G 상의 함수로서 컴팩트 받침함수인 동시에 K-겹불변(K-bi-invariant)인 C^∞-함수들의 집합을 $C_c^\infty(K\backslash G/K)$ 으로 표기한다. $C_c^\infty(K\backslash G/K)$의 원소 ϕ에 대

하여 ϕ 의 Helgason 변환 $\hat{\phi}(s)$ 를

$$\hat{\phi}(s) = \int_{\mathbb{H}} \phi(\tau)\, y^{\bar{s}} \frac{dxdy}{y^2}, \qquad s \in \mathbb{C} \tag{1.19}$$

으로 정의한다. $(0, \infty)$ 상의 함수 Φ 를 Harish-Chandra 변환

$$T_{\mathrm{HC}}\phi(y) := y^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x+iy)\, dx = \Phi(\log y) \tag{1.20}$$

에 의하여 결정되는 함수라고 정의한다.

정리 1.9 (Selberg [28]). *함수 $\phi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ 가 $C_c^\infty(K\backslash G/K)$ 의 원소라고 하자. 그러면*

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \hat{\phi}(s_n) \\
= \;& \frac{Area(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi} \int_{r\in\mathbb{R}} \hat{\phi}\left(\frac{1}{2} + ir\right) r \tanh \pi r\, dr \\
&+ \sum_{\substack{\{\gamma_0\} \\ \text{원시 쌍곡원}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log N\gamma_0}{N\gamma_0^{\frac{k}{2}} - N\gamma_0^{-\frac{k}{2}}} \Phi(k \log N\gamma_0) \\
&+ \int_{r\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3\sqrt{3}}(e^{\frac{\pi r}{3}} + e^{-\frac{\pi r}{3}})\right) \hat{\phi}\left(\frac{1}{2} + ir\right)(e^{\pi r} + e^{-\pi r})^{-1}\, dr \\
&- \Phi(0) \log(2\pi) + \frac{1}{\pi} \int_{r\in\mathbb{R}} \hat{\phi}\left(\frac{1}{2} + ir\right) \frac{\zeta'}{\zeta}(-2ir)\, dr
\end{aligned}$$

의 공식을 얻는다. 여기서 $s_0 = 0$ 이고 $s_n\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 은 $\Delta u_n = s_n(s_n - 1)\, u_n\,(s_n \in \frac{1}{2} + i\mathbb{R})$ 에 의하여 주어지는 복소수이다. (여기서, $u_n\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 은 (1.18)에서 주어지는 첨점 형식들이다.)

Selberg 의 고유값 가설(Selberg's Eigenvalue Conjecture)에 관하여 간략하게 언급하겠다. 자연수 N 에 대하여

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1,\ b \equiv c \equiv 0 \pmod N \right\}$$

이라 정의한다. $\Gamma(N)$을 주합동 부분군(a principal congruence subgroup)이라 일컫는다. Γ_* 가 Γ 의 부분군으로 어떤 자연수 N 이 존재하여 $\Gamma(N) \subset \Gamma_* \subset \Gamma$ 이고 $[\Gamma : \Gamma_*] < \infty$ (유한지수; finite index)일 때 Γ_* 를 Γ 의 합동 부분군이라 한다. 1965년에 Selberg는 그의 논문 [29]에서 아래의 가설을 제기하였다.

Selberg의 고유값 가설. Γ_*를 Γ의 합동 부분군이라하고 $0 = \lambda_0 < \lambda_1(\Gamma_*) < \lambda_2(\Gamma_*) < \cdots$를 모듈라 곡선 $\Gamma_*\backslash\mathbb{H}$ 상의 라플라스 작용소 $-\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$의 이산 스펙트럼이라고 하자. 그러면

$$\lambda_1(\Gamma_*) \geqq \frac{1}{4}$$

이다.

임의의 자연수 N에 대하여 모듈라 곡선

$$X(N) := \Gamma(N)\backslash\mathbb{H}$$

이라 표기한다. 1949년에 H. Maass는 그의 논문 [24]에서 $\lambda = \frac{1}{4}$는 어떤 자연수 N이 존재하여 모듈라 곡선 $X(N)$ 상에서 $-\Delta$의 고유값이 될 수 있다는 사실을 보였다. 1965년에 Selberg는 [29]에서 임의의 합동 부분군 Γ_*에 대하여 $\lambda_1(\Gamma_*) \geq \frac{3}{16} = 0.1875$ 임을 증명하였고, 1978년에는 Gelbart와 Jacquet는 논문 [13]에서 Selberg의 증명의 방법과는 완전히 다른 방법으로 $\lambda_1(\Gamma_*) > \frac{3}{16}$ 임을 증명하였다. 1995년에 Luo, Rudnick와 Sarnak는 그들의 논문 [22]에서 $\lambda_1(\Gamma_*) \geq \frac{121}{784} = 0.2181\cdots$ 임을 증명하였다. Selberg의 고유값 가설은 Ramanujan 가설과 밀접한 관계가 있다. (참고문헌: [23])

Γ_*를 Γ의 합동 부분군이라 하자. 모듈라 곡선 $X(\Gamma_*)$ 상의 비유크리드 작용소 $-\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$는 $L^2(X(\Gamma_*))$ 상의 음이 아닌 자기수반 작용소 $\Delta(\Gamma_*)$으로 자연스럽게 확장이 된다. $X(\Gamma_*)$는 비긴밀 공간이므로 작용소 $\Delta(\Gamma_*)$는 이산 스펙트럼뿐만아니라 연속 스펙트럼도 갖는다. $\Delta(\Gamma_*)$의 이산 스펙트럼을 $0 = \lambda_0 < \lambda_1(\Gamma_*) < \lambda_2(\Gamma_*) < \lambda_3(\Gamma_*) < \cdots$와 같이 크기 순서로 표기한다. Zograf는 논문 [39]에서 Selberg 정리 (즉, $\lambda_1(\Gamma_*) \geq \frac{3}{16}$)와 스펙트럼 이론을 사용하여

$$g(\Gamma_*) + 1 > \frac{[\Gamma : \Gamma_*]}{128} \tag{1.21}$$

의 관계가 성립함을 증명하였다. 여기서 $g(\Gamma*)$는 모듈라 곡선 $X(\Gamma_*)$의 종수(genus)를 나타내고 있다. 게다가 그는 주어진 종수 g를 갖는 Γ의 합동 부분군들의 개수는 유한임을 증명하였다.

Sarnak의 흥미로운 survey 논문, "*On cusp forms*" [26]의 내용을 언급하겠다. G가 반단순 Lie 군이고 K를 G의 최대 긴밀부분군이라고 하자. 그리고 $X = G/K$를 비긴밀 타입의 대칭공간이라 하자. Γ_*를 G 안의 비균등격자(a non-uniform lattice)라고 하자. Γ_*가 G의 이산 부분군으로 $\Gamma_*\backslash X$의 부피는 유한이고 $\Gamma_*\backslash X$가 비긴밀 공간일 때 Γ_*를 G의 비균등격자라고 일컫는다. X 상의 첨점 형식을 아래와 같이 G 상의 함수로 간주할 수 있다. G 상의 함수 $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$가 첨점 형식이란 $L^2(\Gamma\backslash X)$의

원소이고 X 상의 불변 미분작용소들의 대수의 동시적 고유함수이며 임의의 첨점 부분군(a cuspidal subgroup) N (단, $N \neq G$) 에 대하여

$$\int_{(N\cap\Gamma_*)\backslash N} \phi(nx)dn = 0 \tag{1.22}$$

일 때를 말한다. Δ_X 를 X 상의 라플라스 스펙트럼이라 하고 $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ 를 Δ_X 의 이산 스펙트럼이라 하자. 또한 $\phi_1, \phi_2, \cdots$ 를 이산 스펙트럼 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 에 대응하는 고유함수라고 하자. 다시 말하면,

$$\phi_j \in L^2(\Gamma_*\backslash X), \qquad \Delta\phi_j + \lambda_j\phi_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \cdots .$$

양의 실수 R 에 대하여

$$N_{\rm cusp}(R) := \#\left\{\phi_j \mid \lambda_j \leqq \sqrt{R}\right\}$$

이라 정의한다. 여기서 기호 $\#A$ 는 집합 A 의 개수를 나타낸다. H. Donnelly 는 그의 논문 [9]에서

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{N_{\rm cusp}(R)}{R^d} \leq \frac{(4\pi)^{-d/2}{\rm vol}(\Gamma_*\backslash X)}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} =: c(\Gamma_*) \tag{1.23}$$

으로 주어지는 부등식을 발견하였다. 여기서 d 는 X 의 차원이다. Γ 의 첨점 스펙트럼의 밀도(density) $\delta(\Gamma_*)$를

$$\delta(\Gamma_*) := \frac{1}{c(\Gamma_*)} \limsup_{R\to\infty} \frac{N_{\rm cusp}(R)}{R^d}$$

이라 정의한다. $\delta(\Gamma_*) = 1$ 일 때 Γ_* 를 *본질적으로 첨점적*(essentially cuspidal)이라고 한다. Selberg는 다음의 결과를 얻었다.

정리 1.10 (Selberg). *Γ_* 를 $\Gamma := SL(2,\mathbb{Z})$ 의 합동부분군이라 하자. 그러면*

$$\begin{aligned} N_{cusp}(R) &= \frac{vol(\Gamma_*\backslash\mathbb{H})}{4\pi} R^2 + O(R\log R) \\ &= c(\Gamma_*)\, R^2 + O(R\log R) \end{aligned} \tag{1.24}$$

의 관계식이 성립한다. 따라서 Γ_* 는 본질적으로 첨점적이다.

상기의 증명은 Selberg 대각합 공식으로부터 얻어진다.

I. Efrat 는 그의 박사학위논문 [10]에서 아래와 같은 사실을 증명하였다.

정리 1.11 (Efrat). *$G = (SL(2,\mathbb{R}))^n$ (단, $n > 1$ 인 자연수)이고 Γ_* 를 G 의 기약인 비균등격자라고 하자. 그러면*

$$N_{cusp}(R) = c(\Gamma_*)\, R^{2n} + O(R^{2n-1}(\log R)^{-1}) \tag{1.25}$$

이다. 따라서 Γ_* 는 본질적으로 첨점적이다.

Sarnak 과 Efrat 는 $G = SL(3,\mathbb{R}), \Gamma_* = SL(3,(Z))$ *인 경우에는*

$$N_{cusp}(R) = c(\Gamma_*)\, R^5 + O(R^4) \tag{1.26}$$

임을 증명하였다. 따라서 $\Gamma_* = SL(3,\mathbb{Z})$ *는 본질적으로 첨점적이다. 그래서 Sarnak 는 (1.25)와 (1.26)의 결과를 근거로 하여 아래의 가설을 제기하였다.*

가설. rank $(X) > 1$ 이면 임의의 기약인 비균등격자는 본질적으로 첨점적이다.

나아가 Sarnak 는 Γ_* 의 산수성(arithmetcity)과 본질적 첨점성과의 관계를 논하였다. 흥미로운 문제임에는 틀림없다.

마쓰 형식에 관한 참고 저서로 [7], [12], [17], [18], [30] 을 추천한다.

제 2 절 $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 상의 불변 미분 작용소

이제부터는

$$G = SL_{2,1}(\mathbb{R}),\ \ K = SO(2),\ \ \Gamma_1 = SL(2,\mathbb{Z}),$$

$$\Gamma_{1,2} \;=\; SL_{2,1}(\mathbb{Z})$$

이라 두자. 그리고

$$\mathcal{SP}_2 := \{\, Y \in \mathbb{R}^{(2,2)} \mid Y = {}^t Y > 0 \,\}$$

이라 하자. 그러면 G 는 $\mathcal{SP}_2 \times \mathbb{R}^{(1,2)}$ 상에서

$$(g,\alpha)\cdot(Y,V) := (gY\,{}^tg,\ (V+\alpha)\,{}^tg) \tag{2.1}$$

와 같이 추이적으로 작용한다. 여기서 $g \in SL(2,\mathbb{Z})$, $\alpha \in \mathbb{R}^{(1,2)}$, $Y \in \mathcal{SP}_2$, $V \in \mathbb{R}^{(1,2)}$ 이다. K 는 $(I_2, 0)$ 을 고정시키는 최대 기밀부분군이므로 $\mathcal{SP}_2 \times \mathbb{R}^{(1,2)}$ 는 등질공간 G/K 와 아래에 의하여 미분동상적이다.

$$G/K \ni (g,\alpha)K \longmapsto (g,\alpha)\cdot(I_2,0) \in \mathcal{SP}_2 \times \mathbb{R}^{(1,2)}. \tag{2.2}$$

$SL_2(\mathbb{R})$은 $\mathbb{H}$ 상에서

$$g\langle\tau\rangle := (a\tau+b)(c\tau+d)^{-1}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}),\ \tau\in\mathbb{H}$$

와 같이 추이적으로 작용함을 상기하자. 그러면 G 의 $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 의 작용 (0.2)는

$$(g,\alpha)\circ(\tau,z) = ({}^tg^{-1}\langle\tau\rangle,\ (z+\alpha\tau+\alpha_2)(-b\tau+a)^{-1})$$

으로 쓸수있다. 단 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,Z)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^{(1,2)}$ 이고 $(\tau, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$ 이다. $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ 는 등질공간 G/K 와 미분동상적이다. 구체적으로 설명하면

$$G/K \ni (g,\alpha)K \longmapsto (g,\alpha) \circ (i,0), \quad (g,\alpha) \in G \tag{2.3}$$

$\mathcal{SP}_2$의 임의의 원소 Y 는

$$Y = \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} y^{-1} & -xy^{-1} \\ -xy^{-1} & x^2y^{-1} + y \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

의 형태로 유일하게 나타낼 수 있음을 유의하라. 단 $x, y \in \mathbb{R}$ 이고 $y > 0$ 이다.

보조정리 2.1. *사상* $T : \mathcal{SP}_2 \times \mathbb{R}^{(1,2)} \to \mathbb{H} \times \mathbb{C}$ *를*

$$T(Y,V) := (x+iy,\ v_1(x+iy) + v_2) \tag{2.5}$$

으로 정의한다. 단 Y *는* (2.4)*의 형태이고* $V = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{(1,2)}$ *이다. 그러면* T *는* (0.2)*와* (2.1)*의 두 작용과 양립을 하는 전단사 사상이다. 실제로* $\mathcal{SP}_2 \times \mathbb{C}$ *와* $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ *는 복소다양체이며* T *는 겹해석적(biholomorphic) 사상이다.*

증명. 상기의 보조정리의 증명은 독자들에게 남겨두겠다.

이제 G의 작용 (1.2)에 불변인 $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ 상의 미분작용소들을 구하여 보자. G의 Lie 대수 $\mathfrak{g}$는

$$\mathfrak{g} = \left\{ (X,Z) \,\middle|\, X \in \mathbb{R}^{(2,2)},\ \sigma(X) = 0,\ Z \in \mathbb{R}^{(1,2)} \right\}$$

으로 주어지고 $\mathfrak{g}$ 상의 Lie 괄호는

$$[(X_1,Z_1),(X_2,Z_2)] = (X_1X_2 - X_2X_1,\ Z_2\,{}^tX_1 - Z_1\,{}^tX_2)$$

주어진다.

$$\mathfrak{k} = \left\{ (X,0) \in g \,\middle|\, X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ (X,Z) \in \mathfrak{g} \mid X = {}^tX \in \mathbb{R}^{(2,2)},\ \sigma(X) = 0,\ Z \in \mathbb{R}^{(1,2)} \right\}$$

이라 두자. 그러면 $\mathfrak{k}$는 K 의 Lie 대수이며 $\mathfrak{g}$는

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \quad \text{(direct sum)}$$

와 같이 분해된다. $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $\quad [\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ 이므로 등질공간 $\mathbb{H} \times \mathbb{C} = G/K$ 는 reductive 등질공간이다. (참고문헌 : [16]의 281 쪽). $\mathfrak{p}$ 상의 K 의 수반작용 (adjoint action) Ad 는

$$\mathrm{Ad}(k)((X,Z)) = (kX\,{}^tk,\ Z\,{}^tk), \quad k \in K,\ (X,Z) \in \mathfrak{p} \tag{2.6}$$

으로 주어진다는 사실을 쉽게 알수 있다. (2.6)은 유일하게 $\mathfrak{p}$의 다항식 대수 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{p})$상의 K의 작용 ρ로 확장된다. $\mathrm{Pol}(\mathfrak{p})^K$를 작용 ρ에 불변하는 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{p})$의 원소들로 이루어지는 부분대수라고 하자. $\mathbb{D}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$를 G의 작용 (0.2)에 불변인 $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$상의 미분작용소들로 이루어지는 대수라고 하자. 그러면 [16], 정리 4.9에 의하여 자연스런 선형 전단사 사상

$$D_{\lambda(\cdot)} : \mathrm{Pol}(\mathfrak{p})^K \to \mathbb{D}(\mathbb{H}\times\mathbb{C}), \quad P \longmapsto D_{\lambda(P)}$$

가 존재한다. 구체적으로 설명하면 (ξ_k) (단, $k = 1,2,3,4$) 가 $\mathfrak{p}$의 기저이고 $P \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{p})^K$이면
(2.7)

$$\left(D_{\lambda(P)}f\right)(\tilde{g}\circ(i,0)) = \left[P\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right) f((\tilde{g} * \exp(\sum_{k=1}^{4} t_k\xi_k))\circ(i,0))\right]_{(t_k)=0}$$

으로 주어진다. 단, $\tilde{g}\in G$이고 $f\in C^\infty(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$이다.

$$e_1 = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, (0,0)\right) \quad e_2 = \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, (0,0)\right)$$
$$f_1 = \left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, (1,0)\right) \quad f_2 = \left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, (0,1)\right)$$

이라 두자. 그러면 e_1, e_2, f_1, f_2는 $\mathfrak{p}$의 기저이다. $\mathfrak{p}$의 원소 (X,Z)에

$$X = \begin{pmatrix}x & y\\ y & -x\end{pmatrix}, \quad Z = (z_1, z_2)$$

와 같은 좌표계를 도입한다. 불변이론으로부터 아래의 결과를 얻는다.
□

보조정리 2.2. *아래의 다항식 P, ξ, P_1, P_2는 $\mathrm{Pol}(\mathfrak{p})^K$의 대수적 독립(algebraically independent)인 생성원들이다. 단*

$$\begin{aligned}
P(X,Z) &= \frac{1}{8}\sigma(X^2) = \frac{1}{4}(x^2+y^2),\\
\xi(X,Z) &= Z\,{}^tZ = z_1^2 + z_2^2,\\
P_1(X,Z) &= -\frac{1}{2}ZX\,{}^tZ = \frac{1}{2}(z_2^2 - z_1^2)x - z_1 z_2 y,\\
P_2(X,Z) &= \frac{1}{2}(z_2^2 - z_1^2)y + z_1 z_2 x.
\end{aligned}$$

증명. 상기의 증명을 독자에게 남겨 두겠다.

공식 (2.7)을 사용하여 P, ξ, P_1, P_2 에 대응하는 $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 상의 불변미분 작용소를 계산을 한다. 실변수 $t=(t_1,t_2), s=(s_1,s_2)$ 에 대하여

$$\begin{aligned}&\exp\,(\,t_1e_1+t_2e_2+s_1f_1+s_2f_2\,)\\ =\ &\left(\begin{pmatrix} a_1(t,s) & a_3(t,s)\\ a_3(t,s) & a_2(t,s)\end{pmatrix},\ (\,b_1(t,s),\, b_2(t,s)\,)\right)\end{aligned}$$

을 얻는다. 단,

$$\begin{aligned}
a_1(t,s) &= 1+t_1+\frac{1}{2!}\,(\,t_1^2+t_2^2\,)+\frac{1}{3!}\,t_1(t_1^2+t_2^2\,)\\
&\quad +\frac{1}{4!}\,(t_1^2+t_2^2)^2+\cdots\\
a_2(t,s) &= 1-t_1+\frac{1}{2!}\,(\,t_1^2+t_2^2\,)-\frac{1}{3!}\,t_1(t_1^2+t_2^2\,)\\
&\quad +\frac{1}{4!}\,(t_1^2+t_2^2)^2-\cdots,\\
a_3(t,s) &= t_2+\frac{1}{3!}\,t_2(\,t_1^2+t_2^2\,)+\frac{1}{5!}\,t_2(\,t_1^2+t_2^2\,)^2+\cdots,\\
b_1(t,s) &= s_1-\frac{1}{2!}\,(s_1t_1+s_2t_2)+\frac{1}{3!}\,s_1(t_1^2+t_2^2)\\
&\quad -\frac{1}{4!}\,(s_1t_1+s_2t_2)(t_1^2+t_2^2)+\cdots,\\
b_2(t,s) &= s_2-\frac{1}{2!}\,(s_1t_2-s_2t_1)+\frac{1}{3!}\,s_2(t_1^2+t_2^2)\\
&\quad -\frac{1}{4!}\,(s_1t_2-s_2t_1)(t_1^2+t_2^2)+\cdots.
\end{aligned}$$

기호편의상 $a_j(t,s), b_k(t,s)$ 를 간단히 a_j, b_k 로 표기한다. G 의 원소 (g,α) 를 고정시킨후

$$g=\begin{pmatrix} g_1 & g_{12}\\ g_{21} & g_2\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z}),\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^{(1,2)}$$

이라 표기한다. 그리고

$$(\tau(t,s),z(t,s))=(\,(g,\alpha)*\exp\,(\,t_1e_1+t_2e_2+s_1f_1+s_2f_2\,))\circ(i,0)$$

이라 놓고

$$\tau(t,s)=x(t,s)+i\,y(t,s)\quad\text{and}\quad z(t,s)=u(t,s)+i\,v(t,s)$$

이라 두자. 여기서 $x(t,s), y(t,s), u(t,s), v(t,s)$ 는 실함수이다. 지루한 계산에 의하여

$$\begin{aligned}
x(t,s) &= -(\tilde{a}\tilde{c}+\tilde{b}\tilde{d})(\tilde{a}^2+\tilde{b}^2)^{-1},\\
y(t,s) &= (\tilde{a}^2+\tilde{b}^2)^{-1},\\
u(t,s) &= (\tilde{a}\,\tilde{\alpha}_2-\tilde{b}\tilde{\alpha}_1)(\tilde{a}^2+\tilde{b}^2)^{-1},\\
v(t,s) &= (\tilde{a}\,\tilde{\alpha}_1+\tilde{b}\,\tilde{\alpha}_2)(\tilde{a}^2+\tilde{b}^2)^{-1}
\end{aligned}$$

을 얻는다. 단,

$$\begin{aligned}
\tilde{a} &= g_1a_1 + g_{12}a_3,\\
\tilde{b} &= g_1a_3 + g_{12}a_2,\\
\tilde{c} &= g_{21}a_1 + g_2a_3,\\
\tilde{d} &= g_{21}a_3 + g_2a_2,\\
\tilde{\alpha}_1 &= \alpha_1a_2 - \alpha_2a_3 + b_1,\\
\tilde{\alpha}_2 &= -\alpha_1a_3 + \alpha_2a_1 + b_2
\end{aligned}$$

이다. $t=s=0$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial t_1} &= 4\,g_1\,g_{12}\,(g_1^2 + g_{12}^2)^{-2},\\
\frac{\partial y}{\partial t_1} &= -2\,(g_1^2 - g_{12}^2)(g_1^2 + g_{12}^2)^{-2},\\
\frac{\partial u}{\partial t_1} &= 4\,g_1\,g_{12}\,(g_1\,\alpha_1 + g_{12}\,\alpha_2)(g_1^2 + g_{12}^2)^{-2},\\
\frac{\partial v}{\partial t_1} &= -\,2\,(g_1\,\alpha_1 + g_{12}\,\alpha_2)(g_1^2 - g_{12}^2)(g_1^2 + g_{12}^2)^{2},\\
\frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} &= -\,16\,g_1\,g_{12}\,(g_1^2 - g_{12}^2)(g_1^2 + g_{12}^2)^{-3},\\
\frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2} &= 8\,(g_1^2 - g_{12}^2)^2(g_1^2 + g_{12}^2)^{-3} - 4\,(g_1^2 + g_{12}^2)^{-1},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} &= -\,16\,g_1\,g_{12}\,(g_1\,\alpha_1 + g_{12}\,\alpha_2)(g_1^2 - g_{12}^2)(g_1^2 + g_{12}^2)^{-3},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} &= 4\,(g_1\,\alpha_1 + g_{12}\,\alpha_2)(g_1^4 + g_{12}^4 - 6\,g_1^2\,g_{12}^2)(g_1^2 + g_{12}^2)^{-3},\\
\frac{\partial x}{\partial t_2} &= -\,2\,(g_1^2 - g_{12}^2)(g_1^2 + g_{12}^2)^{-2},\\
\frac{\partial y}{\partial t_2} &= -\,4\,g_1\,g_{12}\,(g_1^2 + g_{12}^2)^{-2},\\
\frac{\partial u}{\partial t_2} &= -\,2\,(g_1\,\alpha_1 + g_{12}\,\alpha_2)(g_1^2 - g_{12}^2)(g_1^2 + g_{12}^2)^{-2},\\
\frac{\partial v}{\partial t_2} &= -\,4\,g_1\,g_{12}\,(g_1\,\alpha_1 + g_{12}\,\alpha_2)(g_1^2 + g_{12}^2)^{-2},\\
\frac{\partial^2 x}{\partial t_2^2} &= 16\,g_1\,g_{12}\,(g_1^2 - g_{12}^2)(g_1^2 + g_{12}^2)^{-3},\\
\frac{\partial^2 y}{\partial t_2^2} &= 32\,g_1^2\,g_{12}^2\,(g_1^2 + g_{12}^2)^{-3} - 4\,(g_1^2 + g_{12}^2)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = 16\, g_1\, g_{12}\, (\, g_1\, \alpha_1 \,+\, g_{12}\, \alpha_2\,)\, (\, g_1^2 \,-\, g_{12}^2\,)\, (\, g_1^2 \,+\, g_{12}^2\,)^{-3},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t_2^2} = -\,4\, (\, g_1\, \alpha_1 \,+\, g_{12}\, \alpha_2\,)\, (\, g_1^4 \,+\, g_2^4 \,-\, 6\, g_1\, g_{12}^2\,)\, (\, g_1^2 \,+\, g_{12}^2\,)^{-3}$$

을 얻는다. 그리고 $\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} = 1, \quad a_1 a_2 - a_3^2 = 1, g_1 g_2 - g_{12} g_{21} = 1$ 임을 유의하라. 상기의 사실들을 종합하여 아래와 같은 정리를 얻는다. □

정리 2.3. *공식* (2.11)*에 의하여* P, ξ, P_1, P_2 *에 대응되는* $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ *상의 불변 미분작용소를 각각* D, Ψ, D_1, D_2 *라고 하자. 그러면*

$$D = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + 2\, y\, v \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial v} \right), \tag{2.8}$$

$$\Psi = y \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right), \tag{2.9}$$

$$D_1 = 2\, y^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial u \partial v} - y^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \left(v \frac{\partial}{\partial v} + 1 \right) \Psi, \tag{2.10}$$

$$D_2 = y^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) - 2\, y^2 \frac{\partial^3}{\partial y \partial u \partial v} - v \frac{\partial}{\partial u} \Psi \tag{2.11}$$

이다. 여기서 $\tau = x + iy, \ z = u + iv$ *이고* x, y, u, v *는 실변수이다. 게다가*

$$[D, \Psi] = 2\, y^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) - 4\, y^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial u \partial v} - 2 \left(v \frac{\partial}{\partial v} \Psi + \Psi \right)$$

인 관계가 성립한다. 따라서 $\mathbb{D}(\mathbb{H} \times \mathbb{C})$ *는 가환대수가 아니다. 또 A. Selberg* [28]*의 의미에서 weakly symmetric 공간이 아니다.*

정리 2.4. $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ *상에 주어지는 Riemann 계량*

$$ds^2 = \frac{y + v^2}{y^3} (\, dx^2 + dy^2\,) + \frac{1}{y} (\, du^2 + dv^2\,) - \frac{2v}{y^2} (\, dx\, du + dy\, dv\,)$$

은 G *의 작용* (0.2)*에 불변인 Kaehler계량이다. Riemann 공간* $(\mathbb{H} \times \mathbb{C}, ds^2)$ *의 라플라스 작용소* □ *는*

$$\Box = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + (\, y + v^2\,) \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)$$

$$+2\,y\,v\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial u}+\frac{\partial^2}{\partial y\partial v}\right)$$

으로 주어진다. 즉 $\square = D + \Psi$.

증명. [35] 의 Proposition 2.4 를 참고하길 바란다. □

도움말 2.5. 임의의 두 양수 α, β에 대하여

$$ds^2_{\alpha,\beta} = \alpha\,\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \beta\,\frac{v^2(dx^2 + dy^2) + y^2(du^2 + dv^2) - 2\,yv\,(dx\,du + dy\,dv)}{y^3}$$

는 G 의 작용 (0.2)에 불변인 $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 상의 Kaehler계량이다. Riemann공간$(\mathbb{H}\times\mathbb{C}, ds^2_{\alpha,\beta})$ 의 라플라스 작용소 $\square_{\alpha,\beta}$ 는

$$\begin{aligned}\square_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{\alpha}\,y^2\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}) + \left(\frac{y}{\beta}+\frac{v^2}{\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\\ &\quad + \frac{2\,yv}{\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial u}+\frac{\partial^2}{\partial y\partial v}\right)\\ &= \frac{1}{\alpha}D + \frac{1}{\beta}\Psi\end{aligned}$$

으로 주어진다.

도움말 2.6. 지루한 계산으로 $(\mathbb{H}\times\mathbb{C}, ds^2)$ 의 스칼라 곡률이 -3 임을 알수 있다.

$(\mathbb{H}\times\mathbb{C}, ds^2)$ 의 라플라스 작용소 $\square$의 고유함수를 구하는 문제는 흥미롭다

문제 2.7. $\square$의 고유함수들을 구하여라.

아래에 $\square$의 고유함수들을 예로 들겠다

(ㄱ) 함수 $h(x,y) = y^{\frac{1}{2}}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|a|y)\,e^{2\pi iax}\quad (s\in\mathbb{C},\ a\neq 0)$ 는 고유값이 $s(s-1)$ 인 고유함수이다.
(ㄴ) y^s, y^sx, $y^su\,(s\in\mathbb{C})$ 는 고유값이 $s(s-1)$ 인 고유함수이다.
(ㄷ) y^sv, y^suv, $y^sxv\,(s\in\mathbb{C})$ 는 고유값이 $s(s+1)$ 인 고유함수이다.
(ㄹ) x, y, u, v, xu, uv 는 고유값이 0 인 고유함수이다.
(ㅁ) 모든 마쓰 형식들은 $\square$의 고유함수이다.

제 3 절 마쓰–야코비 형식

이 절에서는 □는 정리 2.4 에서 정의된 $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 상의 계량 ds^2 의 라플라스 작용소를 나타내고 $G = SL_{2,1}(\mathbb{R})$ 이다.

정의 3.1. $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 상에서 유계이고 매끄러운 함수 $f:\mathbb{H}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ 가 아래의 성질 (MJ1)-(MJ3)를 만족할때 함수 f 를 *마쓰-야코비* 형식이라고 한다.

(MJ1) 임의의 $\gamma\in\Gamma_{1,2}$에 대하여 $f(\gamma\circ(\tau,z)) = f(\tau,z),\quad (\tau,z)\in\mathbb{H}\times\mathbb{C}$.

(MJ2) f 는 □의 고유함수이다.

(MJ3) f는 무한점에서 기껏해야 다항식적인 증가성을 지니고 있다.

복소수 $\lambda\in\mathbb{C}$에 대하여 $\square f = \lambda f$의 성질을 만족하는 마쓰-야코비 형식들로 이루어진 벡터 공간을 $MJ(\Gamma_{1,2},\lambda)$ 로 표기한다. $\square f = \lambda f$ 가 타원적 편미분 방정식이므로 f 는 실해석적이다.

f가 $MJ(\Gamma_{1,2},\lambda)$ 의 원소라고 하면

$$\phi_f(g,\alpha) = f((g,\alpha)\circ(i,0)),\quad (g,\alpha)\in G \tag{3.1}$$

으로 정의되는 함수 $\phi_f: G\to\mathbb{C}$ 는 아래의 성질$(MJ1)_* - (MJ3)_*$를 만족한다.

$(MJ1)_*$ 임의의 $\gamma\in\Gamma_{1,2},\ x\in\Gamma,\ k\in K$ 에 대하여 $\phi_f(\gamma xk) = \phi_f(x)$ 이다.

$(MJ2)_*$ ϕ_f 는 (G, ds_0^2)상의 라플라스 작용소 □의 고유함수이다. 단 ds_0^2 는 $(\mathbb{H}\times\mathbb{C}, ds^2)$ 으로부터 유도되는 G 상의 불변계량이다.

$(MJ3)_*$ ϕ_f 는 적합한 다항식적인 증가성을 지니고 있다. (참고문헌: [5])

오른쪽 K-불변인 함수 $\phi: G\to\mathbb{C}$ (즉, 임의의 $x\in G,\ k\in K$ 에 대하여 $f_\phi(xk) = \phi(x)$ 인 함수) 가 주어져 있을때 함수 $f_\phi:\mathbb{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 를

$$f_\phi(\tau,z) = \phi(g,\alpha),\quad (\tau,z)\in\mathbb{H}\times\mathbb{C} \tag{3.2}$$

으로 정의한다. 단 (g,α)는 $(g,\alpha)\circ(i,0) = (\tau,z)$ 인 성질을 만족하는 G 의 원소이다. ϕ 가 G 상에서 유계이며 매끄러운 함수이면 f_ϕ 가 마쓰–야코비 형식이라는 사실을 쉽게 알 수 있다. 이제 $MJ(\Gamma_{1,2},\lambda)$ 의 원소인 마쓰–야코비 형식 f 를 비대칭공간 $S\mathcal{P}_2\times\mathbb{R}^{(1,2)}$ 상의 함수로 특징화하여 보자. 함수 $h_f: S\mathcal{P}_2\times\mathbb{R}^{(1,2)}\to\mathbb{C}$ 를

$$h_f(Y,V) = f((g, V\,{}^tg^{-1})\circ(i,0)) \tag{3.3}$$

으로 정의한다. 여기서 $(Y,V)\in S\mathcal{P}_2\times\mathbb{R}^{(1,2)}$ 이고 g 는 $Y = g\,{}^tg$ 인 G 의 원소이다. 그러면 h_f 는 아래의 성질 $(MJ1)^*$-$(MJ3)^*$ 를 만족한다.

$(MJ1)^*$ 임의의 $\gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$, $\delta \in \mathbb{Z}^{(1,2)}$ 에 대하여 $h_f(\gamma Y\,{}^t\gamma, (V+\delta)\,{}^t\gamma) = h_f(Y,V)$ 이다.

$(MJ2)^*$ h_f 는 등질공간$(\mathcal{SP}_2\times\mathbb{R}^{(1,2)}, ds_*^2)$ 상의 라플라스 작용소 $\Box_*$ 의 고유함수이다.

$(MJ3)^*$ h_f 는 적합한 다항식적인 증가성을 지니고 있다.

$(MJ2)^*$ 에서의 ds_*^2 과 $\Box_*$ 은 아래와 같이 주어진다. (Y,X) 가 보조정리 2.1 에서 주어진 좌표계이면

$$ds_*^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2) + \frac{1}{y}\{(x^2+y^2)\,dv_1 + 2\,x\,dv_1\,dv_2 + dv_2^2\,\}$$

이고

$$\Box_* = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{y}\left\{\frac{\partial^2}{\partial v_1} - 2x\frac{\partial^2}{\partial v_1\partial v_2} + (x^2+y^2)\frac{\partial^2}{\partial v_2^2}\right\}$$

이다.

도움말 3.2. 마쓰형식은 마쓰-야코비 형식이므로 집합

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid MJ(\Gamma_{1,2},\lambda) \neq 0\,\}$$

은 무한집합이다.

정리 3.3. *임의의 복소수 $\lambda \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $MJ(\Gamma_{1,2},\lambda)$ 는 유한차원의 벡터공간이다.*

증명. Harish-Chandra 의 강의 노트 [14] 의 정리 1, 8쪽과 [5] 의 191쪽의 결과로부터 상기의 정리를 증명할 수 있다.

f 를 $MJ(\Gamma_{1,2},\lambda)$ 의 원소인 마쓰-야코비 형식이라고 하자. 그러면 f 는

$$f(\tau+n,z) = f(\tau,z), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{3.4}$$

와

$$f(\tau, z+n_1\tau+n_2) = f(\tau,z), \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \tag{3.5}$$

의 변환을 만족한다. $\tau = x+iy,\ z = u+iv$ (x,y,u,v는 실변수) 으로 두면 f 는 실변수 x 와 u 의 함수로서 주기가 각각 1인 함수이므로

$$f(\tau,z) = \sum_{n,r\in\mathbb{Z}} c_{n,r}(y,v)\,e^{2\pi i(nx+ru)} \tag{3.6}$$

와 같은 푸리에 전개를 얻는다. 주어진 두 정수 n, r 에 대하여 푸리에 계수 $\varphi = c_{n,r}(y,v)$ 에 관하여 논하여 보자. 푸리에 계수 $c_{n,r}(y,0)$ 는 미

분 방정식

(3.7)

$$\left[y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(y+v^2)\frac{\partial^2}{\partial v^2}+2\,y\,v\frac{\partial^2}{\partial y\partial v}-\{(ay+bv)^2+b^2y+\lambda\}\right]\varphi=0$$

을 만족한다. 단, $a=2\pi n$, $b=2\pi r$ 인 상수이다. □

도움말 3.4. 함수 $u(y)=y^{1/2}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)$ 는 미분방정식 (3.7)의 해이며 $\lambda=s(s-1)$ 임을 알수 있다. 여기서 $K_s(z)$ 는 K-Bessel 함수이다. (참고문헌 : [20], [32])

제 4 절 형식적 Eisenstein급수

이제 (1.4)에서 정의된 Eisenstein 급수 $E_s(\tau)$ 처럼 비대칭 공간 $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 상에 이와 유사한 급수를 정의하여 마쓰-야코비 형식의 구성에 관한 문제를 논하여 보자.

(4.1) $$\Gamma_{1,2}^{\infty}:=\left\{\left(\begin{pmatrix}\pm1 & m\\ 0 & \pm1\end{pmatrix},(0,n,\kappa)\right)\;\middle|\; m,n,\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$$

를 $\Gamma_{1,2}:=SL_{2,1}(\mathbb{Z})$ 의 부분군이라 하자. 그리고

$$\gamma=\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\,(\lambda,\mu,\kappa)\right)\in\Gamma_{1,2}$$

이고 $(\tau,z)\in\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 일때 $(\tau_\gamma,z_\gamma):=\gamma\circ(\tau,z)$ 이라고 두자. 즉

$$\tau_\gamma=(a\tau+b)(c\tau+d)^{-1},\quad z_\gamma=(z+\lambda\tau+\mu)(c\tau+d)^{-1}$$

이다. $\gamma\in\Gamma_{2,1}^{\infty}$ 이면

(4.2) $$\operatorname{Im}\tau_\gamma=\operatorname{Im}\tau,\quad \operatorname{Im}z_\gamma=\operatorname{Im}z$$

임을 유의하라. 역으로 $\gamma\in\Gamma_{1,2}$ 이고 (4.2)를 만족하면 γ 는 $\Gamma_{1,2}^{\infty}$ 의 원소이다. 주어진 복소수 $s\in\mathbb{C}$ 에 관하여 형식적 Eisenstein 급수 $E_s(\tau,z)$ 를

(4.3) $$E_s(\tau,z):=\sum_{\gamma\in\Gamma_{1,2}^{\infty}\backslash\Gamma_{1,2}}(\operatorname{Im}\tau_\gamma)^s\cdot\operatorname{Im}z_\gamma$$

으로 정의한다. 그러면 $E_s(\tau,z)$ 는 형식적으로

(4.4) $$E_s(\gamma\circ(\tau,z))=E_s(\tau,z),\quad \forall\,\gamma\in\Gamma_{1,2}$$

의 성질과

(4.5) $$\Box E_s(\tau,z)=s(s+1)E_s(\tau,z)$$

의 성질을 만족한다는 사실을 쉽게 알수 있다. 여기서 □는 정리 2.4에서 정의된 $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 상의 계량 ds^2 의 라플라스 작용소를 나타내고 있다. 그

러나 임의의 $s \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $E_s(\tau, z)$ 는 변수 z 의 허수부분때문에 수렴하지 않는다 그래서 $E_s(\tau, z)$ 를 적절하게 변형하여(4.3)과 (4.4)의 성질을 만족하고 다항식적인 증가성을 지니는 급수를 구성할 필요가 있다. 실제로 마쓰 형식인 Eisenstein 급수 $E_s(\tau)$ 는 말할 것도 없이 마쓰-야코비 형식이지만 변수 $z = u + iv$ 가 관여하지 않는다. 제 1 절에서 언급하였지만 마쓰 형식중에서도 첨점 형식이 무수히 많다는 것은 알려져 있지만 이의 구체적인 구성은 아직까지도 알려져 있지 않다.

두 변수 τ 와 z 가 모두 관여하는 마쓰-야코비 형식의 구체적인 구성에 관한 문제를 제기하고 싶다

제 5 절 아코비 군의 표현

3차원 Heisenberg 군

$$H_{\mathbb{R}} := \{ (\lambda, \mu, \kappa) \mid \lambda, \mu, \kappa \in \mathbb{R} \}$$

상의 곱은

$$(\lambda, \mu, \kappa) \circ (\lambda', \mu', \kappa') = (\lambda + \lambda', \mu + \mu', \kappa + \kappa' + \lambda\mu' - \lambda'\mu)$$

으로 주어진다. 3차원의 특별 선형군 $SL(2, \mathbb{R})$ 과 Heisenberg 군 $H_{\mathbb{R}}$ 의 반직접곱 $G^J := SL(2, \mathbb{R}) \ltimes H_{\mathbb{R}}$ 은 6 차원의 Lie 군이며 야코비 군이라 불린다.

$$H_{\mathbb{Z}} := \{ (\lambda, \mu, \kappa) \in H_{\mathbb{R}} \mid \lambda, \mu, \kappa \in \mathbb{Z} \}$$

이라 두고

$$\Gamma^J := SL(2, \mathbb{Z}) \ltimes H_{\mathbb{Z}}$$

을 G^J 의 이산 부분군이라 하자. $Z(G^J)$ 를 G^J 의 중심군(center)이라고 할 때 $K^J = SO(2) \times Z(G^J)$ 이라 하자.

이제 G^J 의 유니터리 쌍대(unitary dual)를 상세하게 구하여 보자. 우선 $SL(2, \mathbb{R})$ 의 유니터리 쌍대를 상기한다. 이 절에서는 기호 편의상 $G = SL(2, \mathbb{R})$ 이라 두자. 그리고

$$M = \{\pm I_2\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} |a| & 0 \\ 0 & |a|^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}, \quad \bar{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}$$

이라 두자. a 가 0 이 아닌 실수이고 $\epsilon = \mathrm{sgn}\,(a)$ 이라 하면

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a| & 0 \\ 0 & |a|^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

임을 쉽게 알 수 있다. 이 분해는 유일하게 정해지며 $\bar{N}MAN$은 G의 조밀한 열린 부분분집합이다. 이 절에서 당분간 G의 원소 g를

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

이라 쓰기로 하자. G의 기약인 유니터리 표현은 아래와 같이 분류된다.

(ㄱ) Φ_n ($n \geq 0$ 인 정수)은 $(n+1)$ 차원의 기약 표현임:

Φ_n의 표현공간 $\mathcal{F}_n$은 차수가 n 이하인 $\mathbb{C}$ 상의 다항식들의 벡터공간이며 Φ_n 은

$$(\Phi_n(g)f)(z) = (-bz + d)^n f\left(\frac{az - c}{-bz + d}\right), \quad f \in \mathcal{F}_n$$

으로 주어진다.

(ㄴ) 주조성렬 (principal series) $\mathcal{P}^{+,i\alpha}$ 와 $\mathcal{P}^{-,i\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$:

먼저 실수 $\alpha \in \mathbb{R}$을 고정시킨다. $\mathcal{P}^{\pm,i\alpha}$의 표현공간은 $L^2(\mathbb{R})$ 이며 이 표현은

$$(\mathcal{P}^{\epsilon,i\alpha}(g)f)(x) = \begin{cases} |-bx + d|^{-1-i\alpha} f\left(\frac{az-c}{-bz+d}\right), & \text{if } \epsilon = +, \\ \operatorname{sgn}(-bx + d)\,|-bx + d|^{-1-i\alpha} f\left(\frac{az-c}{-bz+d}\right), & \text{if } \epsilon = - \end{cases}$$

으로 주어진다. $\mathcal{P}^{-,0}$를 제외하고는 나머지 $\mathcal{P}^{\epsilon,i\alpha}$ 는 기약이며

$$\mathcal{P}^{+,i\alpha} \cong \mathcal{P}^{+,-i\alpha}, \qquad \mathcal{P}^{-,i\alpha} \cong \mathcal{P}^{-,-i\alpha}$$

이다. 여기서 $\cong$ 는 유니터리 동치 (unitary equivalence)를 나타낸다. 실제로

$$\mathcal{P}^{\pm,i\alpha} = \operatorname{Ind}_{MAN}(\sigma \otimes e^{i\alpha} \otimes 1)$$

이다. 단, $e^{i\alpha}$ 는

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \longmapsto e^{i\alpha t}$$

로 주어지는 A의 지표이다.

(ㄷ) 보계열 (complementary series) $\mathcal{C}^s$ $(0 < s < 1)$:

$\mathcal{C}^s$의 표현공간 $\mathcal{C}(s)$는

$$\mathcal{C}(s) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; \|f\|_s^2 := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x)\overline{f(y)}}{|x-y|^{1-s}} dxdy < \infty \right\}$$

으로 주어지며

$$(\mathcal{C}^s(g)f) = |-bx + d|^{-1-s} f\left(\frac{az - c}{-bz + d}\right), \quad f \in \mathcal{C}(s)$$

이다. $\mathcal{C}^s$ 는 기약인 유니터리 표현이다.

(ㄹ) 이산표현 (discrete series) $\mathbb{D}_n^+$ 과 $\mathbb{D}_n^-$ $(n \geq 2,\ n \in \mathbb{Z}^+)$:

$n \geq 2$ 인 자연수 n을 고정시키자. $\tau \in \mathbb{H}$에 대하여 $\tau = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ 이라 표기하기로 한다.

$$\|f\|^2 := \int_{\mathbb{R}^2} |f(x+iy)|^2 y^{n-2} dxdy < \infty$$

의 성질을 만족하는 $\mathbb{H}$ 의 해석적 함수 $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ 들로 이루어진 힐베르트 공간을 $L^2_{n,+}(\mathbb{H})$ 이라 표기한다. $\mathbb{D}_n^+$ 는

$$(\mathbb{D}_n^+(g)f)(z) = (-bx+d)^n f\left(\frac{az-c}{-bz+d}\right), \quad f \in L^2_{n,+}(\mathbb{H})$$

으로 주어진다. $L^2_{n,+}(\mathbb{H})$ 의 복소공액공간을 $L^2_{n,-}(\mathbb{H})$ 이라 표기하면 $\mathbb{D}_n^-$ 는

$$(\mathbb{D}_n^-(g)f)(z) = \overline{(-bx+d)^n} f\left(\frac{az-c}{-bz+d}\right), \quad f \in L^2_{n,-}(\mathbb{H})$$

으로 주어진다.

(ㅁ) $\mathbb{D}_1^+$ 와 $\mathbb{D}_1^-$ (이산표현의 극한):

$L^2_{1,+}(\mathbb{H})$ 은

$$\|f\|^2_\infty = \sup_{y>0} \int_\infty^\infty |f(x+iy)|^2 dx$$

의 성질을 만족하는 $\mathbb{H}$ 상의 해석적 함수들의 벡터공간이며 $\mathbb{D}_1^+$ 의 표현공간이다. $\mathbb{D}_1^+$ 의 표현은 (ㄹ)에서 $n=1$ 을 대입하여 얻어진다. $L^2_{1,-}(\mathbb{H})$ 는 $L^2_{1,+}(\mathbb{H})$ 의 복소공액공간으로 $\mathbb{D}_1^-$ 의 표현공간이다. $\mathbb{D}_1^-$ 의 표현은 (ㄹ)에서 $n=1$ 을 대입하여 얻어진다.

(ㅂ) 비유니터리 주조성렬 $\mathcal{P}^{\epsilon,w}$ $(\epsilon = \pm,\ w \in \mathbb{C})$:

복소수 $w \in \mathbb{C}$에 대하여 힐베르트 공간 $L^2(\mathbb{R}, (1+x^2)^{\mathrm{Re}\, w} dx)$ 이 $\mathcal{P}^{\epsilon,w}$ 의 표현공간이다. $\mathcal{P}^{\epsilon,w}$ 는

$$(\mathcal{P}^{\epsilon,w}(g)f)(x) = \begin{cases} |-bx+d|^{1-w} f\left(\frac{az-c}{-bz+d}\right), & \text{if } \epsilon = +, \\ \mathrm{sgn}(-bx+d)\,|-bx+d|^{1-w} f\left(\frac{az-c}{-bz+d}\right), & \text{if } \epsilon = - \end{cases}$$

으로 주어진다. $w \notin i\mathbb{R}$ 이면 $\mathcal{P}^{\epsilon,w}$ 는 유니터리 표현이 아니다. 만약에 $w \in (0,1)$ 이면 노옴을 변형한 후에 $\mathcal{P}^{\epsilon,w}$ 를 유니터리 표현으로 만들 수 있다.

(ㅅ) 자명한 표현

G의 유니터리 쌍대에 관한 보다 자세한 내용은 [8], [19] 을 참고하길 바란다.

Heisenberg 군 $H_{\mathbb{R}}$ 의 Schrödinger 표현 $U_m\,(m\in\mathbb{R})$ 은

$$(U_m(\lambda,\mu,\kappa)f)(x)=e^{2\pi i m\{\kappa+(2x+\lambda)\mu\}}f(x+\lambda),\quad f\in L^2(\mathbb{R})$$

으로 주어진다. 상세한 것은 논문 [34]의 (2.18), 313 쪽을 참고하길 바란다. U_m 은 이의 중심지표(central character)가 $\sigma_m(\kappa):=e^{2\pi i m\kappa}\,(\kappa\in\mathbb{R})$ 으로 주어지는 $H_{\mathbb{R}}$ 의 기약 유니터리 표현이다. G 는 $H_{\mathbb{R}}$ 상에서

$$g\star(\lambda,\mu,\kappa):=g(\lambda,\mu,\kappa)g^{-1}=((\lambda,\mu)g^{-1},\kappa),\quad g\in G$$

와 같이 작용한다. 특히, 임의의 $\kappa\in\mathbb{R}$ 에 대하여 $g\star(0,0,\kappa)=(0,0,\kappa)$ 임을 유의한다. 임의의 실수 $m\in\mathbb{R}$ 과 $g\in G$ 에 대하여 $U_m^{[g]}$ 를

$$U_m^{[g]}(h):=U_m(ghg^{-1}),\quad h\in H_{\mathbb{R}}$$

으로 정의한다. 그러면, U_m 과 $U_m^{[g]}$ 는 동일한 중심지표 σ_m 을 지니므로 Stone-von Neumann 정리에 의하여 $U_m\cong U_m^{[g]}$ 이다. 다시 말하면 유니터리 선형 가역연산자 $\Phi_{W,m}(g):L^2(\mathbb{R})\longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ 가 존재하여

$$U_m^{[g]}(h)=\Phi_{W,m}(g)U_m(h)\Phi_{W,m}(g)^{-1},\quad h\in H_{\mathbb{R}}$$

인 관계를 만족한다. Schur 의 보조정리에 의하여

$$\Phi_{W,m}(g_1g_2)=c_m(g_1,g_2)\Phi_{W,m}(g_1)\Phi_{W,m}(g_2),\quad g_1,g_2\in G$$

의 성질을 만족시키는 사상 $c_m:G\times G\longrightarrow U(1)$ 이 존재한다. 여기서 $U(1):=\{\,z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\,\}$ 이다. 실은 사상 c_m 은 cocycle 조건을 만족한다. $\tilde{G}$ 를 승법인자(multiplier) c_m 을 지니는 metaplectic 군이라 하자. 즉, 집합인 관점에서는 $\tilde{G}=G\times\{\pm1\}$ 이고 $\tilde{G}$ 상의 곱은

$$(g,\epsilon)\cdot(g',\epsilon'):=(gg',c_m(g,g')\epsilon\epsilon')$$

으로 주어진다. $L^2(\mathbb{R})$ 상에서의 $\tilde{G}$ 의 표현 $\pi_W^{[m]}:\tilde{G}\longrightarrow GL(L^2(\mathbb{R}))$ 을

$$\pi_W^{[m]}((g,\epsilon)):=\Phi_{W,m}(g)\epsilon,\quad (g,\epsilon)\in\tilde{G}$$

으로 정의한다. $\pi_W^{[m]}$ 을 G 의 *Weil* 표현이라고 일컫는다. $\pi_W^{[m]}$ 은

$$\pi_W^{[m]}=\pi_W^{[m],+}\oplus\pi_W^{[m],-}$$

으로 분해된다. 여기서, $\pi_W^{[m],+}$ 와 $\pi_W^{[m],-}$ 은 $\tilde{G}$ 의 기약표현이다.

$\pi_{SW}^{[m]}:G^J\longrightarrow GL(L^2(\mathbb{R}))$ 을

$$\pi_{SW}^{[m]}(hg):=U_m(h)\pi_W^{[m]}(g),\quad g\in G,\ h\in H_{\mathbb{R}}$$

으로 정의한다. 그러면 $\pi_{SW}^{[m]}$ 은 G^J 의 사영표현(projective representation)이 되며 자연스럽게 $\tilde{G}^J:=\tilde{G}\ltimes H_{\mathbb{R}}$ 의 표현으로 확장된다는 사실

을 알 수 있다. 그래서 $\pi_{SW}^{[m]}$ 을 야코비 군 G^J 의 *Schrödinger-Weil* 표현이라 일컫는다.

변수 x, y, z, p, q, r 에 대하여

$$G(x,y,z,p,q,r) := \begin{pmatrix} x & 0 & y+z & q \\ p & 0 & q & r \\ y-z & 0 & -x & -p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이라 두자. 그리고

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= -i\,G(0,0,1,0,0,0), \\ \hat{Z}_0 &= -i\,G(0,0,0,0,0,1), \\ X_+ &= \tfrac{1}{2}\,G(1,i,0,0,0,0), \\ X_- &= \tfrac{1}{2}\,G(1,-i,0,0,0,0), \\ Y_+ &= \tfrac{1}{2}\,G(0,0,0,1,i,0), \\ Y_- &= \tfrac{1}{2}\,G(0,0,0,1,-i,0). \end{aligned}$$

이라 놓자. G^J 의 Lie 대수 $\mathfrak{g}^J$ 의 복소화를 $\mathfrak{g}^J_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^J \otimes \mathbb{C}$ 이라 표기한다. $\hat{Z}$, $\hat{Z}_0$, $X_\pm$, $Y_\pm$ 은 $\mathfrak{g}^J_{\mathbb{C}}$ 의 원소이며

$$[\hat{Z}_0, \mathfrak{g}^J_{\mathbb{C}}] = 0, \quad [\hat{Z}, Y_\pm] = \pm Y_\pm, \quad [\hat{Z}, X_\pm] = \pm 2X_\pm$$

와 같은 교환관계를 만족한다. 그러므로 (π, V) 가 $\mathfrak{g}^J_{\mathbb{C}}$ 의 기약표현이면 이의 표현공간 V 는 $V = \sum_{k\in\mathbb{Z}} V_k$ 으로 분해되며

$$\pi(\hat{Z}_0)V_k = \mu V_k, \quad \pi(\hat{Z})V_k = \rho_k V_k, \quad \pi(Y_\pm)V_k \subseteq V_{k\pm1}, \quad \pi(X_\pm)V_k \subseteq V_{k\pm2}$$

의 성질을 만족한다. 여기서 μ 와 ρ_k 는 표현 π에 의하여 결정되는 복소수이다.

Berndt 와 Schmidt 는 [4]에서 $m > 0$ 일 때 $\pi_{SW}^{[m]}$ 의 무한소 표현(infinitesimal representation)은 벡터공간 $V^+ = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{C}\, v_j$ 상에서 아래와 같이 작용하는 $\mathfrak{g}^J_{\mathbb{C}}$ 의 최저 무게표현(lowest weight representation)임을 보였다. 구체적으로 기술하면

$$\hat{Z}_0 v_j = \mu v_j, \quad Y_+ v_j = v_{j+1}, \quad Y_- v_j = -\mu j v_{j-1},$$

$$\hat{Z} v_j = (j + \frac{1}{2})\, v_j, \quad X_+ v_j = -\frac{1}{2\mu}\, v_{j+2}, \quad X_- v_j = \frac{\mu}{2}\, j(j-1) v_{j-2}$$

이다. 여기서 $\mu = 2\pi m$ 이고 $v_{-1} = v_{-2} = 0$ 이다. $m < 0$ 일 때 $\pi_{SW}^{[m]}$ 의 무한소 표현은 벡터공간 $V^- = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{C}\, v_{-j}$ 상에서 다음과 같이 작용하는 $\mathfrak{g}^J_{\mathbb{C}}$ 의 최고 무게표현임을 보였다. 구체적으로 적으면

$$\hat{Z}_0 v_{-j} = \mu v_{-j}, \quad Y_- v_{-j} = v_{-(j+1)}, \quad Y_+ v_{-j} = -\mu j v_{-(j-1)},$$

$$\hat{Z}v_{-j} = -(j+\frac{1}{2})\,v_{-j},\quad X_-v_{-j} = \frac{1}{2\mu}\,v_{-(j+2)},\quad X_+v_{-j} = -\frac{\mu}{2}\,j(j-1)v_{-(j-2)}$$

이다. 단, $v_1 = v_2 = 0$ 이다.

(ㅇ) 주조성렬 $\pi_{\alpha,\nu}\,(\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\},\ \nu = \frac{1}{2})$:

$\pi_{\alpha,\nu}$ 의 무한소 표현은 이의 표현공간 $W_{\alpha,\nu} = \sum_{j\in 2\mathbb{Z}+\nu+\frac{1}{2}} \mathbb{C}\,w_j$ 안에서

$$\hat{Z}w_l = \left(l-\frac{1}{2}\right)\,w_l,\quad X_\pm w_l = \frac{1}{2}\,\left(\alpha+1\pm\left(l-\frac{1}{2}\right)\right)\,w_{l\pm 2}$$

의 조건에 의하여 결정된다.

(ㅈ) 이산표현 $\pi_{k_0}^{\pm}\,(k_0 \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2})$:

$\pi_{k_0}^{\pm}$ 의 무한소 표현은 이의 표현공간 $W_{k_0}^{\pm} = \sum_{l\in 2\mathbb{Z}^+\cup\{0\}} \mathbb{C}\,w_{\pm l}$ 안에서

$$\hat{Z}w_{\pm l} = \pm(k_0+l)\,w_{\pm l},$$
$$X_\pm w_{\pm l} = w_{\pm(l+2)},$$
$$X_\mp w_{\pm l} = -\frac{l}{2}\left(k_0+\frac{l}{2}-1\right)\,w_{\pm(l-2)}$$

의 조건에 의하여 결정된다. Berndt와 Schmidt [4]는 G^J 의 기약인 유니터리 표현을 아래와 같이 구체적으로 분류를 하였다.

(J1) $\pi|_G$ (π 의 G 상으로의 제한)이 G 의 기약인 유니터리 표현이고 $\pi|_{H_\mathbb{R}}$ 은 $H_\mathbb{R}$ 의 자명한 표현인 G^J 의 표현 π:

(J2) 유도표현 $\mathrm{Ind}_{G_\psi^J}^{G^J}\tau$: 여기서 $\psi : H_\mathbb{R} \longrightarrow U(1)$ 는 $\psi(\lambda,\mu,\kappa) = e^{2\pi i\lambda}$ 으로 정의되는 $H_\mathbb{R}$ 의 지표이고 G_ψ^J 는

$$G_\psi^J = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h \,\middle|\, c \in \mathbb{R},\ h \in H_\mathbb{R} \right\}$$

으로 주어지는 G^J 의 부분군이다.

(J3) G^J 의 주조성렬:

$$\pi_{m,\alpha,\nu} = \pi_{SW}^{[m]} \otimes \pi_{\alpha,\nu},\quad m \in \mathbb{R}^\times,\ \alpha \in i\mathbb{R},\ \nu = \pm\frac{1}{2}.$$

(J4) G^J 의 보계열:

$$\pi_{m,\alpha,\nu} = \pi_{SW}^{[m]} \otimes \pi_{\alpha,\nu},\quad m \in \mathbb{R}^\times,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha^2 < \frac{1}{4},\ \nu = \pm\frac{1}{2}.$$

(J5) G^J 의 양부호 이산표현:

$$\pi^+_{m,k} = \pi^{[m]}_{SW} \otimes \pi^+_{k-\frac{1}{2}}, \quad m \in \mathbb{R}^\times,\ k \in \mathbb{Z}^+.$$

(J6) G^J 의 음부호 이산표현:

$$\pi^-_{m,k} = \pi^{[m]}_{SW} \otimes \pi^-_{k-\frac{1}{2}}, \quad m \in \mathbb{R}^\times,\ k \in \mathbb{Z}^+.$$

상기의 표현들 사이에서

$$\pi_{m,\alpha,\nu} \cong \pi_{m,-\alpha,\nu}$$

만이 유니터리 동치관계가 있고 나머지는 서로가 모두 유니터리 동치가 아니다.

이제 부터는 기호 편의상, $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ 이라 두자. R을 힐베르트 공간 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 상의 G의 오른쪽 정칙표현이라 하자. 다시 말하면

$$R(g)f(x) = f(xg), \qquad g \in G,\ x \in \Gamma\backslash G,\ f \in L^2(\Gamma\backslash G)$$

이다. 그러면 R은

$$L^2(\Gamma\backslash G) = L^2_{\text{cusp}}(\Gamma\backslash G) \oplus L^2_{\text{res}}(\Gamma\backslash G) \oplus L^2_{\text{cont}}(\Gamma\backslash G)$$

와 같이 분해된다. 여기서 $L^2_{\text{cusp}}(\Gamma\backslash G)$ 은 R의 첨점적 부분이며, $L^2_{\text{res}}(\Gamma\backslash G)$ 은 R의 잉여부분이고 은 $L^2_{\text{cont}}(\Gamma\backslash G)$ 는 R의 연속부분이다. 이에 관한 상세한 설명은 참고문헌 [18], [19]에 기술되어 있으므로 참고하길 바란다.

R^J를 힐베르트 공간 $L^2(\Gamma^J\backslash G^J)$ 상의 G^J의 오른쪽 정칙표현이라 하자. 그러면 R^J는

$$L^2(\Gamma^J\backslash G^J) = \left(\bigoplus_{m,n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_{m,n}\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{\nu=\pm\frac{1}{2}} \int_{\substack{\operatorname{Re} s=0\\ \operatorname{Im} s>0}} \mathcal{H}_{m,s,\nu}\, ds\right)$$

와 같이 분해된다는 사실이 Berndt에 의하여 증명되었다. (참고문헌: [2], [3], [4]) 여기서 $\mathcal{H}_{m,n}$은 이산표현 $\pi^{\pm}_{m,k}$ 또는 주조성렬 $\pi_{m,s,\nu}$와 동치인 표현공간이며 $\mathcal{H}_{m,s,\nu}$는 주조성렬 $\pi_{m,s,\nu}$의 표현공간이다. $\mathbb{H}\times\mathbb{C} = K^J\backslash G^J$ 이므로 힐베르트 공간 $L^2(\Gamma_{1,2}\backslash(\mathbb{H}\times\mathbb{C}))$ 의 원소는 $L^2(\Gamma^J\backslash G^J)$ 안에 있는 K^J-고정 (K^J-fixed) 원소이다. 그러므로 $L^2(\Gamma_{1,2}\backslash(\mathbb{H}\times\mathbb{C}))$ 에서 라플라스 작용소 $\square$에 관한 스펙트럴 분해를 얻는다.

제 6 절 끝맺음 말

마지막 절에서는 마쓰-야코비 형식의 연구와 관련된 여러 문제들을 제시하겠다.

문제 1. 정리 2.4 에서 언급된 $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ 상에서 라플라스 작용소 $\square$ 의 고유함수들을 구체적으로 구하여라. 그리고 $\square$ 의 스펙트럼에 관하여 연구 및 조사하여라.

문제 2. 마쓰-야코비 형식을 구체적으로 구성하여라. 특히 첨점 마쓰-야코비 형식의 구성법에 관하여 연구하여라. 제 1 절에서 언급하였지만 심지어 첨점 마쓰 형식의 구체적인 구성법도 아직 알려져 있지 않다.

문제 3. 마쓰-야코비 형식의 푸리에 계수를 구체적으로 기술하여라. 다시 말하면, 미분방정식 (3.7)의 해를 구하여라.

문제 4. 야코비 군의 대각합 공식을 구체적으로 기술하고 연구하여라.

문제 5. 야코비 군의 표현과 쌍대 수반궤적(coadjoint orbit)과의 연관성을 여러 각도에서 상세하게 연구하여라. 이 문제와 관련된 참고문헌으로 [36], [37] 을 추천한다.

문제 6. 마쓰-야코비 형식 상에서 Hecke 작용소의 이론을 전개하여라.

문제 7. Selberg 의 고유값 가설을 $\square$ 의 스펙트럼과 연관하여 연구 및 조사하여라. 이 문제는 Ramanujan 가설과 아주 밀접하게 연관되어 있다.

$$\mathbb{H}_n = \left\{ \Omega \in \mathbb{C}^{(n,n)} \mid \Omega = {}^t\Omega,\ \operatorname{Im}\Omega > 0 \right\}$$

을 Siegel 상반평면이라 하자. 심플렉틱 군 $Sp(n,\mathbb{R})$ 는 $\mathbb{H}_n$ 상에서

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \langle\Omega\rangle = (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1} \tag{6.1}$$

와 같이 추이적으로 작용한다. 여기서, A, B 는

$$ {}^tAC = {}^tCA, \quad {}^tBD = {}^tDB, \quad {}^tAD - {}^tCB = I_n \tag{6.2}$$

의 성질을 만족하는 $n \times n$ 실행렬이다.

자연수 m 과 n 에 대하여

$$H_{\mathbb{R}}^{(n,m)} = \{ (\lambda, \mu, \kappa) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}^{(m,n)},\ \ \kappa + \mu\, {}^t\lambda \text{ symmetric} \}$$

을 Heisenberg 군이라 하자. 이 Heisenberg 군에서의 곱은

$$(\lambda, \mu, \kappa) \circ (\lambda', \mu', \kappa') = (\lambda + \lambda', \mu + \mu', \kappa + \kappa' + \lambda\, {}^t\mu' - \mu\, {}^t\lambda')$$

으로 주어진다. $Sp(n, \mathbb{R})$ 과 $H_{\mathbb{R}}^{(n,m)}$ 의 반직접곱인 야코비 군

$$G_{n,m}^J = Sp(n, \mathbb{R}) \ltimes H_{\mathbb{R}}^{(n,m)}$$

은 등질공간 $\mathbb{H}_n \times \mathbb{C}^{(m,n)}$ 상에서

(6.3) $\qquad (M, (\lambda, \mu, \kappa)) \cdot (\Omega, Z) = (M\langle\Omega\rangle, (Z + \lambda\Omega + \mu)(C\Omega + D)^{-1}),$

와 같이 추이적으로 작용한다. 여기서, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 은 (6.2) 의 조건을 만족하는 $Sp(n, \mathbb{R})$ 의 원소이다. 논문 [36] 은 야코비 군 $G_{n,m}^J$ 의 표현에 관하여 부분적으로 다루고 있다.

$\Omega \in \mathbb{H}_n$ 의 좌표를 $\Omega = (\omega_{\mu\nu})$, $\omega_{\mu\nu} = x_{\mu\nu} + i y_{\mu\nu}$ ($x_{\mu\nu}$, $y_{\mu\nu}$ 은 실수) 이라 놓자. 그리고

$$\begin{aligned} \Omega &= X + iY, & X &= (x_{\mu\nu}), & Y &= (y_{\mu\nu}) \ \text{real}, \\ d\Omega &= (d\omega_{\mu\nu}), & dX &= (dx_{\mu\nu}), & dY &= (dy_{\mu\nu}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\Omega} &= \left(\tfrac{1+\delta_{\mu\nu}}{2} \tfrac{\partial}{\partial\omega_{\mu\nu}} \right), & \frac{\partial}{\partial\overline{\Omega}} &= \left(\tfrac{1+\delta_{\mu\nu}}{2} \tfrac{\partial}{\partial\overline{\omega}_{\mu\nu}} \right), \\ \frac{\partial}{\partial X} &= \left(\tfrac{1+\delta_{\mu\nu}}{2} \tfrac{\partial}{\partial x_{\mu\nu}} \right), & \frac{\partial}{\partial Y} &= \left(\tfrac{1+\delta_{\mu\nu}}{2} \tfrac{\partial}{\partial y_{\mu\nu}} \right), \end{aligned}$$

이라 두자. 그러면 아래의 n 개의 미분작용소

$$\mathbb{D}_k := 4\,\sigma \left(\left(Y \frac{\partial}{\partial\Omega} Y \frac{\partial}{\partial\overline{\Omega}} \right)^k \right), \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

은 작용 (6.1) 에 불변인 미분작용소들의 대수를 생성할 뿐만 아니라 대수적으로 독립이다. 또한

$$ds_n^2 = \sigma\left(Y^{-1} d\Omega\, Y^{-1} d\overline{\Omega}\right)$$

은 작용 (6.1) 에 불변인 Riemann 계량이고

$$\Delta_n = 4\,\sigma \left(Y \frac{\partial}{\partial\Omega} Y \frac{\partial}{\partial\overline{\Omega}} \right)$$

은 계량 ds_n^2 의 라플라스 연산자임을 유의하여라. 본인은 논문 [38] 에서 작용 (6.3) 에 불변인 Riemann 계량과 이의 라플라스 연산자를 구체적으로 계산하였다. 또한 작용 (6.3) 에 불변인 $\mathbb{H}_n \times \mathbb{C}^{(m,n)}$ 상의 미분작용소를 계산하였다.

기호 편의상

$$\Gamma_n := Sp(n,\mathbb{Z}), \quad \Gamma_{n,m} := Sp(n,\mathbb{Z}) \ltimes H_{\mathbb{Z}}^{(n,m)}, \quad \mathbb{H}_{n,m} := \mathbb{H}_n \times \mathbb{C}^{(m,n)}$$

이라 두자. 그러면 $\Gamma_{n,m}\backslash\mathbb{H}_{n,m}$ 은 Siegel 모듈라 다양체 $\Gamma_n\backslash\mathbb{H}_n$ 상의 화이버 속 (fiber bundle)이며 이의 화이버는 mn 차원의 아벨다양체(abelian variety)임을 유의하라.

문제 8. 작용 (6.3) 에 불변인 $\mathbb{H}_n \times \mathbb{C}^{(m,n)}$ 상의 미분작용소들의 대수를 구체적으로 계산하여라. 그리고 이 대수의 생성원(generators)과 이 생성원들의 대수적 관계를 구하여라.

$m = n = 1$ 인 특별한 경우를 생각하여 보자. 그러면 $\Gamma_{1,2}\backslash(\mathbb{H} \times \mathbb{C})$ 는 $\Gamma_1\backslash\mathbb{H}$ 상의 화이버 속이며 이의 화이버는 타원곡선이다. 가령, $[\tau] \in \Gamma_1\backslash\mathbb{H}$ 이면 $[\tau]$ 상의 화이버는 $E_\tau := \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$ 이다.

문제 9. $L^2(\Gamma_{1,2}\backslash(\mathbb{H}\times\mathbb{C}))$ 의 스펙트럴 분해를 구체적으로 구하고 $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ 의 스펙트럴 분해와의 연관성을 연구 및 조사하여라.

참고 문헌

[1] R. Berndt, *On Automorphic Forms for the Jacobi Group*, Jb.d. Math.-Verein. **97** (1995), 1–18.

[2] ———, *The Continuous Part of $L^2(\Gamma^J\backslash G^J)$ for the Jacobi Group G^J* , Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **60** (1990), 225–248.

[3] R. Berndt and S. Böcherer, *Jacobi Forms and Discrete Series Representations of the Jacobi Group*, Math. Z. **204** (1990), 13–44.

[4] R. Berndt and R. Schmidt, *Elements of the Representation Theory of the Jacobi Group*, Birkhäuser **163** (1998).

[5] A. Borel and H. Jacquet, *Automorphic forms and automorphic representations*, Proc. Symposia in Pure Math. XXXIII, Part 1 (1979), 189–202.

[6] R. W. Bruggeman, *Fourier coefficient of cusp forms*, Invent. Math. **45** (1978), 1–18.

[7] D. Bump, *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge University Press, 1997.

[8] R. W. Donley *Irreducible Representations of $SL(2,\mathbb{R})$*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics on Representation Theory and Automorphic Forms, American Math. Soc. **61** (1997), 51–59.

[9] H. Donnelly, *On the cuspidal spectrum for finite volume symmetric spaces*,J. Diff. Geometry **17** (1982), 239–253.

[10] I. Efrat, *Cusp forms and higher rank*, Thesis, New York Univerity, 1983.

[11] P. R. Garabedian, *Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.

[12] S. Gelbart, *Automorphic forms on adele groups*, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, No. 83, 1975.

[13] S. Gelbart and H. Jacquet, *A relation between automorphic representations on $GL(2)$ and $GL(3)$* , Ann. Ecole Norm. Sup. **11** (1978), 471–552.

[14] Harish-Chandra, *Automorphic forms on semi-simple Lie groups*, Notes by J.G.M. Mars, Lecture Notes in Math., vol. 62, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.
[15] S. Helgason, *Differential operators on homogeneous spaces*, Acta Math. **102** (1959), 239–299.
[16] ______, *Groups and geometric analysis*, Academic Press, 1984.
[17] H. Iwaniec, *Introduction to the spectral theory of automorphic forms*, Biblioteca de la Revista Mathemática Iberoamericana, Madrid, 1995.
[18] T. Kubota, *Elementary Theory of Eisenstein Series*, John Wiley and Sons, New York, 1973.
[19] S. Lang, $SL_2(\mathbb{R})$, Springer-Verlag, 1985.
[20] N. N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover, New York, 1972.
[21] J. B. Lewis, *Spaces of holomorphic functions equivalent to the even Maass cusp forms*, Invent. Math. **127** (1997), 271–306.
[22] W. Luo, Z. Rudnick and P. Sarnak, *On Selberg's eigenvalue conjecture*, Geom. Funct. Anal. **5, no. 2** (1995), 387–401.
[23] ______, *On the generalized Ramanujan eigenvalue conjecture for $GL(n)$*, Automorphic forms,automorphic representations and arithmetic, Proc. Sympos. Pure Math., Ameri. Math. Soc. **66, Part 2** (1999), 301–310.
[24] H. Maass, *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichlescher Reihen durch Funktionalgleichung*, Math. Ann. **121** (1949), 141–183.
[25] G. Mackey, *Unitary Representations of Group Extensions 1*, Acta Math. **99** (1958), 265–311.
[26] P. Sarnak, *On cusp forms*, Contemp. Math., Ameri. Math. Soc. **53** (1986), 393–407.
[27] ______, *Selberg's Eigenvalue Conjecture*, Notices of the Americam Math. Soc. **42** (1995), no. 11, 1272–1277.
[28] A. Selberg, *Hamonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47–87.
[29] ______, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proc. Symos. Pure Math., American Math. Soc., vol. III (1965), 1–15.
[30] A. Terras, *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications I*, Springer-Verlag, 1985.
[31] A. Venkov, *Approximation of Maass forms by analytic modular forms (Russian)*, Algebra i Analiz **6**, no. 6 (1994), 51–64 ; translation in St. Petersburg Math. J. **6** (1995), no. 6, 1167–1177.
[32] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, London, 1962.
[33] J.-H. Yang, *Invariant differential operators on $\mathcal{SP}_2 \times \mathbb{R}^{(1,2)}$*, MPI 97-17, Max-Planck Institut für Mathematik (Bonn), 1997.
[34] ______, *Lattice representations of Heisenberg groups*, Math. Ann. **317** (2000), 309–323.
[35] ______, *Maass-Jacobi forms*, submitted for publication, 2001.
[36] ______, *The Method of Orbits for Real Lie Groups*, Kyungpook Math. Journal **42** (2002), no. 2, 199–272.

[37] ———, *The orbit method for the Jacobi group*, preprint, 2003.
[38] ———, *Invariant metrics on the Siegel-Jacobi space*, preprint, 2003.
[39] P. Zograf, *A spectral proof of Rademacher's conjecture for congruence subgroups of the modular group*, J. reine und angewandte Math. **414** (1991), 113–116.

인하대학교 이과대학 수학통계학부
인천광역시 남구 용현동 253번지
402-751
E-mail: jhyang@inha.ac.kr