

점성을 고려한 공진주 실험의 이론적 모델링

Theoretical Modeling of the Resonant Column Testing with the Viscosity of a Specimen Considered

조 성 호*¹ Joh, Sung-Ho

황 선 근*² Hwang, Seon-Keun

권 병 성*³ Kwon, Byung-Sung

강 태 호*⁴ Kang, Tae-Ho

Abstract

The resonant column testing determines the shear modulus and material damping factor dependent on the shear strain magnitude, based on the wave-propagation theory. The determination of the dynamic soil properties requires the theoretical formulation of the dynamic behavior of the resonant column testing system. One of the theoretical formulations is the use of the wave equation for the soil specimen in the resonant column testing device. Wood, Richart and Hall derived the wave equation by assuming the linear elastic soil, and didn't take the material damping into consideration. Hardin incorporated the viscoelastic damping of soil in the wave equation, but he had to assume the material damping factor for the determination of the shear modulus. For the better theoretical formulation of the resonant column testing, this study derived a new wave equation to include the viscosity of soil, and proposed an approach for the solution. Also, in this study, the equation of motion for the testing system, which is another approach of the theoretical formulation of the resonant column testing, was also derived. The equation of motion leads to the better understanding of the resonant column testing, which includes the dynamic magnification factor and the phase angle of the response. For the verification of the proposed equation of motion for the resonant column testing, the finite element analysis was performed for the resonant column testing. The comparison of the dynamic magnification factors and the phase angles for the system response were performed.

요 지

공진주 실험은 탄성과 이론을 이용하여 흙의 동적 물성, 즉 전단변형률의 크기에 따른 전단탄성계수와 재료감쇠비를 측정하는 실험이다. 공진주 실험에 의한 시료의 동적물성의 측정은 공진주 실험 시스템의 동적 거동에 대한 이해를 전제로 한다. 공진주 실험의 시료 및 실험장치의 구성은 고정단-자유단 경계조건을 가지고 있는 연속보로 단순화할 수 있어서, Richart, Hall and Woods는 공진주 실험 시스템에 대한 파동방정식을 유도하였으나, 시료를 단순히 탄성으로 가정하였고 시료의 점성을 고려하지는 않았다. 그리고, Hardin은 파동방정식의 유도에서 시료의 점탄성을 고려하였으나, 시료의 전단탄성계수를 결정하기 위하여 시료의 점탄성을 가정하여야 하는 문제점을 가지고 있었다. 본 연구에서는 기존의 연구자들이 시도했던 공진주 실험 시스템에 대한 파동방정식을 새로운 측면에서 유도하였으며, 새로이 유도된 파동방정식의 해법을 제안하였다. 한편, 일반적으로 시스템에 대한 동적 거동을 이해하는 방법으로, 시스템의 운동방정식을 이용하는 방법이 있으나, 공진주 실험 시스템에 대한 동적 거동의 해석방법으로 이와 같은 운동방정식을 이용하는 해석방법을 연구한 경우는 거의 없었다. 운동방정식에 의한 해법은 시스템의 동적 증폭계수와 동적 응답

*1 정회원, 중앙대학교 건설대학 토목공학과 부교수 (Member, Associate Prof., Dept. of Civil Engrg., College of Construction Engrg., Chungang Univ., shjoh@cau.ac.kr)

*2 정회원, 한국철도기술연구원 책임연구원 (Member, Chief Researcher, Korea Railroad Research Institute)

*3 정회원, 한국철도기술연구원 연구원 (Member, Researcher, Korea Railroad Research Institute)

*4 정회원, 중앙대학교 대학원 토목공학과 박사과정 (Member, Ph.D. Candidate, Dept. of Civil Engrg., Chungang Univ.)

에 대한 위상각을 구할 수 있기 때문에, 파동방정식에 대한 해법보다 더 많은 정보를 활용할 수 있는 장점이 있다. 따라서, 본 연구에서는 공진주 실험 시스템에 대한 보다 기본적이고 많은 정보를 도출하기 위하여, 공진주 실험 시스템에 대한 운동방정식을 유도하였으며, 이를 이용하여 공진주 실험자료를 해석하는 새로운 해석기법의 제안을 위한 근간을 마련하였다. 그리고, 공진주 실험 시스템에 대한 유한요소 해석을 수행하여, 본 연구에서 제안한 공진주 실험시스템의 이론적 모델링의 타당성과 합리성을 검증하였다.

Keywords : Damping factor, Equation of motion, Resonant column testing, Shear modulus, Wave equation

1. 서론

흙과 암석의 동적 특성은 지진에 대한 지반의 부지응답, 자연적·인위적 동적하중에 대한 파동에너지의 전파특성 파악 등의 문제를 해결하는데 필수적인 인자이다. 흙과 암석의 동적 특성은 주로 실내실험으로 평가되어 왔으며, 공진주 실험, 비틀전단 실험, 단순전단 실험, 반복삼축압축 실험 등 필요에 따라 여러 가지 형태의 실험이 활용되었다. 이 중에서 공진주 실험은 파동에너지의 전파특성 평가에 필수적인 동적 물성, 즉 전단변형률의 크기에 따른 전단탄성계수와 재료감쇠비를 측정할 수 있기 때문에 특별히 활용 빈도가 높았었다.

공진주 실험은 탄성과 이론을 이용하여 시료의 영탄성계수 또는 전단탄성계수, 재료 감쇠비를 측정하는 실험으로 1930년대 일본의 Iida에 의해 최초로 도입되었다. 이후 공진주 실험기는 다양한 형태로 발전되어 연구되고 있다. 공진주 실험을 위한 장비는 기본적으로 고정단-자유단의 구조로 되어 있으며, 자유단에는 일반적으로 구동판(driving plate)과 같은 부착요소들이 연결되어 있다.

공진주 실험의 시료 및 실험장치의 구성은 비교적 단순하여 고정단-자유단 경계조건을 가지고 있는 연속보로 단순화할 수 있다. 그리고 구동판, 상단 캡 등과 같은 상단 부착요소들은 경계조건으로 표현될 수 있다. Richart and Hall and Woods(1969)은 공진주 실험 시스템을 이러한 단순화된 가정으로 모델링하여서, 공진주 실험 시스템에 대한 파동방정식을 유도하였다. 유도된 파동방정식은 연속보로 모델링한 시료의 점성은 고려하지 않고 단순히 탄성보로 가정하였다. 또한, Hardin(1965)은 보다 정확하게 공진주 실험 시스템을 모델링하여 파동방정식을 유도하였으며, 시료의 모델링에서는 점탄성을 가정하는 Kelvin 모델을 도입하였다. 그러나, Hardin의 파동방정식을 이용하여 공진주 실험자료로부터 시료의

전단탄성계수를 구하기 위해서는 시료의 점탄성은 일정한 상수로 가정하여야 하는 문제점이 존재하였다. 본 연구에서는 기존의 연구자들이 시도했던 공진주 실험 시스템에 대한 파동방정식을 새로운 측면에서 유도하였으며, 새로이 유도된 파동방정식의 해법을 제안하고자 하였다.

한편, 일반적으로 시스템에 대한 동적 거동을 이해하는 방법으로, 시스템의 운동방정식을 정립하고 주어진 동적하중에 대한 운동방정식의 편미분 방정식을 해석함으로써 시스템의 동적응답을 구하는 방법이 있다. 그러나, 공진주 실험 시스템에 대한 동적 거동의 해석방법으로 이와 같은 운동방정식을 이용하는 해석방법을 연구한 경우는 거의 없었다. 운동방정식에 의한 해법은 시스템의 동적 증폭계수와 동적 응답에 대한 위상각을 구할 수 있기 때문에, 파동방정식에 대한 해법보다 더 많은 정보를 활용할 수 있는 장점이 있다. 따라서, 본 연구에서는 공진주 실험 시스템에 대한 보다 기본적이고 많은 정보를 도출하기 위하여, 공진주 실험 시스템에 대한 운동방정식을 유도하고자 하였으며, 이를 이용하여 공진주 실험자료를 해석하는 새로운 해석기법의 제안을 위한 근간을 마련하고자 하였다.

그리고, 본 연구에서 제안한 공진주 실험시스템의 이론적 모델링의 타당성과 합리성을 검증하기 위하여, 공진주 실험 시스템에 대한 유한요소 해석을 수행하였으며 유한요소해석의 결과와 본 연구가 제안한 이론식의 결과를 비교하였다.

2. 공진주 실험의 개요

공진주 실험은 지반의 저변형률 동적 물성치를 구하기 위하여 가장 널리 사용되는 실내실험 방법으로서, 전단변형률이 10⁻³%보다 작은 변형률 영역에서 흙의 전단탄성계수, 재료감쇠비를 측정하는 실험법이다. 공진주

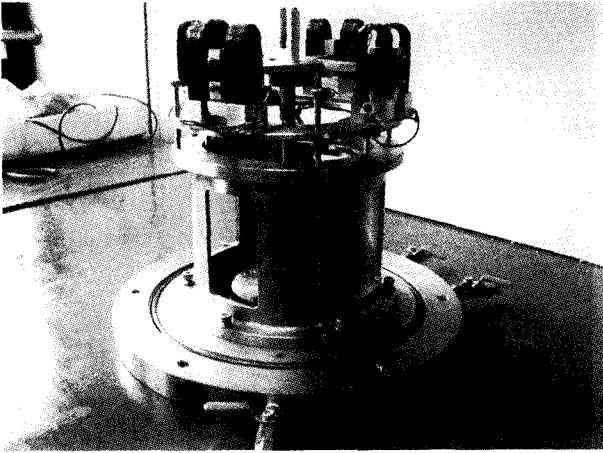


사진 1. 공진주 실험을 위한 하드웨어

실험을 위한 실험방식은 다수 있지만, 본 연구에서는 Stokoe에 의해서 개발된 Stokoe식 공진주 실험을 고려하였다. 공진주 실험을 위한 하드웨어는 사진 1에서 보듯이, 시료의 하단부는 고정되어 있고 상단부는 비틀림동이 가해지는 고정단-자유단(fixed-free)식이다.

공진주 실험의 기본원리는 원주형 시료에 비틀림동을 주어 기본 모드의 공진이 발생하도록 하는 것이다. Stokoe 식 공진주 실험기의 경우, 주어진 시료에 대한 공진 주파수의 결정은 가진 주파수를 일정하게 변화시키면서 시료에 진동을 가하는 연속정현파 측정(swept sine) 방식으로 진행한다. 일단 시료의 기본 공진주파수가 결정되면, 시료와 공진주실험 시스템의 관성모멘트, 고유주파수, 시료의 높이, 시료의 전단파 속도 등의 관계로부터 시료의 전단파 속도가 결정할 수 있고, 전단파 속도와 시료의 질량을 이용하여 전단탄성계수를 결정할 수 있다. 또한, 연속정현파 측정으로 구한 동적증폭 계수나 자유진동 실험으로 구한 자유진동곡선 등으로부터 재료감쇠비를 구할 수 있다.

3. 파동방정식에 의한 공진주 실험의 모델링

반복하중이 재하되는 임의의 매질에 있어서, 매질의 에너지 감쇠 특성은 재료감쇠에 의해서 표현할 수 있다. 재료감쇠는 여러 가지 방법으로 모델링될 수 있지만, 일반적인 방법은 재료감쇠로 인해 매질입자 속도에 비례하는 저항력이 발생한다고 가정하는 것이다. 이러한 경우 재료감쇠는 점성감쇠(viscous damping)라고 한다. 또 다른 방법은 재료의 탄성계수를 복소수로 표현하는 복소감쇠(complex damping)인데, 이는 재료감쇠에 의한

힘이 스프링 변위력과 90° 위상각 차이를 가지고 있다는 사실을 고려한 것이다. 그리고, 매질이 점탄성의 특성 즉, 매질내에 발생하는 응력이 매질의 변형률 크기뿐만 아니라 변형률 속도에도 비례하는 특성을 가정함으로써, 재료감쇠를 모델링할 수도 있다. 이러한 경우의 감쇠를 점탄성 감쇠(viscoelastic damping)라고 한다.

본 장에서는 점탄성 감쇠특성을 가지는 매질에 대하여 공진주 실험을 행할 때, 재료의 동적 거동을 이론적으로 유도하고자 한다. 점탄성 재료의 감쇠를 간단히 표현하는 방법은 켈빈(Kelvin) 모델을 사용하는 것이다. 켈빈모델의 스프링(spiral spring)은 재료의 전단탄성계수(G)를 나타내는 것이고, 감쇠기(damper)는 변형률 속도($\dot{\gamma}$)에 비례하는 저항을 표현하는 것이다. 따라서, 전단응력(τ)은 변형률(γ)과 변형률 속도($\dot{\gamma}$)에 의해 식 (1)과 같이 정의된다.

$$\tau = G\gamma + a\dot{\gamma} \quad (1)$$

여기서, a 는 재료의 점탄성계수를 나타낸다. 그림 1의 실린더 미소요소 dx 에 대해서 전단변형률(γ)은 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다. 여기서, θ 는 비틀림 각을 의미한다.

$$\gamma = r \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2)$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하여 정리하면, 식 (3)과 같이 된다. 그리고, 요소 내에 발생된 응력이 실린더 단면적 A 전체에 걸쳐 균일하다고 할 때, 그림 2의 비틀림력(T)은 식 (4)와 같이 표현할 수 있으며, x 축 방향으로의 미소변화량은 식 (5)와 같이 표현된다. 여기서, J 는 극관성 모멘트이다.

$$\tau = Gr \frac{\partial \theta}{\partial x} + ar \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \quad (3)$$

$$T = \frac{rJ}{r} = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} + Ja \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + Ja \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial t} \quad (5)$$

매질의 질량을 ρ , 미소요소의 길이를 Δx 라고 했을 때, 그림 1의 미소요소에 대하여 뉴턴의 제 2 법칙을 적용하면 식 (6), (7)과 같이 된다. 여기서, I 는 단면 2차모멘트, ρ 는 재료의 질량이다.

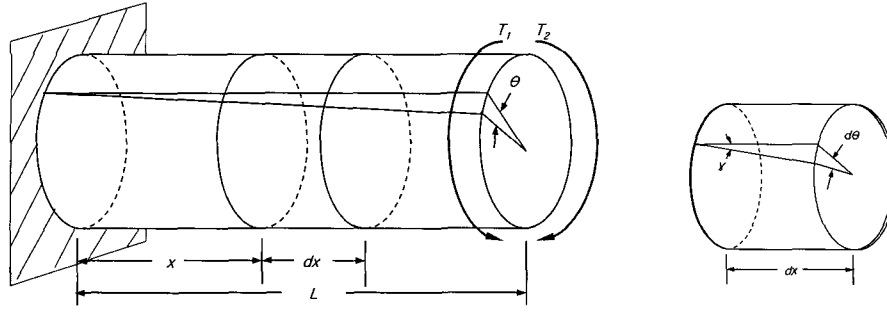


그림 1. 비틀림을 받는 원통형 봉과 그 미소요소

$$T = I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = J \rho dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = J \rho \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \quad (7)$$

식 (5)와 (7)을 등치시키면, 점탄성 재료의 실린더에 대한 파동방정식을 식 (8)과 같이 구할 수 있으며, 식 (8)은 식 (9)와 식 (10)으로 간략화될 수 있다.

$$GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + Ja \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial t} = J \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{a}{\rho} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (9)$$

$$v_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (10)$$

여기서, $v_s^2 = G/\rho$, $b^2 = a/\rho$ 이다. 식 (10)의 일반해는 변수분리법을 적용하여 구할 수 있으며, 식 (10)의 일반해는 식 (11)과 같은 형태의 해로 표현될 수 있다.

$$\theta(x, t) = U(x)q(t) \quad (11)$$

따라서, θ 의 x , t 에 대한 도함수를 구하여 식 (10)에 대입하면, 식 (12)의 형태로 표현할 수 있으며, 변수분리법의 적용을 위하여 식 (13)와 같이 정리할 수 있다.

$$v_s^2 \frac{d^2 U}{dx^2} q + b^2 \frac{d^2 U}{dx^2} \dot{q} = U \ddot{q} \quad (12)$$

$$\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{\ddot{q}}{(v_s^2 q + b^2 \dot{q})} \quad (13)$$

식 (13)의 좌변은 x 만의 함수이고, 우변은 t 만의 함수이므로, 양변은 하나의 상수로 표현되어야 한다. 따라서, 식 (13)으로 표현되는 상수를 $-\lambda^2$ 이라고 할 때, 식 (13)으로부터 식 (14), (15)와 같은 두 개의 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \lambda^2 U = 0 \quad (14)$$

$$\ddot{q} + b^2 \lambda^2 \dot{q} + v_s^2 \lambda^2 q = 0 \quad (15)$$

식 (15)는 식 (16)과 같은 보다 친숙한 표현으로 나타낼 수 있다.

$$\ddot{q} + 2\xi\omega\dot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (16)$$

여기서, $\omega^2 = v_s^2 \lambda^2$, $2\xi\omega = b^2 \lambda^2$ 이며, 재료감쇠비 ξ 는 식 (17)과 같이 달리 표현된다.

$$\xi = \frac{b^2 \lambda^2}{2\omega} = b^2 \frac{\omega^2}{v_s^2} \frac{1}{2\omega} = \frac{a}{\rho} \frac{\omega}{2v_s^2}$$

$$\xi = 0.5 \frac{a\omega}{G} \quad (17)$$

식 (17)의 재료감쇠비는 ASTM D4015에 정의되어 있는 공진주 실험편의 재료감쇠비와 동일한 표현이 된다.

한편, λ 를 ω/v_s 로 치환하여 식 (14)에 대입하고, 상미분 방정식을 풀면, 그 해는 식 (18)과 같이 표현된다.

$$U(x) = A \cos \frac{\omega}{v_s} x + B \sin \frac{\omega}{v_s} x \quad (18)$$

또한, 식 (16)의 해는 식 (19)와 같이 표현된다.

$$q(t) = e^{-\xi\omega t} \{ C \cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + D \sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) \} \quad (19)$$

연속체는 무수히 많은 고유주파수 ω_i 를 가지고 있기 때문에, 식 (10)의 일반해는 식 (20)과 같이, 정규모드의 합으로 표현된다. 여기서, C_i , D_i 는 임의의 상수이다.

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1,2,\dots}^{\infty} U_i(x) e^{-\xi_i \omega_i t} \{ C_i \cos(\omega_i \sqrt{1-\xi_i^2} t) + D_i \sin(\omega_i \sqrt{1-\xi_i^2} t) \} \quad (20)$$

공진주 실험에서의 시료는 고정단-자유단 조건을 가지고 있기 때문에, 식 (21)의 경계조건을 적용하면, 식 (20)은 식 (22)로 정리된다.

$$\theta(0, t) = 0 \quad (21)$$

$$\theta(x, t) = E \sin \frac{\omega_n x}{v_s} e^{-\xi \omega t} \sin(\omega_d t + \delta) \quad (22)$$

여기서, $E = B\sqrt{C^2 + D^2}$, $\delta = \tan^{-1}(C/D)$ 이다.

한편, 공진주 실험에서의 시료에는 시료상단에 상단 캡(top cap), 구동판(driving plate), 영구자석과 같은 요소가 연결되어 있다. 따라서, 시료와 상단연결요소 사이에 비틀력에 관한 평형조건이 성립되어야 한다. 시료에 가해지는 비틀력은 식 (23)으로 표현되며, 상단연결요소에서의 각변형량으로 인한 비틀력은 식 (24)로 표현할 수 있다. 여기서, I_0 는 상단연결요소의 단면 2차 모멘트이다.

$$T = \frac{\tau l}{r} = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} + Ja \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \quad (23)$$

$$T = I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (24)$$

따라서, 결과적으로 비틀력에 관한 평형방정식은 식 (25)와 같이 정리된다.

$$GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} + Ja \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (x=L) \quad (25)$$

식 (25)를 만족하는 조건을 구하기 위한 하나의 방법으로 식 (22)식을 식 (25)에 대입하면, 최종적으로 식 (26)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{I}{I_0} \cdot [-\{ \sin \tilde{t} + 2\xi \sin(\tilde{t} - \epsilon) \}] \\ & = \beta \tan \beta \cdot \sin(\tilde{t} - 2\epsilon) \end{aligned} \quad (26)$$

이 된다. 여기서 $\beta = \omega_n L / v_s$, $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, $\epsilon = \tan^{-1} \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$, $\tilde{t} = \omega_d t + \delta$ 이다. 이 중, ϵ 와 ξ 의 조건은 $\xi = -\cos \epsilon$ 의 관계식으로 정리되는데, 이를 이용하면, 식 (27)의 등식이 성립함을 확인할 수 있다. 따라서, 식 (26)은 식 (28)로 간략화된다.

$$\sin \tilde{t} + 2\xi \sin(\tilde{t} + \epsilon) + \sin(\tilde{t} + 2\epsilon) = 0 \quad (27)$$

$$\frac{I}{I_0} = \beta \tan \beta \quad (28)$$

결과적으로 점탄성을 고려하여 유도한 공진주 실험의 파동방정식은 식 (9)와 같이 정리되었으며, 고정단-자유단 공진주 실험의 경계조건은 파동방정식을 식 (28)의 식으로 단순화시켰다. 그러나, 식 (28)은 점탄성을 고려하지 않은 공진주 실험의 파동방정식과 동일한데, 이는 식 (28)이 점탄성에 관련된 변수를 포함하고 있지 않고 단지 고유주파수와 관련된 전단파 속도만 포함하고 있기 때문이다. 따라서, 점탄성을 고려한 파동방정식을 이용하여 공진주 실험시 시료의 점탄성 특성을 파악하기 위해서는, 식 (25)를 유한차분법 또는 유한요소법으로 해석해낼 필요가 있다.

4. Lagrange 방정식에 의한 공진주 실험의 모델링

일반적으로 운동방정식에 의한 해법은 시스템의 동적 증폭계수와 동적 응답에 대한 위상각을 구할 수 있기 때문에, 파동방정식에 대한 해법보다 더 많은 정보를 활용할 수 있는 장점이 있다. 따라서, 본 연구에서는 공진주 실험 시스템에 대한 보다 기본적인 많은 정보를 도출하기 위하여, 공진주 실험 시스템에 대한 운동방정식을 유도하였다.

공진주 실험에서 시료의 동적 거동을 표현하는 운동방정식을 구하기 위한 방법으로 Lagrange 방정식을 이용하였다. 공진주 실험에서의 시료는 무한 개의 자유도를 가지는 연속체로 모델링하여야 한다. Lagrange 방정식은 식 (29)와 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = Q_i \quad (29)$$

여기서, q_i 는 일반화된 좌표, T 는 시스템의 총 운동에너지, Φ 는 시스템의 위치에너지이다.

Lagrange 방정식을 이용하기 위해서는 운동에너지와 위치에너지를 정의하여야 하는데, 공진주 실험 시스템이 연속체인 관계로, 변위 θ 를 식 (30)으로 정의하도록 한다.

$$\theta = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} U_i q_i \quad (30)$$

여기서, U_i 는 공간좌표 x 의 함수로서 정규모드(normal-mode) 함수를 말한다. 정규모드 함수는 파동방정식의 일반해인 식 (22)를 근거로 하여 식 (31)로 정의할 수 있다.

$$\theta(x, t) = E \sin \frac{\omega x}{v_s} e^{-\xi \omega t} \sin(\omega_d t + \delta) \quad (22 \text{ again})$$

$$U_i(x) = \sin \frac{\omega x}{v_s} \quad (31)$$

공진주 실험에서 시료에 저장되는 위치에너지 Φ 는 식 (32)로 표현할 수 있다.

$$\Phi = \frac{GI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{GI}{2} \int_0^L (\sum U_i' q_i)^2 dx \quad (32)$$

여기서, U_i' 은 식 (33)으로 표현된다.

$$U_i' = \frac{\omega_i}{v_s} \cos \frac{\omega x}{v_s} \quad (33)$$

q_j 와 같은 특정 q_i 에 대한 Φ 의 편미분은 식 (34)로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_j} = GI \int_0^L (\sum U_i' q_i) U_j' dx$$

즉,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_j} = \frac{I \omega_j^2}{2} (\beta^* \sin \beta^* + 1) q_j \quad (34)$$

여기서, $\beta^* = 2\omega_j L / v_s$ 이다.

공진주 실험에서 시료의 운동에너지는 식 (35)와 같이 정의된다.

$$T = \frac{I \rho}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_{x=L}^2 \quad (35)$$

특정 좌표 q_i 에 대한 운동에너지의 미분식은 식 (36)과 같이 0이 된다. 이는 운동에너지 T 가 q_i 의 함수가 아니기 때문이다.

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 \quad (36)$$

Lagrange 방정식에서 외력인 Q_j 는 식 (37)로 결정된다.

$$dW_j = Q_j dq_j \quad (37)$$

그리고, 특정 좌표 q_i 의 미소변화량 δq_i 이 발생했을 때, 외부 비틀력 $T(t)$ 와 재료감쇠력 $F_D(t)$ 에 의한 일 dW_j 는 식 (38)로 표현된다.

$$dW_j = (T \delta \theta)_{x=L} - F_D r \delta \theta \quad (38)$$

외부 비틀력은 시료 상단 연결요소에 작용되는 것으로, 비틀력에 의해 행해진 일은 식 (39)로 표현된다.

$$\begin{aligned} (T \delta \theta)_{x=L} &= T_0 \sin \omega t \cdot (\delta \theta)_{x=L} \\ &= T_0 \sin \omega t \cdot \left(\sin \frac{\pi x}{2L} \delta q_j \right)_{x=L} \end{aligned}$$

또는,

$$(T \delta \theta)_{x=L} = T_0 \sin \omega t \cdot \delta q_j \quad (39)$$

한편, 시료의 재료감쇠로 인해 작용되는 단위부피당 감쇠력을 식 (40)과 같이 나타냈을 때, 감쇠력에 의해서 행해진 일, $F_D r \delta \theta$ 는 식 (41)과 같이 된다.

$$F_D = \tilde{c} r d \theta d r d x \quad (40)$$

$$F_D r \delta \theta = \int_0^L \int_0^R \int_0^{2\pi} (\tilde{c} r d \theta d r d x) r \frac{\partial \theta}{\partial t} r \delta \theta$$

또는,

$$F_D r \delta \theta = \frac{1}{4} c R^2 \dot{q}_i \delta q_i \quad (41)$$

그리고, \dot{q}_j 와 같은 특정 \dot{q}_i 에 대한 운동에너지의 편미분은 식 (42)와 같이 표현가능하다.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = J \rho \int_0^L (\sum U_i \dot{q}_i) U_j \dot{q}_j + I_0 \{ (\sum U_i \dot{q}_i) U_j \}_{x=L}$$

즉,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \left\{ I \left(1 - \frac{1}{\beta^*} \sin \beta^* \right) + I_0 (1 - \cos \beta^*) \right\} \dot{q}_i \quad (42)$$

그리고, 식 (26)의 시간에 대한 미분식은 식 (43)과 같다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{1}{2} \left\{ I \left(1 - \frac{1}{\beta^*} \sin \beta^* \right) + I_0 (1 - \cos \beta^*) \right\} \ddot{q}_i \quad (43)$$

식 (34), (36), (38), (39), (41), (43)을 Lagrange 방정식 (29)에 대입하면 식 (44)를 얻을 수 있으며, 더욱 간단하게 식 (45)로 표현될 수 있다.

$$\ddot{q}_i + \frac{c R^2}{2 I^*} \dot{q}_i + \omega_i^2 \left(1 + \frac{1}{\beta^*} \sin \beta^* \right) \frac{I}{I^*} q_i = \frac{T_0}{I^*} \sin \omega t \quad (44)$$

$$\ddot{q}_i + 2 \xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{T_0}{I^*} \sin \omega t \quad (45)$$

여기서, I^* 는 식 (46)을 간략하게 표현한 것이다.

$$I^* = I(1 - \frac{1}{\beta^*} \sin \beta^*) + I_0(1 - \cos \beta^*) \quad (46)$$

식 (45)의 고유주파수는 식 (44)와 (46)과의 관계로부터, 식 (47)의 관계식을 도출한다.

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\beta^*(1 - \cos \beta^*)}{2 \sin \beta^*} \quad (47)$$

식 (47)은 간단한 삼각함수의 관계식을 이용하면, 널리 알려진 관계식인 식 (28)로 귀결된다.

$$\frac{I}{I_0} = \beta \tan \beta \quad (28 \text{ gain})$$

또한, 식 (47)을 사용하면, 식 (46)은 식 (48)과 같이 단순하게 정리할 수 있다.

$$I^* = I(1 + \frac{1}{\beta^*} \sin \beta^*) \quad (48)$$

한편, 식 (45)의 특이해는 식 (49)와 같이 설정할 수 있으며, 이를 식 (49)에 대입하여 정리하면, 식 (50)의 관계식을 얻을 수 있다.

$$q_i = A_i e^{j\omega t}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (49)$$

$$q_i = |A_i| \sin(\omega t - \phi_i) \quad (50)$$

여기서,

$$|A_i| = \frac{T_0/(\omega_i^2 I^*)}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_i)^2]^2 + [2\xi_i(\omega/\omega_i)]^2}} \quad (51)$$

$$\tan \phi_i = \frac{2\xi_i(\omega/\omega_i)}{1 - (\omega/\omega_i)^2} \quad (52)$$

결과적으로, 공진주 실험에서 시료의 거동은 식 (53)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \theta_j(x, t) &= \sum U_j(x) q_j(t) \\ &= \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} |A_i| \sin \frac{\omega_i x}{v_s} \sin(\omega t - \phi_i) \end{aligned} \quad (53)$$

특별히, 기본모드에 대한 동적증폭계수는 식 (54)와 같이 정리되며, 간략히 식 (55)로 표현된다.

$$M = \frac{T_0/\omega_i^2 I^*}{T_0/K_{sp}} \quad (54)$$

$$M = \frac{4I}{\beta^2 I^*} \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_i)^2]^2 + [2\xi_i(\omega/\omega_i)]^2}} \quad (55)$$

5. 공진주 실험의 유한요소 해석

5.1 유한요소 모델링

앞에서 유도한 공진주 실험에 대한 운동방정식의 타당성을 검증하기 위하여, 공진주 실험을 유한요소해석으로 모사하였다. 본 연구에서 수행한 유한요소해석은 상용프로그램인 ABAQUS에 의해 수행하였으며, 공진주 실험을 위한 시료와 구동판에 대한 유한요소모델은 그림 2와 같다. 공진주 실험을 위한 시료는 3차원 요소를 이용하여 실제 시료의 크기를 갖도록 하였으며, 일정한 탄성계수를 가지는 탄성체로 모델링하였다. 시료의 직경은 5 cm, 높이는 10 cm가 되도록 하였고, 시료의 하부는 바닥면에 완전히 고정되어 있고, 시료의 상부는 구동판과 밀착되어 미끄럼이 발생하지 않도록 하였다. 시료의 기본물성은 표 1에 요약한 바와 같이, 일반적인

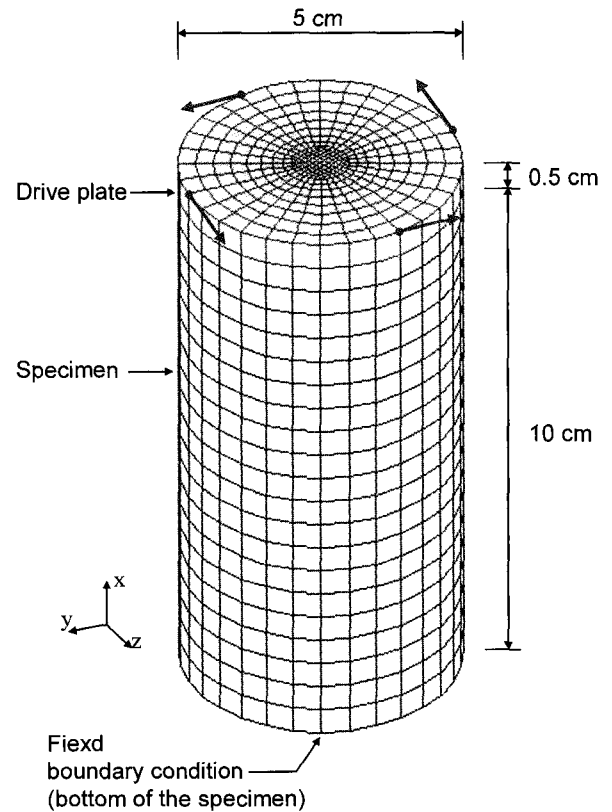


그림 2. 공진주 실험 시스템의 유한요소 모델

표 1. 유한요소해석에 사용된 공진주 실험 시스템의 기본물성

요소	물성	재료	단위중량 (kg/m ³)	탄성계수 (MPa)	전단파 속도 (m/sec)	포아송비
시료		토사	1900	114	150	0.333
구동판 (driving plate)		알루미늄	2710	26000	1897	0.333

토사의 물성을 갖도록 하였다. 구동판의 경우는 실제 형상을 사용하기보다는, 시료의 상단에 연결된 부착요소 (added mass)로서의 역할과 시료 상단표면의 비틀림을 방지하는 역할을 할 수 있도록 0.5 cm 두께의 디스크 형상을 갖도록 하였다. 구동판의 기본물성도 표 1에 요약되어 있다. 그리고, 본 유한요소해석에서는 시료의 동적 거동을 측정하는 가속도계가 시료 상단의 외부면에 설치되어 있는 것으로 가정하였다.

5.2 조화진동의 공진주실험에 대한 유한요소 해석

공진주 실험은 단계적으로 주파수를 변화시켜 가면서 일정 주파수의 조화진동(harmonic vibration)을 시료에 가하여 시료의 공진주파수를 찾는 실험이다. ABAQUS를 이용한 유한요소해석에 있어서도 실제 공진주 실험을 모사하기 위하여, ABAQUS의 동적해석 기법 중의 하나인 “Steady State Dynamics” 해석을 수행하였다. “Steady State Dynamics” 해석에서는 사용자가 입력한 최소주파수에서부터 최대주파수까지 일정 간격으로 주파수를 변화시켜 가면서 각 주파수의 조화진동에 대한 시료의 거동을 구하는 것이다.

“Steady State Dynamics” 해석을 수행하기 앞서서 행한 고유치 해석에서는 주어진 모델의 정규모드를 구할 수 있으며, 각 정규모드에 대한 고유주기를 구할 수 있다. 그림 2의 공진주 실험시스템에 대한 정규모드와 고유주기는 그림 3에 도시한 바와 같다. ABAQUS의 고유치 해석에 의하면, 공진주 실험에서와 같은 비틀전단 진동에 상응하는 정규모드는 세 번째 모드이며, 이 때의 고유주기는 165.19 Hz로 구해졌다. 따라서, “Steady State Dynamics” 해석을 위한 주파수 대역은 165.19 Hz를 포함하여야 한다. 본 연구에서는 “Steady State Dynamics” 해석을 위한 주파수 대역을 118~213 Hz로 설정하였다.

그림 2의 공진주 실험시스템 유한요소 모델에 대한 “Steady State Dynamics” 해석을 위한 주파수 대역은 165.19 Hz를 포함하여야 한다. 본 연구에서는 “Steady State Dynamics” 해석 결과는 그림 4와 5에 도시한 바와

같다. 그림 4는 정규 동적증폭계수이고, 그림 5는 시료의 동적응답에 대한 위상각 곡선이다. 동적증폭계수는 정적변위에 대한 동적변위의 크기를 말하는 것으로, 식 (54), (55)로 표현된다. 시료의 동적응답에 대한 위상각 곡선은 식 (52)로 표현된다. 그림 2의 유한요소 모델에 대한 유한요소해석은 그림 2에서 도시된 바와 같이 구동판 상단 4개의 지점에 단위하중의 조화진동을 가함으로써 수행되었다.

그림 4와 5에서와 같이, 정규 동적증폭계수와 동적응답의 위상각 모두에 있어서, 유한요소해석의 결과와 본 연구에서 유도한 이론식에 의한 결과는 서로 정확하게 일치하고 있다. 이는 본 연구에서 유도한 공진주 실험의 동적 응답에 대한 이론이 합리적이고 타당함을 입증하는 것으로 판단된다.

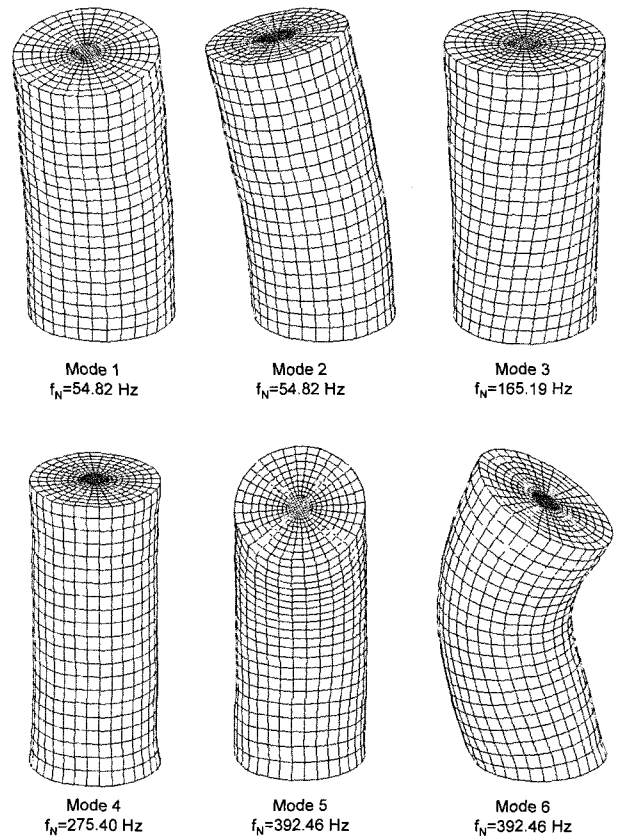


그림 3. 그림 2의 공진주 실험시스템에 대한 정규모드와 고유주파수

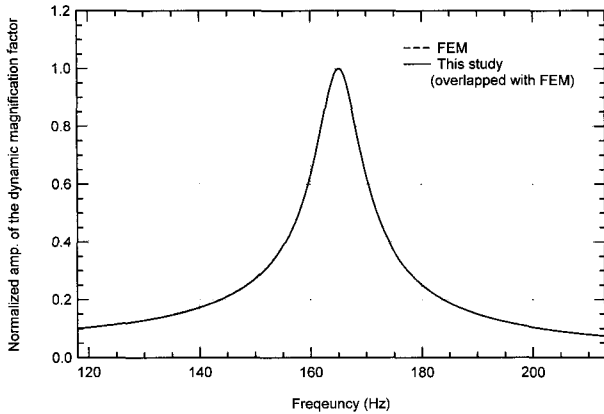


그림 4. 그림 2의 유한요소 모델에 대한 정규 동적증폭계수

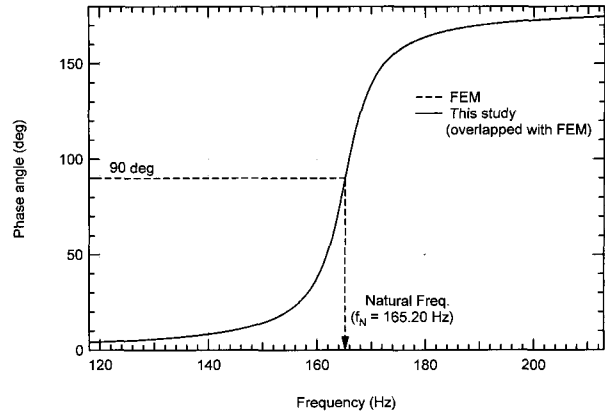


그림 5. 그림 2의 유한요소 모델에 대한 동적응답의 위상각

6. 요약 및 결론

전단탄성계수, 재료감쇠비 등의 전단변형을 특성과 같은 흙의 동적 특성은 지진에 대한 지반의 부지응답, 건설진동 및 교통진동과 같은 인위적인 진동으로 인한 진동영향 등을 이론적으로 평가하는데 있어서 중요한 역할을 담당하고 있다. 흙의 동적 특성은 주로 공진주 실험에 의해서 평가되어 왔는데, 본 연구에서는 공진주 실험의 근간이 되는 공진주 실험 시스템의 동적 거동을 표현하는 이론적 모델링에 대한 기본적인 연구를 수행하였으며, 아래와 같은 성과를 이루었다.

- (1) 공진주 실험 시스템에서의 파동전파를 설명하는 파동방정식을 유도하였으며, 유도된 파동방정식에는 시료의 점성이 고려되도록 하였다.
- (2) 점성을 고려한 파동방정식을 이용하여 공진주 실험 시스템과 같은 고정단-자유단 경계조건, 시료상단의 부착요소 조건 등을 만족하는 해를 구하였다.
- (3) Lagrange 방정식을 이용하여 공진주 실험 시스템의 운동방정식을 유도하였다.
- (4) 공진주 실험 시스템의 운동방정식에 대해 일반해를 구하였으며, 일반해를 이용하여 공진주 실험시 획득되는 동적 증폭계수와 동적응답 위상각의 이론식을 제시하였다.
- (5) 본 연구에서 유도한 동적증폭계수 및 동적응답 위상각에 대한 이론식을 검증하기 위하여, 공진주 실험 시스템에 대한 유한요소해석을 수행하였으며, 유한

요소해석 결과와 이론식에 의한 결과가 일치함을 확인하였다.

감사의 글

본 연구는 1998년 과학기술부의 특정개발연구사업 (과제번호: 98-NE-05-04-A-02)에 의해 이루어진 것으로서 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. 조성호, 황선근, 김동수, 우규석 (2000), "재료감쇠비측정을 위한 주파수-위상각법", 대한토목학회논문집, 제21권, 제2-c호, pp.119-129.
2. 조성호, 강태호, 황선근 (2003), "운동방정식에 기초한 공진주 실험의 자료분석 및 해석", 지반공학회 논문집, 제19권, 제4호.
3. Hardin, B.O.,(1965), "The Nature of Damping in Sands", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol.91, January, pp.63-97.
4. Hardin, B.O.,(1970), "Suggested Method of Test for Shear Modulus and Damping of Soils by the Resonant Column", *Special Procedures for Testing Soil and Rock for Engineering Purposes*, ASTM, pp.516-529.
5. Richart, F. E., Jr., Hall, J. R., Jr., and Woods, R. D. (1970), *Vibration of Soils and Foundations*, Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.
6. Hwang, S. K. (1997), *Dynamic Properties of Natural soils*, Ph.D. Dissertation The University of Texas at Austin, Austin, Texas.
7. Isenhower, W. M. (1979), *Torsional Simple Shear/Resonant Column Properties of San Francisco Bay Mud*, M.S. Thesis, The University of Texas at Austin, Austin, Texas.
8. Ishihara, K. (1996), *Soil Behaviour in Earthquake Geotechnics*, Oxford University Press Inc., New York.

(접수일자 2003. 1. 27, 심사완료일 2003. 6. 20)