

## 밀도분포법을 이용한 부재의 연결구조 최적화

한석영\*, 유재원<sup>+</sup>

(논문접수일 2003. 2. 18, 심사완료일 2003. 5. 16)

### Topology Optimization of Connection Component System Using Density Distribution Method

Seog-Young Han\*, Jae-Won You<sup>+</sup>

#### Abstract

Most engineering products contain more than one component. Failure occurs either at the connection itself or in the component at the point of attachment of the connection in many engineering structures. The allocation and design of connections such as bolts, spot-welds, adhesive etc. usually play an important role in the structure of multi-components. Topology optimization of connection component provides more practical solution in design of multi-component connection system. In this study, a topology optimization based on density distribution approach has been applied to optimal location of fasteners such as T-shape, L-shape and multi-component connection system. From the results, it was verified that the number of iteration was reduced, and the optimal topology was obtained very similarly comparing with ESO method. Therefore, it can be concluded that the density distribution method is very suitable for topology optimization of multi-component structures.

**Key Words :** Density Distribution Method(밀도분포법), Multi-Component System(다요소 시스템), Topology Optimization(위상 최적화), Fastener(체결재), Evolutionary Structural Optimization(진화적 구조 최적화)

## 1. 서론

대부분의 공작기계를 비롯한 기계 구조물은 2개 이상의 요소나 부품으로 구성되어 있으며, 그 요소들은 볼트나 용접 등의 체결재로 연결되어 있다. 따라서, 두 요소 이상으로

구성된 기계 구조물에 대한 체결재의 위치나 면적에 대한 위상 최적화를 통하여 기계구조물의 경량화를 꾀할 수 있다.

Bendsøe와 Kikuchi<sup>(1)</sup>에 의하여 개발된 균질화법은 동공을 가정한 미소구조를 정의하고 이를 이용하여 위상 최적화를 수행하였다. 그러나 수치해석적으로 상당히 복잡한

\* 주저자, 한양대학교 기계공학부 (syhan@hanyang.ac.kr)  
주소: 133-791 서울시 성동구 행당동 산 17번지  
+ 한양대 대학원

알고리즘을 사용함으로써 최적화 속도가 느리고 알고리즘을 개선할 때 상당한 노력이 필요하다는 점이 단점으로 지적되어왔다. 이것을 극복하기 위한 노력으로 Mlejnek<sup>(2)</sup>은 에너지법을 이용하여 균질화법의 균질화 재료상수를 보다 간단히 계산할 수 있는 3차원상에서의 위상 최적화 기법을 구현하였으며, 이를 더욱 간략화하기 위해 미시구조를 고려하지 않고 밀도를 이용하여 질량분포 문제로 바꾸어 접근하는 밀도분포법이 제안되었다. 최근에는 Li<sup>(3)</sup> 등에 의하여 수치해석적으로 사용하기에 간단한 알고리즘인 ESO(Evolutionary Structural Optimization) 기법이 발표되었다. Jiang과 Chiredast<sup>(4)</sup>은 위상최적화 개념을 점용점과 접촉본드 패턴으로 확장시켰고 일반화된 연결 최적화를 위한 이론을 제안하였으며, Li<sup>(3)</sup> 등은 다요소 구조물의 위상 최적화를 수행한 바 있다.

본 연구에서 사용된 밀도분포법은 최적화 과정에서 체스판 무늬와 중간 밀도를 갖는 요소가 발생하는 단점<sup>(5)</sup>이 있으나, 이러한 문제는 밀도 재분배법과 벌칙함수를 통하여 해결되어 다양한 위상 최적화문제에 널리 사용되고 있다.

본 연구에서는 밀도분포법을 T형상, L형상 연결 및 다요소 구조물의 위상 최적화에 적용하여, ESO법에 의한 결과와 비교함으로써 이 기법의 효율성을 검토하였다.

## 2. 밀도분포법

### 2.1 최적화 문제의 정의

밀도분포법은 임의의 설계영역을 유한요소로 분할한 뒤, 각 요소의 밀도로 위상을 표현하는 기법이다. 즉 설계영역의 전체적인 밀도분포가 물체의 위상을 표현해 준다. 즉, 밀도가 0인 부분은 질량이 없는 것으로 간주할 수 있고, 밀도가 1로 갈수록 물체의 질량이 집중되어야 한다는 것을 의미한다.

최적화의 목표는 주어진 질량에서 강성을 최대화한 구조물의 위상을 찾는 것이다. 강성이 증가된다는 것은 변형에너지를 흡수할 수 있는 능력이 작다는 것이므로 변위의 발생으로 생성되는 변형에너지인 컴플라이언스(compliance)를 최소화하는 것이다. 따라서 목적함수는 평균 컴플라이언스(mean compliance)이며, 수렴조건은 재료의 질량이며 설계변수로는 각 유한요소의 밀도를 사용하였다.

Minimize Mean Compliance

$$F(x) = U^T K U$$

$$= \int_{\Omega} \{u(x)\}^T \{f\}^B d\Omega + \int_{\Gamma} \{u(x)\}^{ST} \{f\}^S d\Gamma + \sum_i \{u(x)^i\}^T \{F^i\}$$

Subject to: Mass limit

$$M(x) = \int_{\Omega} x d\Omega - M_0 \leq 0$$

$$x = \{x^e\}, \quad 0 \leq \{x^e\} \leq 1, \quad e = 1, 2, 3, \dots, m$$

- $U$  : 전역변위벡터,  $F$  : 전역힘벡터,
- $K$  : 전역강성행렬,  $\{ \}$  : 벡터조작자,
- $\{f\}^S$  : 표면력,  $\{f\}^B$  : 체력,
- $\{F^i\}$  : 집중력,  $\{u\}$  : 변위,  $\{\epsilon\}$  : 변형률,
- $x^e$  : 각 유한요소밀도,  $m$  : 유한요소 개수,
- $\Gamma$  : 표면력 작용영역,  $\Omega$  : 설계영역,
- $M_0$  : 질량한계,  $F(x)$  : 평균 컴플라이언스

### 2.2 밀도와 탄성계수식의 적용

물체의 밀도와 탄성계수와의 관계를 Mlejnek<sup>(2)</sup>이 제안한 식을 이용하여 다음과 같이 가정하였다.

$$\frac{E^e}{E^0} = (x^e)^a \tag{1}$$

$e$  : 요소,  $x$  : 밀도,  $a$  : 영향인자계수

이 식의 경우, 밀도값이 0이면, 그 요소의 탄성계수도 0이고, 밀도값이 1일 때 원래 재료의 탄성계수값을 갖는다. 결국 밀도가 0이라는 것은 그 요소부분이 빈 공간이라는 것을 의미한다. 밀도가 커질수록 탄성계수의 값은 식 (1)에 의하여 증가되고 같은 힘에 대해 변형을 일으키기 어려워진다. 중간 밀도값에  $a$ 값이 영향을 줌으로서  $a$ 값이 커질수록 중간 밀도값을 배제시키는 역할을 한다.

### 2.3 민감도 해석(Sensitivity Analysis)

유한요소해석에서 사용한 평형방정식을 편미분하여 평균 컴플라이언스(mean compliance)에 대한 구배값을 사용하였다.

$$\frac{\partial F}{\partial x^e} = - \{ \hat{u} \}^T \frac{\partial [K]}{\partial x^e} \{ \hat{u} \} \tag{2}$$

설계변수는 각 유한요소의 밀도이고, 이 밀도는 유한요소 내에서 그 값이 일정하므로,  $i$ 번째 설계변수에 대한 다른 유한요소의 평균 컴플라이언스(mean compliance)의 구배값은 0이 되고,  $j$ 번째 설계변수에 대한 평균 컴플라이언스(mean compliance)의 구배값은 오직  $i$ 번째 유한요소의 평균 컴플라이언스(mean compliance)의 구배값이 된다.

구속조건으로 질량을 사용하며, 각 유한요소 내에서 밀도는 일정하고 다른 유한요소와의 밀도와는 독립적이므로 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial M}{\partial x_i} = \int_{\Omega_i} d\Omega_i \quad (3)$$

각 요소마다 밀도가 일정하다고 가정하였으므로, 한 개의 요소에서부터 다른 요소로의 급격한 변화가 일어나게 된다. 이 논문에서 결국 유한요소해석은 재료를 서로 다른 밀도로 이루어진 복합재(composite material)로 간주해서 수행한다고 할 수 있다.

#### 2.4 최적조건법

제한조건이 있는 최적화문제는 활동적인 제약조건과 목적함수를 고려하여 라그랑지 함수  $L$ 을 이용하여 정식화 할 수 있다.

$$L(x, \lambda) = F(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j (g_j - \bar{g}_j) \quad (4)$$

라그랑지 함수의 정제조건(stationary condition)은 라그랑지가 모든 변수에 대하여 편미분 방정식이 0을 가지는 것이므로 이것을 이용하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j (g_j - \bar{g}_j), \quad i=1, \dots, n \quad (5)$$

위 식을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^m e_{ij} \lambda_j = 1, \quad i=1, \dots, n \quad (6)$$

여기서,

$$e_{ij} = \frac{N_{ij}}{\nabla F_i} \quad (7)$$

$e_{ij}$ 는 목적함수의 민감도 편미분치,  $N_{ij}$ 는  $i$ 번째 변수에 대한  $j$ 번째 함수의 편미분치,  $\nabla F_i$ 는  $i$ 번째 변수에 대한 목

적함수의 편미분치이다.

- 반복계산 알고리즘

$N_{ij}$ 과  $\nabla F_i$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$N_{ij} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad \nabla F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (8)$$

최적점의 필요조건은 식 (6)이며 이것은 비선형 프로그램에서 쿤-터커 조건과 연계된다.

최적조건법에서 최적화의 접근법은 리사이징 알고리즘이며 이것은 최적조건 식 (7)에서 직접 유도된다.

$$1 = \sum_{j=1}^m e_{ij} \lambda_j, \quad i=1, \dots, n \quad (\text{repeat } 6)$$

$e_{ij}$ 의 요소는 제한조건과 목적함수의 경사도에서부터 나온다. 식 (6)으로부터 간단한 리사이징 알고리즘이 유도되며 다음과 같다.

$$x_i^{k+1} = x_i^k \left[ \sum_{j=1}^m e_{ij} \lambda_j \right]^\xi \quad (9)$$

여기서  $k$  : 반복계산횟수,

$m$  : 활동적 제한조건,

$\xi$  : 각 반복계산주기에서 단계값 조정 매개변수.

단계값 조정 매개변수  $\xi$ 의 값이 작으면 변수의 변화가 적어지고 수렴이 느려진다. 반대로  $\xi$ 가 커지면 수렴속도는 향상되나 최적점을 찾지 못하는 경우가 발생된다.

위상 최적화 시스템의 도식적인 흐름도를 Fig. 1에 나타내었다.

### 3. 적용 예

본 논문에서는 2개의 두꺼운 평판이 점용접이나 리벳, 핀 등으로 겹쳐지는 방식으로 연결된 구조물과 다요소 구조물에 있어서 구조물간의 연결위치 탐색을 위한 연구를 수행하였다. 널리 사용되고 있는 세 가지 구조물에 대하여 밀도분포법을 이용한 위상 최적화를 수행하고, 그 결과를 ESO법과 비교하였다.

평판에 적용된 물성치는  $E=207 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\rho=7800$

kg/m<sup>3</sup>이고, 연결부 부위는 15×15 모양으로 요소를 나누고, 후보연결점은 20개의 노드를 가진 블럭요소를 7×7 모양으로 평판의 30%의 두께인 0.3 mm, 평판 영률의 반인  $E=103.5$  GPa을 갖도록 모델링 하였다. 이렇게 겹쳐지는 후보점의 부분을 나누는 것은 두 개의 인접한 연결요소와 모서리 부분은 생산과 조립 과정에서 스페너 등 공구가 사용 가능

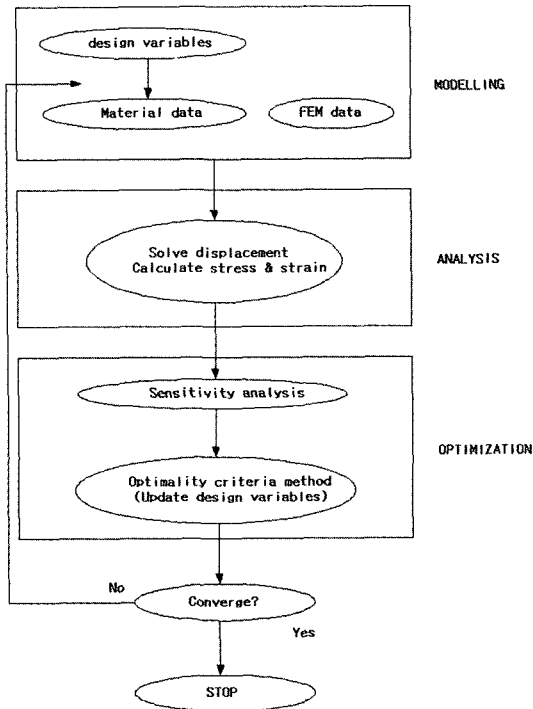


Fig. 1 Flowchart of topology optimization system

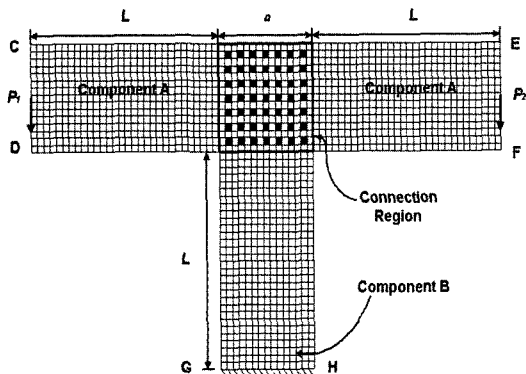


Fig. 2 Initial finite element model of T shape connection

하도록 필요한 최소한의 공간보다 크도록 하기 위함이고 여기에서는 0.001 m로 정하였다.

### 3.1 T형상 연결(T shape Connection)

T형상 연결 구조물의 형상은 Fig. 2와 같으며, 프레임 구조물에서 전형적인 횡지지 연결 구조물이다.

해석결과 Fig. 3(a)와 같이 반복수 14회만에 컴플라이언스가 63% 감소된 꼭지점 양단의 4지점으로 연결부가 결정되었다. ESO법의 경우도 Fig. 3(b)와 같이 반복수 21회만에 같은 위상을 얻었다. 중간 변화과정은 밀도분포법의 5회 반복과정이 ESO법의 16회 반복과정과 유사한 위상을 갖음으로써 밀도분포법의 수렴속도가 빠름을 알 수 있었다. T형상의 반복계산과정을 Fig. 4에 나타내었다.

### 3.2 L형상 연결(L shape Connection)

Fig. 5와 같이 가로 0.45 m, 세로 0.15 m, 두께 0.0001 m인 평판과 가로 0.15 m, 세로 0.45 m, 두께 0.0001 m인 평판이 수직으로 연결된 L형상의 연결 구조물의 자유단에 다중 하중조건  $P_1, P_2$ 가 y방향으로 -1 kN, 1 kN씩 각각 교대로 하중을 적용하였고 구속조건은 질량이 전체 구조물의 0.29%가 되도록 하였다. 변형량은  $0.154 \times 10^{-3}$  m로 동일하게 계산되었다.

해석결과를 보면 L형상 연결은 T형상 연결과 교차 연결과는 다른 최적의 연결부의 분포를 가짐을 알 수 있다. 이전

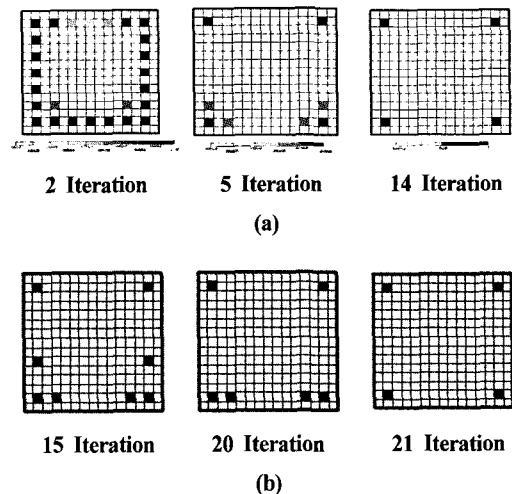


Fig. 3 Connection pattern in T shape of (a) density distribution method (b) ESO

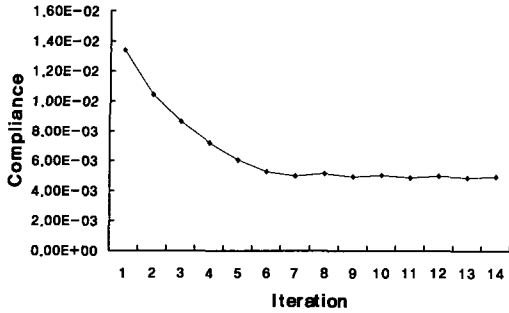


Fig. 4 Variation of compliance in T shape connection

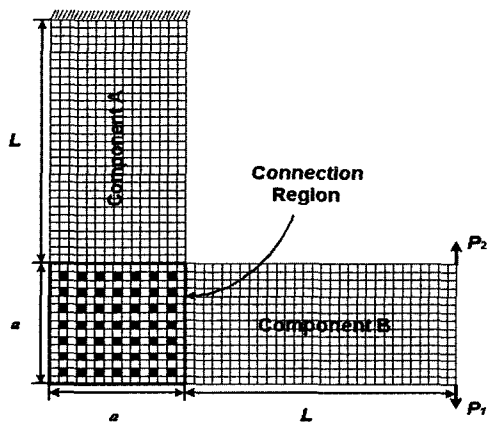


Fig. 5 Initial finite element model of L shape connection.

의 모서리의 4점에서의 분포에서 하중 받는 모서리 부분으로 3점으로 연결부가 이동함을 알 수 있다. 15회 반복수 만에 우측 상단에 2점과 하단에 1점의 연결부가 결정되었고 컴플라이언스가 66% 감소되었다. Fig. 6(b)의 ESO법이 반복수 33회만에 3점의 연결점이 생성된 것과는 다르게 Fig. 6(a)에서 연결위치가 달랐다. ESO의 컴플라이언스 보다 13.2% 감소하여 밀도분포법이 더 좋은 결과를 보였다. 이는 ESO법과 밀도분포법의 기법상의 차이 때문이다. L형상의 반복계산 결과는 Fig. 7에 나타내었다.

### 3.3 다요소 시스템 설계 (Design of Multi-Component System)

연결부의 설계위치 최적화와 더불어 연결요소의 위상 또한 최적화 할 수 있다. 이 설계의 특징을 보여주기 위하여 교차 연결의 부재 전체부분의 최적화를 수행하였고 연결과

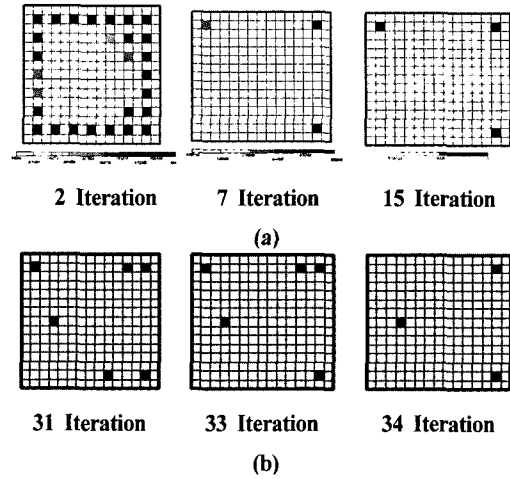


Fig. 6 Connection pattern and topology in L shape of (a) density distribution method (b) ESO

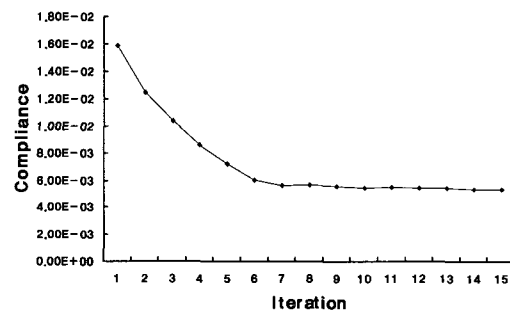


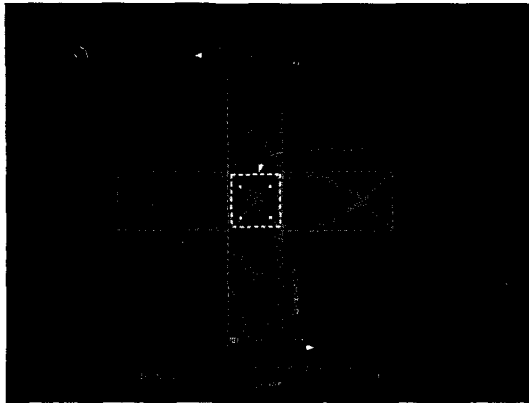
Fig. 7 Variation of compliance in L shape connection

연결 요소간에 밀도분포법을 이용하였다.

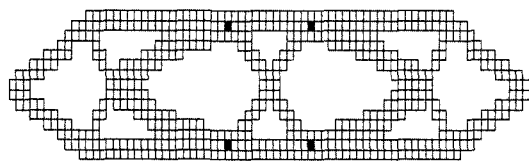
Fig. 8(a)에서와 같이 교차연결의 전체위상이 나타났다. 하중조건은 L형상과 같은 다중 하중조건  $P_1$ ,  $P_2$ 를 각각 적용하였고 전체 구조물 질량의 40%가 되도록 구속조건을 주었다.

최적화된 형상을 보면 Figs. 8(b)와 8(c)와 같이 연결부위의 모서리 4부분에 연결부가 결정됨을 알 수 있었다. 따라서 부재연결 부위만을 최적화한 위상과 부재 전체를 최적화한 위상이 연결부에서 같음을 알 수 있다. 최적화된 위상은 Fig. 8(d)와 같이 반복수 22회만에 구해졌으며, 컴플라이언스 감소는 39.2%였다. ESO법에서 행해진 결과와 전체 형상에서 유사하였고 연결부의 위치와 개수는 동일하였다.

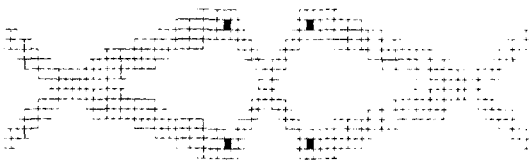
이러한 연성된 최적화 과정은 연결부에서 요소와 요소의 두 개의 설계과정을 하나로 줄일 수 있고 각각 설계과정의



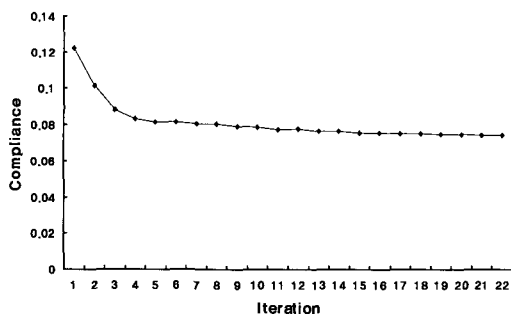
(a) Multi-component connection system design of density distribution method



(b) Connection pattern in component B of ESO



(c) Connection pattern in component A of ESO



(d) Variation of compliance in multi-component connection

Fig. 8 Multi-component connection system design

분리로 생길 수 있는 조건문제나 국부해에 대한 문제를 피할 수 있어 실제설계 과정에 좀 더 유용한 최적화 과정이라

할 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 실제 구조물 연결 문제인 T형상, L형상 및 다요소 연결 시스템에 밀도분포법을 적용하여 위상 최적화를 수행하였으며, 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 밀도분포법으로 다요소 구조물의 연결부에 대한 위상 최적화를 수행한 결과 ESO법과 같이 효율적인 기법임을 확인하였다.
- (2) ESO법과 비교한 결과 밀도분포법이 수렴속도가 빠르고 동일한 수준의 정확한 해를 준다는 것을 확인하였다.
- (3) 밀도분포법을 이용하여 다요소 연결 구조물의 연결 위상을 결정함과 동시에 연결요소의 최적 위상을 결정할 수 있었다. 이로써 전체구조물의 설계에 있어 유용한 방법을 제시하였다.
- (4) 제안된 설계방법으로 다양한 연결체의 구조설계 문제에 적용될 수 있고 연결부는 핀, 리벳, 볼트, 점용접, 접착 연결 등 다양한 연결체로 확대될 수 있다.

#### 참고 문헌

- (1) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., 1988, "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 71, pp. 197~224.
- (2) Mlejnek, H. P. and Schirmacher, R., 1993, "An Engineer's Approach to Optimal Material Distribution & Shape Finding", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 106, pp. 1~26.
- (3) Steven, G. P., Qing, L. and Xie, Y. M., 2001, "Evolutionary Structural Optimization for Connection Topology Design of Multi-Component Systems", *Engineering Computations*, Vol. 18, No. 3/4, pp. 460~479.
- (4) Jiang, T. and Chirehdast, M., 1997, "A System Approach to Structural Topology Optimization: Designing Optimal Connections", *ASME Trans. of Mechanical Design*, Vol. 119, pp. 40~47.
- (5) Lim, O. K., Kim, J. S. and Lee, J. S., 1999, "Topology

Optimum Design Using Chessboard Patterns Search Algorithm and Virtual Load”, *Trans. J. of Comp. Struct. Engr. Inst. Korea*, Vol. 12, No. 2, pp. 215 ~ 222.

(6) Han, S. Y. and Lee, D. J., 2000, “Comparative Study on Element Removal Methods for ESO”, *Trans. KSMTE*, Vol. 9. No. 5, pp. 112 ~ 118.