

강건성 지수를 이용한 강건설계 기법의 개발

황 광 현* · 박 경 진†

(2003년 4월 9일 접수, 2003년 6월 26일 심사완료)

Development of a Robust Design Process Using a Robustness Index

Kwang Hyeon Hwang and Gyung-Jin Park

Key Words : Axiomatic Design(공리적 설계), Decoupled Design(비연성화 설계), Robust Design(강건설계), Robustness Index(강건성 지수)

Abstract

Design goal is to find the one that has the highest probability of success and the smallest variation. A robustness index has been proposed to satisfy these conditions. The two-step optimization process of the target problem requires a scaling factor. The search process of a scaling factor is replaced with the making of the decoupled design between the mean and the standard deviation. The decoupled design matrix is formed from the sensitivity or the sum of squares. After establishing the design matrix, the robust design process has a new three-step one. The first is "reduce variability," the second is "make the candidate designs that satisfy constraints and move the mean on the target," and the final is "select the best robust design using the proposed robustness index." The robust design process is verified by three examples and the results using the robustness index are compared with those of other indices.

1. 서 론

설계의 요구 사항이 많아짐에 따라, 요구 사항들을 나누어 해결하고 종합하는 과정을 거치게 된다. 공학설계 분야에서 이러한 복잡한 과정을 체계적이고 효율적으로 설계하기 위하여, 공학설계의 과정과 원칙에 대한 연구들^(1,2)이 진행되어 왔다. 공학설계에서 과정과 원칙을 적용하는 이유는 의사결정의 효율성을 향상시키고, 설계를 통하여 제품의 품질을 향상시키는데 있다. 따라서 설계의 과정 및 원칙과 함께 품질을 객관적으로 평가하기 위하여 품질의 척도와 품질 개선 방법이 필연적으로 필요하다. 이러한 품질을 향상시키기 위한 노력으로 제품과 공정의 변동을 최소화 하는 설계방법으로 강건설계가 사용되고 있다.

강건설계의 개념은 연구자들에 따라 다소 다르게 표현하고 있다. Taguchi⁽³⁾는 "변동의 원인을 제

거하지 않고, 원인의 영향을 최소화하여 제품의 품질을 향상 시키는 것"으로 정의하였다. 특히 파라미터 설계는 변동요인에 영향을 적게 받는 성능을 얻도록 제품과 공정설계의 최적화를 의미한다. Suh⁽⁴⁾는 "제조를 쉽게 하기 위하여, 설계 및 공정 변수가 큰 공차를 가지더라도 기능적 요구들을 만족하는 설계"를 강건설계로 정의하고 있다. 그리고 Box⁽⁵⁾는 최소의 비용으로 소비자의 기대를 만족시키기 위하여 제조자가 지속적인 관심을 가지는 것으로 "시스템의 중앙(median) 성능이 소비자를 만족시키고, 가능한 입력 변동에 독립적인 설계"라고 말하고 있다. 이러한 개념들에서 공통적인 사항은 변동에 둔감한 설계를 강건설계라고 할 수 있다.

Suh⁽⁴⁾가 제시한 공리적 설계의 정보량은 설계의 좋고 나쁨을 판별하는 품질의 척도이다. 정보량을 최소화하기 위해서는 설계파라미터에 대한 기능적 요구의 변동(variation)을 줄이고, 기능적 요구의 목표값(target value)과 실제 얻어진 평균(mean)의 편향(bias)을 줄여야 한다. 이러한 정보량의 개념은 다구찌⁽³⁾의 강건설계의 개념과 유사하

* 회원, 현대자동차 선행해석팀

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계.정보경영공학부

E-mail : gjpark@hanyang.ac.kr

TEL : (031) 400-5246 FAX : (031) 407-0755

다. 이러한 점에 대하여 Suh⁽⁶⁾는 정보공리 적용의 결과가 강건설계라고 말하고 있다.

다구찌는 설계 품질의 척도로 손실함수(loss function)의 개념을 제시하였다. 이것은 목표값 지향의 설계 품질지수이다. 반면 공리적 설계에서 정보량은 성공의 확률로 표현되며, 설계범위 (design range) 지향의 품질지수라고 할 수 있다. 목표값 지향은 제품의 성능이 목표값에 있을 확률이 큰 것을 의미하고, 설계범위 지향은 설계범위의 하한값과 상한값 사이에 성능이 위치하는 확률이 큰 것을 의미한다. 손실함수와 성공의 확률은 좋은 설계 지수이지만, 목표값과 설계범위라는 두 가지면을 동시에 지원하지 못하는 측면이 있다. Hwang과 Park⁽⁷⁾은 설계범위를 고려하면서 강건성을 측정하는 지수에 대하여 강건성을 고려하는 성공의 확률과 정보지수에 대한 연구를 수행하였다. 또한 Park⁽⁸⁾은 이러한 지수를 이용하여 설계문제에 적용하였다.

본 연구에서는 설계범위와 목표값을 동시에 고려하는 강건성 지수를 사용하여 강건설계를 수행하는 과정에 대하여 기술한다. 강건설계의 목표값 문제는 “변동을 줄여라”, “평균을 목표에 이동시켜라”의 두 가지 과정을 가진다. 설계문제에서 평균을 목표에 이동하기 위한 조절인자 (scaling factor)를 구하기 어려운 경우에는 두 가지 요구를 동시에 만족시키기 어렵다. 조절인자의 식별 방법으로 평균과 표준편차에 대한 비연성화 설계가 필요하다. 또한 평균을 목표값에 정확히 이동시키지 못한 경우에 여러 가지 해가 존재하게 되고, 이러한 해들 중에서 좋은 강건해를 구별하는 과정으로 강건성 지수의 사용이 필요하다. 강건설계의 해결 과정으로 평균과 표준편차의 비연성화 설계를 구현한 후, 1) 변동을 줄임, 2) 제한조건을 만족하고 평균을 목표에 근접시킨 후보설계 생성, 3) 강건성 지수를 이용한 강건해 선택의 강건설계 과정을 제시하고자 한다.

2. 강건성 지수

강건성 지수는 강건설계를 위하여 개발되어진 지수이다. 손실함수는 목표값 지향의 지표의 대표적인 사례이다. 이는 설계범위의 개념이 미약한 편이다. 그러므로 설계범위 관점과 목표값 관점을 동시에 가지는 품질지수를 만들기 위하여, 공리적 설계의 성공의 확률에 다구찌의 강건성의 개념을 추가하여 강건성 지수가 개발되었다.

강건성 지수에 대한 자세한 내용은 참고문헌 (7)을 참고로 하고, 그 기본적인 내용은 다음과 같

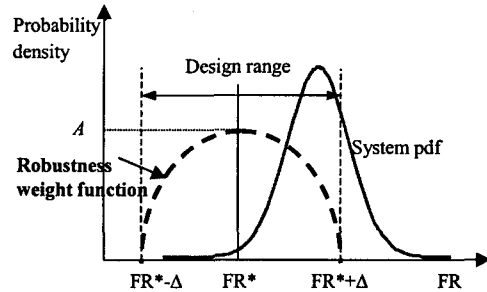


Fig. 1 Concept of the robustness weight function and the system probability density function

다.

강건성 지수(P_r)는 제품성능의 분포인 시스템 확률밀도함수($\phi(FR)$)와 강건성 가중함수($W(FR)$)의 곱을 설계범위에서 적분한 값이다.

$$P_r = \int_{FR^*-\Delta}^{FR^*+\Delta} W(FR)\phi(FR)dFR \quad (1)$$

여기서 Δ 는 설계변동 범위, FR 은 기능적 요구이고 FR^* 는 목표값이다. 식 (1)에서 설계범위의 바깥에 존재하는 성능치들은 무의미한 값이므로, 강건성에 영향이 없다. 시스템의 확률밀도함수는 제품의 공차로 인하여 성능이 일정한 분포를 가지는 것을 표현한다. 강건성 가중함수는 목표값에 가까울수록 큰 가중치를 주고, 설계범위의 경계에서는 작은 가중치 주기 위하여 도입되었다. 그러므로 Fig. 1과 같이 설계범위의 상한값과 하한값을 지나고, 목표값에서 최대값을 가지는 함수이다.

$$W(FR) = -\frac{A}{\Delta^2} \left((FR - FR^*)^2 - \Delta^2 \right) \quad (2)$$

여기서 A 는 식 (1)에서 강건성의 이상적인 분포로 시스템의 확률밀도함수를 단위충격함수로 가정하면 1의 값을 가진다.⁽⁷⁾

강건성 지수는 설계의 품질척도로 목표값과 설계범위의 두 가지 점을 고려할 수 있으므로 강건성을 판단하는 새로운 지수로 사용하였다. 따라서 강건성 지수를 적용한 강건설계는 목표값과 설계범위를 동시에 고려한 결과를 만든다. 이에 대한 강건설계의 과정은 다음 장에서 설명한다.

3. 강건성 지수를 이용한 강건설계

강건성 지수를 이용한 강건설계는 공리적 설계에 기초하므로, 기본적으로 독립공리를 만족시키고 정보공리를 만족시키는 순서로 진행된다. 기능적 요구(FR), 설계파라미터(DP)와 설계범위의 제

한조건(C)은 다음과 같이 표시된다.

$$\{FR\} = [A]\{DP\} \quad (3)$$

$$C: FR_L < FR < FR_U$$

여기서 **A**는 설계행렬이고, **FR_L**과 **FR_U**은 기능적 요구의 하한치와 상한치를 의미한다.

독립공리는 식 (3)의 기능적 요구를 만족시키는 설계파라미터의 결정 과정이다. 그리고 정보공리는 통계적인 의사결정 과정으로, 독립공리에서 다루지 않았던 변동에 대한 고려가 추가된다. 즉 기능적 요구에 대하여 평균과 변동을 고려하여 강건 설계를 수행한다. 첫번째로 평균과, 변동을 나타내는 표준편차에 영향이 큰 설계변수와 작은 설계변수를 분리한 비연성화를 설계방정식을 구한다. 그리고 이 설계방정식을 이용하여 표준편차를 줄이고, 평균을 목표값에 이동시킨다. 최종적으로 강건성 지수를 이용하여 강건한 설계를 결정한다.

3.1 평균과 표준편차의 비연성화 설계

비연성화는 평균과 표준편차에 대한 설계변수의 관계를 나타내는 설계행렬로 판별한다. 설계행렬은 설계파라미터의 미분값으로 구할 수 있다. 평균은 공칭값으로 근사화 할 수 있지만, 표준편차는 응답의 민감도와 설계변수의 변동으로 근사화한다. 따라서 평균과 표준편차에 대한 설계행렬을 구하기 위해서 평균은 일차 미분치, 표준편차는 이차 미분치가 필요하다. 실험계획법(design of experiments)을 이용하는 경우 분산분석(analysis of variance: ANOVA)의 제곱합(sum of squares)으로 설계행렬을 구한다.

다구찌의 강건설계에서는 평균과 표준편차를 각각 조절할 수 있는 설계변수(혹은 인자)를 찾아서 변동을 줄이고, 목표값을 맞추는 2단계의 방법을 사용한다. 이러한 경우 강건설계의 수행은 조절인자가 존재하는 경우 가능하다. 반면 조절인자가 없는 경우는 변동을 줄일 수는 있으나, 원하는 성능을 획득할 수 없다. 평균과 표준편차는 식 (4)와 같이 설정하고, 설계행렬 [A]의 비연성화를 통하여 조절인자를 찾는 방법을 이용한다.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Set mean : } m_y \\ \text{Min. standard deviation : } s_y \end{array} \right\} = [A] \left\{ \begin{array}{l} DV_m \\ DV_s \end{array} \right\} \quad (4)$$

여기서 DV_m은 평균에 영향이 있는 설계변수의 그룹을, DV_s는 표준편차에 영향이 있는 설계변수의 그룹을 의미한다. 다음으로 실험계획법과 분산분석의 제곱합으로 비연성화 설계행렬을 구하는 방법을 기술한다.

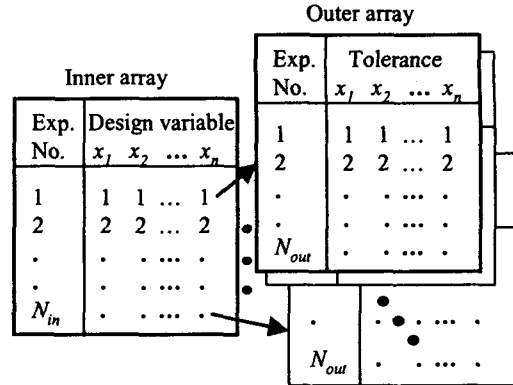


Fig. 2 Arrangement of the inner and outer arrays

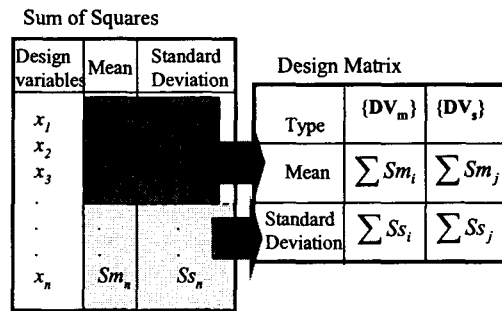


Fig. 3 Design matrix from the sum of squares

3.2 비연성화 설계행렬

실험계획법의 직교배열표를 이용하여 내측배열에는 설계변수를, 외측배열에는 설계변수의 공차를 배치하여 평균과 표준편차를 구할 수 있다. 내측배열의 각각의 열에 외측배열을 Fig. 2와 같이 배열한다. 내측배열에서 각 열의 평균과 표준편차를 획득한다. 그리고 평균과 표준편차 각각에 대하여 일원표(one-way table)를 작성하고, 분산분석을 실시하여 제곱합을 계산한다.^(9,10) 각각의 설계변수들에 대하여 구하여진 제곱합은 Fig. 3과 같이 표준편차에 영향이 큰 설계변수와 평균에 영향이 큰 설계변수들로 분류하여 설계행렬을 구성할 수 있다. 이러한 분류의 과정에서 설계행렬은 여러 가지 형태가 발생한다. 설계행렬의 표현에서 X는 설계변수가 평균 혹은 표준편차에 영향도가 큰 것을 의미하고, x는 영향도가 작은 것을 의미한다.

(1) 평균에 영향이 크고, 표준편차에 영향이 작은 설계변수가 존재하는 경우

$$\left\{ \begin{array}{l} m_y \\ s_y \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} X & X \\ x & X \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} DV_m \\ DV_s \end{array} \right\} \quad (5)$$

DV_s를 이용하여 표준편차를 줄이고, DV_m을 이용하여 비대각 요소(x)의 영향에 의하여 변형된 평균을 이동시킨다. 이러한 경우 설계행렬은 목표값에 평균의 이동이 쉽다. 그러나 설계변수들에 제한조건이 있는 경우 이동이 불가능할 수도 있다.

(2) 평균에 영향이 작고, 표준편차에 영향이 큰 설계변수가 존재하는 경우

$$\begin{Bmatrix} m_y \\ s_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X & x \\ X & X \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DV_m \\ DV_s \end{Bmatrix} \quad (6)$$

DV_m을 이용하여 평균을 맞춘 후, DV_s를 이용하여 표준편차를 줄인다. 표준편차를 줄일 때 비대각 요소의 영향으로 평균이 이동한다. 표준편차가 많이 줄어든 경우, 평균에서 어느 정도의 이동은 강건성의 획득에 영향을 미치지 않지만, 평균과 목표값의 편향이 큰 경우는 오히려 강건성이 나빠진다.

(3) 위의 (1)과 (2)의 두 가지 설계변수가 존재하는 경우

$$\begin{Bmatrix} m_y \\ s_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X & x \\ x & X \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DV_m \\ DV_s \end{Bmatrix} \quad (7)$$

이 경우는 유사 비연성 설계로 두 번째 방법도 가능하나, 목표값의 이동이 비교적 쉬운 첫번째 방법과 같이 표준편차를 줄이고 평균을 이동한다. 만약 설계행렬이 연성 설계인 경우는 새로운 설계 파라미터를 찾아야 한다.

3.3 비연성화 설계행렬을 이용한 강건설계

기능적 요구에 대한 평균과 표준편차에 대한 설계방정식이 구하여진 후, 실질적인 강건설계가 수행된다. 일반적인 설계문제에서 비연성 설계 혹은 비대각 요소가 영인 완전한 비연성화 설계가 구현하기가 쉽지 않다. 따라서 설계변수의 적절한 그룹으로 비대각 요소의 영향이 작은 근사화된 식 (5)와 같은 비연성화 설계를 찾는다. 다음의 식 (8)은 식 (4)에서 설계행렬을 결정하여 얻어진다.

$$\begin{Bmatrix} \text{Min. standard deviation: } s_y \\ \text{Set mean: } m_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X & x \\ X & X \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DV_s \\ DV_m \end{Bmatrix} \quad (8)$$

설계행렬이 결정되면, 강건성 지수를 이용한 다음의 3단계의 강건설계가 수행된다.

3.3.1 단계 1: 표준편차를 줄여라.

식 (8)의 첫번째 행(row)을 수행한다. 표준편차를 줄이기 위하여, DV_s는 설계변수의 조정이 가능한 제어인자로 설정한다. 설계변수의 공차는 DV_s와 DV_m의 모두를 고려한다. DV_s의 결정은 내측배열에서 얻어진 표준편차들의 일원표를 이용하여 결정할 수 있다.

실험계획표의 일원표를 통하여 각각의 DV_s에 대하여 최소의 표준편차들의 합을 가지는 수준이 DV_s의 최적수준으로 결정된다. 이러한 결정은 직교배열 실험에서 교호작용이 없는 경우이므로, 실제 해석상에서 이보다 작은 값을 가지는 해석이 있었는가를 확인해야 한다. 따라서 최적해는 응답의 추정치를 구하여 결정한다.

추정치는 각 수준에서 해석의 반복수(h)가 같은 경우, 결정된 임의의 설계변수 수준에 대한 응답으로부터 계산된다. 응답이 표준편차인 경우 추정치는 식 (9)와 같다.

$$\hat{s}_y = \bar{s}_{x_1} + \bar{s}_{x_2} + \dots + \bar{s}_{x_p} - (n-1)\bar{s} \quad (9)$$

$$\text{where } \bar{s}_{x_i} = \frac{1}{h} \sum s_{x_i}, \quad \bar{s} = \frac{1}{N_m} \sum \bar{s}$$

여기서 \hat{s}_y 는 표준편차의 추정치이고, \bar{s}_{x_i} 은 설계변수 x_i 에 대하여 결정된 수준에 대한 표준편차의 평균, \bar{s} 는 각 설계변수에 대한 표준편차의 평균이고, \bar{s} 는 실험계획표에서 얻어진 표준편차들의 총평균이다. 그리고 p 는 DV_s에서 설계변수의 수, N_m 은 내측배열의 실험 수이다. 추정치는 일원표를 이용하여 간단하게 구해지므로, 주어진 설계변수와 수준에 대하여 전조합을 실시하여 가장 작은 추정치를 찾는다. 구하여진 추정치는 실제 해석의 값이 아니므로 결정된 설계변수들의 수준의 조합에 대하여 공차를 적용한 해석을 실시하여 DV_s를 최종 결정한다.

3.3.2 단계 2: 목표값과 제한조건 고려하라.

식 (8)의 두 번째 행을 수행한다. 평균을 목표값에 맞추기 위하여, DV_m을 설계변수의 조정이 가능한 제어인자로 설정한다. 이번 단계에서 여러 개의 후보 설계(candidate design)가 발생한다. 그 이유는 식 (8)에서 설계행렬의 비대각 요소의 영향으로 평균을 목표값에 맞추는 과정에서 표준편차의 변동이 발생되며, 완벽하게 평균을 목표값에 맞추지 못하는 경우들이 발생되기 때문이다. 이러한 후보 설계들의 발생으로 다음 단계에서 강건성 지수를 이용하여 후보 설계들을 평가하고 강건해

를 결정한다.

2 단계에서는 응답의 평균이 계산되므로, 제한 조건을 다음과 같이 처리한다. 제한조건의 위배량을 벌칙함⁽¹¹⁾으로 처리한 함수와, 평균과 목표값(t)의 편향정도를 나타내는 함수의 합인 식 (10)의 특성함수(F_i)를 구성하여, 특성함수가 최소값을 가지는 설계들을 올림차순으로 정리한다.

$$F_i = \frac{|t - m_y|}{t} + P_i \text{ where } i = 1, 2, \dots, N_{in} \quad (10)$$

여기서 t 는 목표값이고, P_i 는 제한조건에 대한 벌칙함수이다. 벌칙함수는 외측배열에서 제한조건의 최대 위배량이다. 만약 제한조건을 위배하지 않으면 벌칙함수의 값은 0이다. 이는 식 (11)로 표현된다.

$$P_i = \max[0, v_j] \quad (11)$$

$$\text{where } v_j = \sum_{k=1}^q \frac{|g_k - (g_k)_{all}|}{(g_k)_{all}}, \text{ if } g_k < (g_k)_{all} \text{ then } v_j = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N_{in}, j = 1, 2, \dots, N_{out}, k = 1, 2, \dots, q$$

여기서 v_j 는 제한조건 함수의 위배량을 정규화한 값의 총합이다. g 는 제한조건 함수, g_{all} 은 제한조건 허용치이다. N_{out} 는 외측배열에서 실험 회수, k 는 제한조건의 수이고 q 는 DV_m에서 설계변수의 수이다. 식 (10)의 특성함수는 외측배열에서 발생한 제한조건의 최대 위배량을 정규화한 식과 내측배열의 실험에서 평균의 편향을 정규화한 식의 합으로 특성함수가 결정된다. 따라서 특성 함수는 내측배열의 수(N_m)만큼 발생되고, 이를 실험계획법의 각 설계변수별 수준의 합인 일원표로 표시한다.

일원표를 이용하여 1 단계와 유사하게 평균에 대한 설계변수들의 전조합에 대한 식 (10)의 추정치를 구한다.

$$\hat{F}_y = \bar{F}_{x_1} + \bar{F}_{x_2} + \dots + \bar{F}_{x_q} - (n-1)\bar{\bar{F}} \quad (12)$$

$$\text{where } \bar{F}_{x_i} = \frac{1}{h} \sum F_{x_i}, \bar{\bar{F}} = \frac{1}{N_m} \sum \bar{F}$$

여기서 \hat{F}_y 는 특성함수의 추정치이고, \bar{F}_{x_i} 은 설계변수 x_i 에 대하여 결정된 수준에 대한 특성함수의 평균, $\bar{\bar{F}}$ 는 각 설계변수에 대한 특성함수의 평균이고, $\bar{\bar{F}}$ 는 실험계획표에서 얻어진 특성함수들의 총평균이다. 구하여진 추정치를 올림차순으로 정리하여, 제한조건을 위배하지 않은 설계를 선정한다. 제한조건이 없는 경우는 벌칙함수를 0으로 설정하여 문제를 해결한다. 그리고 실제 평균과 표준편차를 이용하여 후보설계들을 선정한다.

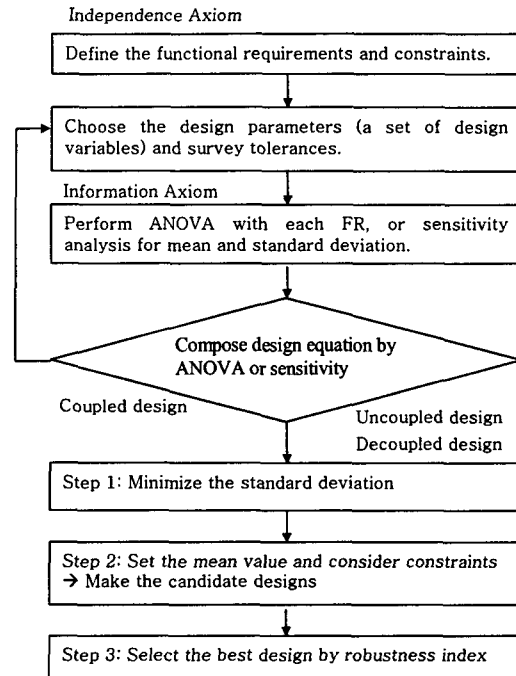


Fig. 4 Robust design strategy

실제 평균과 표준편차를 사용하는 이유는 설계 변수들의 상호작용의 영향인 교호작용으로 추정치 혹은 최적수준이 정확하지 않을 경우가 발생하기 때문이다. 이를 회피하기 위해서는 설계변수들의 수준을 변경하거나 설계변수와 교호작용을 적절히 배치하여 문제를 해결할 수도 있다.^(12,13) 그러나 교호작용을 실험 해석 전에 파악하기는 어렵기 때문에 교호작용이 없는 것으로 가정하고, 실제 평균과 표준편차를 계산을 통하여 추정치를 확인하는 방법을 사용하였다. 또 한가지 주위 할 점은 일원표를 통하여 얻어진 최적 해가 실험한 값보다 좋지 않은 경우, 직교배열 실험에서의 최적 수준을 최적해로 사용한다.

3.3.3 단계 3: 강건해를 결정하라

이전 단계에서 선정한 후보 설계들 중에서 최적의 강건설계를 선정하는 과정이다. 여기서 2장에서 제안한 강건성 지수를 이용한다. 즉 목표값에 대한 평균의 편향이 존재할 때 표준편차로만 설계우위를 알 수 없고, 설계범위와 목표값의 영향을 고려하여 최적의 강건설계를 선택한다.

평균과 표준편차에 대한 비연성화와 강건성 지수를 사용한 강건설계의 과정은 Fig. 4로 요약할 수 있다.

4. 적용 예제 및 고찰

강건성 지수를 이용한 강건설계 방법의 타당성을 예제를 통하여 알아보았다. 간단한 함수문제, 3부재 트러스와 25부재 전송탑의 목표값 문제를 예시하였다. 함수의 강건설계는 주어진 함수의 평균과 표준편차에 대한 비연성화 설계과정을 민감도와 분산분석을 이용하여 보여준다. 3부재 트러스는 제한조건을 만족시키며 목표한 주파수를 획득하는 문제이다. 그리고 후보설계들에 대하여 강건성 지수를 이용하여 강건해의 선택과정을 보여준다. 25부재 트러스 문제는 추정치를 올림차순으로 정렬하여 강건설계를 선정하는 문제이다. 각 구조물의 해석은 상용 구조해석 및 최적화 소프트웨어인 GENESIS⁽¹⁴⁾를 사용하였다.

4.1 함수의 강건설계

식 (13)의 함수가 목표값이 100이고, 설계변수의 초기값은 $x_1 = 3, x_2 = 3$ 이다. 설계변수의 공차는 0.3으로 가정하였다. 함수 f 의 설계범위는 목표값의 10%이다. 설계변수는 이산설계공간에서 각각 $x_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, x_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이다.

$$f = x_1^3 + 25x_2 - 2 \quad (13)$$

독립공리에 의하여 기능적 요구와 설계파라미터는 다음과 같다.

FR: 함수가 100의 목표값을 가지게 하라.

DP: 설계변수 x_1 와 x_2

C: $90 \leq f \leq 110$

이에 대한 강건설계의 획득과정은 다음과 같다.

(1) 평균과 표준편차에 대한 설계변수의 영향도를 민감도 정보 혹은 분산분석으로 파악한다.

민감도를 이용하여 영향도 분석을 하면 다음과 같다.

$$m_f \approx m_{x_1}^3 + 25m_{x_2} - 2 \approx x_1^3 + 25x_2 - 2 \quad (14)$$

$$s_f^2 \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 s_{x_2}^2 = (3x_1^2)^2 s_{x_1}^2 + 25s_{x_2}^2 \quad (15)$$

주어진 함수의 평균은 식 (14)로, 분산은 식 (15)로 유도된다. 여기서 분산에 영향을 주는 설계변수는 x_1 이고, 설계변수 x_2 는 분산에 영향이 없다. 영향도 분석의 다른 방법인 분산분석의 제공함은 다음과 같이 계산한다.

설계변수의 수준은 Table 1과 같이 설정한다. 외

Table 1 Levels of design variables for the function f

Level	x_1	x_2
1	1	1
2	3	3
3	5	5

Table 2 Sum of squares of f by ANOVA

Sum of squares	m_f	s_f
S_{x_1}	25656	161
S_{x_2}	15000	0

Table 3 Comparison between the initial design and the robust design (Design range 100 ± 10)

Type	Initial design	Robust design
Mean	100	99
Standard deviation	3.68	2.52
Design variable x_1	3	1
Design variable x_2	3	4
Probability of success	0.99	0.99
Robustness index	0.86	0.92
Loss function	0.14	0.07

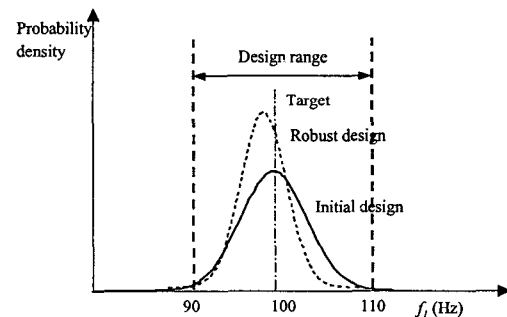


Fig. 5 Distribution of function f when the design variables have tolerances

측배열은 식 (15)를 이용하여 분산의 근사치를 구하였다. 설계변수의 표준편차는 문제에서 주어진 공차의 범위를 고려하여 $s_{x_1} = 0.1, s_{x_2} = 0.1$ 로 가정한다. L_9 표준 직교배열을 사용하여 평균과 표준편차를 획득하였다. 이에 대하여 분산분석을 실시하면 Table 2의 제공함을 구할 수 있다.

(2) 평균과 표준편차에 대한 설계변수의 관계를 나타내는 설계행렬을 구한다.

Table 2에서 평균과 표준편차에 대한 설계행렬을 구하면 식 (16)의 비연성화 설계방정식으로 표현된다.

$$\begin{cases} \text{Standard deviation } s_f \\ \text{Mean : } m_f \end{cases} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ X & X \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DV_s : x_1 \\ DV_m : x_2 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

(3) 설계방정식에 따른 강건설계 수행을 한다.

1단계: 설계행렬에 따라 변동에 민감한 설계변수 x_1 에 대하여 표준편차를 최소화한다. 설계변수 x_1 이 1일 때 표준편차가 최소값을 가진다.

2단계: 설계변수 x_2 를 이용하여 평균을 목표값에 근접시킨다. 설계변수 x_2 가 4일 때 목표값에 근접한다.

3단계: 구하여진 평균과 표준편차를 이용하여 시스템의 확률밀도함수를 정규분포로 가정하였다. 이를 식 (1)에 대입하여 강건성 지수를 구하고, 강건성의 정도와 설계의 개선여부를 판단한다.

Table 3은 강건설계의 결과이다. 설계변수 x_1 은 표준편차를 줄이기 위하여 작은 값이 선택되었고, 설계변수 x_2 는 평균을 목표값에 이동시키기 위하여 결정되었다. Fig. 5에서 초기 설계와 강건설계에 대한 성공의 확률은 변화가 없다. 기본적으로 설계범위가 비교적 크게 제공되었기 때문이다. 이러한 경우 제안한 강건성 지수를 통하여, 목표값에 함수값이 많이 존재하도록 설계변수들을 결정하였다. 이 예제에서 강건성 지수와 손실함수는 같은 경향을 가진다.

4.2 3부재 구조물의 강건설계

Fig. 6의 3부재 트러스 구조물⁽¹⁵⁾에서 일차 고유주파수가 650 Hz를 가지는 단면적 A, B, C를 결정하는 문제이다. 제한조건은 노드 4의 허용 수직변위가 $\delta_{all} = 2.0$ mm이고, 허용 무게가 $w_{all} = 0.06$ kg이다. 설계변수 A와 C는 동일한 단면적을 가진다. 초기 단면적과 단면적의 공차는 Table 4와 같다. 이 문제를 기능적 요구와 설계파라미터로 정의하면 다음과 같다.

FR: 일차 고유진동수가 650 Hz인 3부재 트러스를 만들어라.

DP: 단면적 $\{A, B\}$

C: 설계범위 $620 \text{ Hz} \leq f_1 \leq 680 \text{ Hz}$

$$\frac{\delta}{\delta_{all}} - 1.0 \leq 0.0, \quad \frac{w}{w_{all}} - 1.0 \leq 0.0$$

$$A = \{5, 7.5, 10, 12.5, 15\} \text{ mm}^2$$

$$B = \{5, 7.5, 10, 12.5, 15\} \text{ mm}^2$$

$$C = A$$

(1) 일차 고유주파수의 평균과 표준편차에 대하여 설계변수들의 영향도를 조사한다.

각 설계변수와 공차의 수준은 Table 5와 Table 6의 5수준으로 설정하였다. 설계변수는 내측배열에

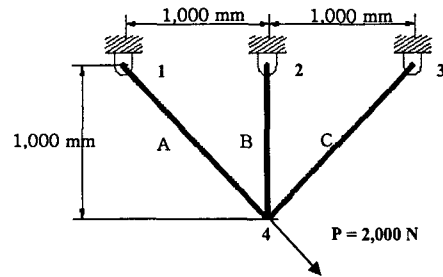


Fig. 6 Three-bar truss

Table 4 Dimensions of the three-bar truss (mm²)

Area	Initial value (m)	Standard deviation (s)	Tolerance (3s)
A	10	± 0.8	± 2.4
B	5	± 0.8	± 2.4

Table 5 Levels of design variables for the three-bar truss (mm²)

Level	Area A	Area B
1	5	5
2	7.5	7.5
3	10	10
4	12.5	12.5
5	15	15

Table 6 Levels of tolerances for the three-bar truss (mm²)

Level	Tolerances of A	Tolerances of B
1	2.4	2.4
2	1.2	1.2
3	0.0	0.0
4	-1.2	-1.2
5	-2.4	-2.4

Table 7 Analysis of the mean and the standard deviation

Level	Mean		Standard deviation	
	A	B	A	B
1	533.338	638.644	46.998	23.416
2	578.483	613.281	28.021	23.922
3	603.854	591.086	19.968	24.664
4	620.364	571.378	15.58	25.385
5	632.032	553.684	12.832	26.012

배치하고 공차는 외측배열에 배치하여, 설계변수와 공차의 전조합(5²)을 통하여 625 (25×25)회의 해석을 실시하였다. Table 7의 일원표를 이용하여 평균과 표준편차에 대하여 설계변수의 평균과 표준편차에 대한 제곱합은 Table 8과 같다.

(2) 제곱합을 통하여 평균과 표준편차에 대한 설계행렬을 구하면, 식 (17)의 비연성화 설계방정식으로 정의할 수 있다.

Table 8 Sum of squares of the first frequency by ANOVA

Design variables	Mean	Standard deviation
A	30792.688	3773.217
B	22548.535	22.211

Table 9 Optimum levels for a constrained problem for the three-bar truss

Level		Predicted frequencies	Normalized target bias(B)	Constraint Penalty function (P)	F = B+P	Constraint Violated?
A	B					
5	3	619.380	0.017	0.027	0.044	Yes
5	2	667.092	0.059	0.000	0.059	No
5	4	583.105	0.074	0.069	0.143	Yes
5	1	738.132	0.172	0.000	0.172	No
5	5	553.717	0.121	0.110	0.231	Yes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Standard deviation } s_f \\ \text{Mean : } m_f \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} X & x \\ X & X \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DV_s : A \\ DV_m : B \end{Bmatrix} \quad (17)$$

(3) 식 (17)의 설계방정식을 이용하여 강건설계를 수행한다.

1 단계: Table 7의 일원표에서 표준편차는 설계변수 A가 클수록 좋은 것을 알 수 있다. 따라서 설계변수 A는 설계변수의 범위에서 최대값인 15mm²로 결정하였다.

2 단계: 공차를 고려하는 외측배열에서 제한조건 최대 위배량을 산출하여 벌칙함수로 계산한다. 목표값에 대한 추정치의 위배량을 식 (10)과 같이 계산하여 벌칙함수와 더하여 특성함수를 생성한다. 이를 올림차순으로 정리하여 후보설계로 지정한다. 설계변수 B의 변화에 따른 후보설계는 Table 9와 같다. 제한조건을 만족하는 후보설계는 [A₅, B₁]와 [A₅, B₂]이다.

3단계: 후보설계들에 대하여 강건성 지수를 구하여, 최적의 강건해를 결정한다. 설계변수들의 공차를 고려하여 평균과 표준편차를 계산한다. 그리고 이에 대한 정규분포를 구하여 강건성 지수를 계산한다. Table 10은 초기설계와 후보설계의 평균, 표준편차, 성공의 확률, 강건성 지수와 손실함수를 보여준다. 그리고 Fig. 7은 설계들의 분포를 보여준다. Table 10에서 강건성 지수에 의한 최적의 강건설계는 [A₅, B₂]이다. 이러한 방법으로 표준편차는 34%, 그리고 강건성은 약 24%의 증대를 시킬 수 있었다. 여기서 손실함수의 변화를 살펴보면, 초기 수준인 [A₃, B₁]의 손실함수는 0.430이고 후보설계들 중 [A₅, B₁]는 0.395로 손실이 작아졌다. 그

Table 10 Probability of success, robustness index and loss function in optimum level for the design candidates (three-bar truss)

Level		Real means	Standard deviations	Probability of success (P _s)	Robustness index (P _r)	Loss function (L)
A	B					
5	2	646.677	12.707	0.977	0.816	0.191
5	1	663.691	12.964	0.895	0.655	0.395
3*	1*	646.329	19.376	0.871	0.659	0.430

* Initial levels

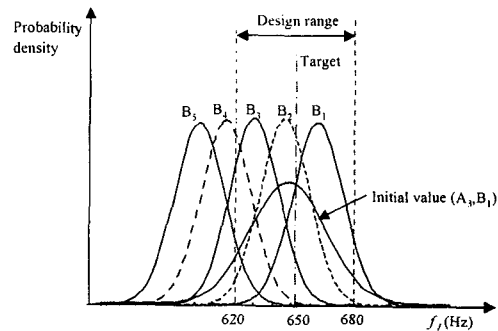


Fig. 7 Distributions of the first frequency according to the variation of design variables

러나 설계범위의 영향으로 강건성 지수와 성공의 확률은 오히려 나빠짐을 보이고 있다. 즉 설계범위가 존재할 때는 손실함수의 사용에 주의하여야 한다.

다음 예제에서는 평균을 결정하는 설계변수가 많은 경우에는 두 번째 단계에서 특성함수에 대하여 우수한 해가 3단계의 강건성 지수에서 나빠질 수 있음을 보여준다.

4.3 25부재 전송탑의 강건설계

일차 고유진동수가 70Hz인 Fig. 8의 25부재 전 송탑의 단면적 변동에 둔감한 설계를 한다. 설계 변수는 각 부재의 단면적으로 Table 11과 같이 7개의 설계변수로 나누어 진다. 문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

FR: 일차 고유진동수가 70 Hz인 25부재 전송탑을 만들어라.

DP: 단면적 {A, B, ..., G}

C: 설계범위 65Hz ≤ f₁ ≤ 75Hz

(1) 기능적 요구의 평균과 표준편차에 대한 설계 변수들의 영향도를 분석한다.

설계변수들은 3수준으로 설정하고, L₅₄의 표준 직교배열표를 사용하여 내측배열에 배치하였다. 그리고 설계변수의 변동량은 각각의 부재에 대하

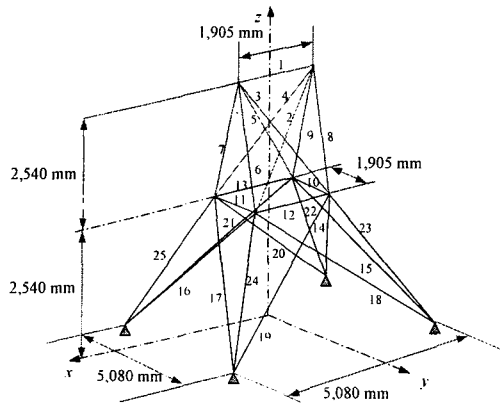


Fig. 8 Twenty five-member transmission tower

Table 11 Design variables and their levels for the twenty five-member transmission tower ($\times 10^2 \text{ mm}^2$)

Level	Design variables (Number of member)						
	A	B	C	D	E	F	G
	(1)	(2,3, 4,5)	(6,7,8, 9)	(10,11, 12,13)	(14,15, 16,17)	(18,19, 20,21)	(22,23, 24,25)
1	10	10	10	10	10	10	10
2	20	20	20	20	20	20	20
3	30	30	30	30	30	30	30

여 $\pm 100 \text{ mm}^2$ 로 가정하고, L_{18} 표준 직교배열표를 사용하여 외측배열에 배치하였다. 내측배열과 외측배열의 972(54×18)회 해석을 통하여 Table 12의 설계변수별 일원표와 Table 13의 제곱합을 계산하였다. 제곱합을 통하여 설계변수 G가 표준편차에 영향도가 가장 큼을 알 수 있다.

(2) 일차 고유주파수의 평균과 표준편차에 영향도의 정도에 의하여 설계행렬을 구한다. 평균과 표준편차에 대한 설계변수의 영향도는 Table 13으로 나타낼 수 있다. 이러한 분류를 통하여 강건설계 수행을 위한 설계행렬이 식 (18)로 근사화하였다.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Standard deviation } s_f \\ \text{Mean } : m_f \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline X & X \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{DV}_i : G \\ \text{DV}_m : A, B, \dots, F \end{array} \right\} \quad (18)$$

1 단계: 25부재 전송탑의 하층 구조물인 설계변수 G(22, 23, 24, 35부재)의 단면적을 결정한다. Table 12의 설계변수별 일원표를 통하여 설계변수 G가 3수준인 $30 \times 10^2 \text{ mm}^2$ 일 때 변동이 최저가 된다.

2 단계: 나머지 설계변수들을 통하여 평균이 목표값에 근접하도록 설계변수들을 결정한다. 평균에 대한 설계변수별 일원표로부터, 설계변수 A, B, C,

Table 12 Analysis of the standard deviation for the twenty five-member transmission tower

Type	Level	A	B	C	D	E	F	G
Standard deviation	1	20.6	19.6	20.0	19.6	19.8	20.9	25.1
	2	18.8	19.0	19.5	19.2	18.8	18.1	17.2
	3	17.9	18.7	17.8	18.5	18.7	18.3	15.0

Table 13 Grouping of sum of squares for the twenty five-member transmission tower

Number of row	Sum of Squares for mean	Sum of Squares for standard deviation
A,B,C,D,E,F,G	1514	0.249
G	3460	3.621

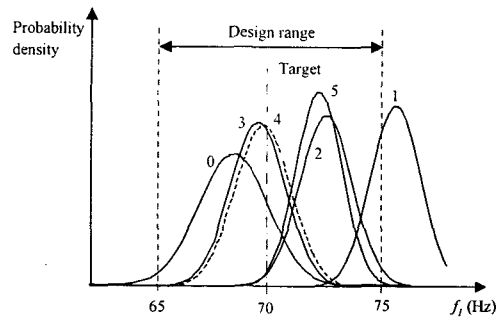


Fig. 9 Distributions of the first frequency according to the variation of design variables

D, E, F에 대한 추정치를 구한다. 추정치는 식 (12)로 계산되며, 설계변수가 6개이고 수준이 3수준이므로 $3^6=729$ 개가 발생한다. 추정치를 올림차순으로 정리한 후, 상위 10개의 설계를 설계변수의 변동을 고려하여 Table 14와 같이 평균과 표준편차에 대하여 재평가하였다. 여기서 앞서 실시한 54회의 실험과 동일한 조합들은 없었다.

3 단계: 상위 10개의 설계에 대한 강건성 지수를 평가한다. 다른 지수들과의 비교를 위하여 성공의 확률과 손실함수를 같이 계산한 결과는 Table 14와 같다. 성공의 확률로는 설계의 품질 우위를 구별하기 어렵다. 반면 설계범위의 영향이 적기 때문에 손실함수는 비교적 강건성 지수와 일치하는 경향을 보인다. 상위 5개의 설계와 초기 설계의 평균과 표준편차에 대한 정규분포를 그려보면 Fig. 9와 같다. 강건성 지수를 통하여 강건설계는 설계변수의 수준이 $[A_2, B_3, C_1, D_2, E_1, F_1, G_3]$ 인 경우이다. 이는 초기 설계인 $[A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2]$ 보다 표준편차는 19%의 감소를 가지며, 6%의 강건성이 증가하였다.

Table 14 Optimums level of an unconstrained problem for the twenty five-member transmission tower

	Levels A B C D E F G	Predicted frequencies	Normalized target bias (<i>B</i>)	Real means	Standard deviations	Probability of success (<i>P_s</i>)	Robustness index (<i>P_r</i>)	Loss function (<i>L</i>)
0	2 2 2 2 2 2 2	-	-	68.956	0.947	0.999	0.921	0.079
1	2 3 2 3 2 3 3	70.005	0.005	71.658	0.725	0.999	0.869	0.131
2	3 2 2 2 2 2 3	70.020	0.020	73.582	0.688	0.980	0.470	0.532
3	3 3 1 2 2 3 3	70.039	0.039	69.783	0.757	1.000	0.975	0.025
4	2 3 1 2 1 1 3	70.040	0.040	69.922	0.776	1.000	0.976	0.024
5	3 3 2 3 3 3 3	70.059	0.059	71.458	0.638	1.000	0.898	0.102
6	3 1 3 3 1 1 3	69.930	0.070	66.365	0.742	0.968	0.458	0.549
7	3 2 2 3 1 3 3	70.097	0.097	70.887	0.754	1.000	0.946	0.054
8	1 3 2 2 1 1 3	70.098	0.098	71.413	0.776	1.000	0.896	0.104
9	1 3 3 1 2 2 3	69.899	0.101	71.368	0.750	1.000	0.902	0.098
10	3 2 3 3 3 1 3	69.874	0.126	68.532	1.173	0.995	0.859	0.141

5. 결 론

강건설계를 수행하기 위하여 공리적 설계와 다 구찌법에 기반을 둔 강건성 지수를 이용한 강건설계 기법을 개발하였다. 강건성 지수는 목표값과 설계범위를 동시에 고려하고 있다. 예제를 통하여 설계범위가 강건해의 결정에 영향이 있음을 알 수 있었고, 또한 설계범위에 의하여 손실함수와 강건성 지수의 경향이 다를 수 있었다. 그리고, 평균을 목표값으로 접근시킬 때, 변동에 영향이 없으면 비교적 쉽게 강건설계를 수행할 수 있었다. 반면, 변동을 줄이고 평균을 목표값에 접근시킨 후에도 설계의 품질 우위를 구별하기 어려운 경우도 있었고, 이러한 경우 강건성 지수를 이용하면 효과적으로 강건해를 결정할 수 있었다.

강건설계는 기능적 요구와 제한조건을 정의하고, 설계파라메타를 선정하는 것으로부터 시작한다. 그리고, 민감도 혹은 분산분석의 제공함을 사용하여 평균과 표준편차의 비연성화 설계를 구현한 후, “변동을 줄임”, “제한조건을 만족하고 평균을 목표에 근접시킴”, “강건성 지수로 최상의 해를 결정”의 세단계의 과정을 수행한다. 이러한 강건성 지수를 이용하는 강건설계 기법은 기존의 방법보다 엄격한 강건성을 요구하지만, 구조물 설계와 같이 설계범위를 가지는 공학설계에서 우수한 강건해를 구할 수 있다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Pahl, G., Beitz, W. and Wallace, K., 1988, *Engineering Design: A Systematic Approach*, Springer-Verlag, New York.
- (2) Ullman, D. G., 1997, *The Mechanical Design Process*, 2nd ed, McGraw-Hill, Boston.
- (3) Taguchi, G. B., Chowdhury, S. and Taguchi, S., 2000, *Robust Engineering*, McGraw-Hill, New York.
- (4) Suh, N. P., 1990, *The Principles of Design*, Oxford University Press, New York.
- (5) Box, G. E. P. and Fung, C., 1993, "Is Your Robust Design Procedure Robust?," *Quality Engineering*, Vol. 6, No. 3, pp. 503~514.
- (6) Suh, N. P., 2001, *Axiomatic Design: Advances and Applications*, Oxford University Press, New York.
- (7) Hwang, K. H. and Park, G. J., 2002, "A New Information Index of Axiomatic Design for Robustness," *Transactions of KSME A*, Vol. 26, No. 10, pp. 2073~2081
- (8) Park, K. S., 2001, "Robust Design of a Vibratory Gyroscope Using Information Index," Master thesis, Hanyang University, Seoul.
- (9) Lee, K. H., Eom, I. S., Park, G. J. and Lee, I. W., 1994, "A Study on the Robust Design for Unconstrained Optimization Problems," *Transactions of KSME A*, Vol. 18, No. 11, pp. 2825~2836.
- (10) Park, S. H., 1995, *Modern Design of Experiments*, Min-Young Sa, Seoul.
- (11) Lee, K. H. and Park, G. J., 2002, "Robust Optimization in Discrete Design Space for Constrained Problems," *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 4, pp. 774~780.
- (12) Phadke, M. S., 1989, *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (13) Hwang, K. H., Kwon, W. S., Lee, K. H. and Park, G. J., 2000, "Design of Structure Using Orthogonal Array Considering Interactions in Discrete Design Spaces," *Transactions of KSME A*, Vol. 24, No. 12, pp. 2952~2962.
- (14) Vanderplaatts, G. V., 2000, *Genesis Users Manual Ver. 6.0*, VMA Engineering.
- (15) Haug, E. J. and Arora, J. S., 1979, *Applied Optimal Design: Mechanical and Structural Systems*, Wiley, New York.