

# LES 에서 중심 및 상류 컴팩트 차분기법의 적합성에 관하여 (I) - 수치 실험 -

박노마\* · 유정열† · 최해천\*\*

(2003 년 2 월 25 일 접수, 2003 년 5 월 2 일 심사완료)

## On the Suitability of Centered and Upwind-Biased Compact Difference Schemes for Large Eddy Smulation (I) - Numerical Test -

Noma Park, Jung Yul Yoo and Haecheon Choi

**Key Words :** Compact Difference Scheme(컴팩트 차분기법), Large Eddy Simulation(큰 에디모사), Finite Differencing Error(유한 차분오차), Aliasing Error(파수 중첩오차)

### Abstract

The suitability of high-order accurate, centered and upwind-biased compact difference schemes is evaluated for large eddy simulation of turbulent flow. Two turbulent flows are considered: turbulent channel flow at  $Re = 23000$  and flow over a circular cylinder at  $Re = 3900$ . The effects of numerical dissipation on the finite differencing and aliasing errors and the subgrid-scale stress are investigated. It is shown through the simulations that compact upwind schemes are not suitable for LES, whereas the fourth order-compact centered scheme is a good candidate for LES provided that proper dealiasing of nonlinear terms is performed. The classical issue on the aliasing error and the treatment of nonlinear terms is revisited with compact difference schemes.

### 1. 서론

수퍼 컴퓨터의 급속한 발전과 더불어 복잡한 난류유동의 해석을 위한 큰 에디 모사(large eddy simulation, 이하 LES)는 이제 기초 연구의 단계를 넘어 산업 현장에서도 적용 가능한 유망한 방법으로 부상하고 있다.<sup>(1)</sup> 특히 동점성 계수모델<sup>(2,3)</sup>로부터 시작된 난류모델의 획기적 개선은 이러한 변화를 가속시키고 있으며, 이는 이후 벽모델,<sup>(4)</sup> 다중 스케일<sup>(5)</sup> 및 다중 레벨<sup>(6)</sup> 모델, 그리고 아격자 예측 모델(subgrid-scale estimation model)<sup>(7)</sup> 등으로 이어지고 있다.

그러나 복잡한 유동의 LES를 위해 난류모델의

발전보다 더 중요한 것은 효율적이면서도 정확한 유동해석 기법의 확립이다.<sup>(1)</sup> 모든 LES 모델은 해상된 유동장의 정보를 이용해 아격자응력(subgrid-scale stress)을 추정하는 것이므로 필터 크기 이상의 유동장은 정확하게 계산된다는 대전제를 가진다. 따라서, 해상된 유동장은 수치 오차에 의해 오염되지 않아야 하므로 매우 정확한 수치해석 기법이 필요하다. 그러나, 등방성 난류, 채널유동 등 간단한 형상과 균질성을 가지는 유동의 LES에 적용되는 스펙트럴 기법은 복잡한 난류유동의 해석에 적용되기 어려우며, 이 경우 통상적인 유한 차분법이나 유한 체적법, 또는 유한 요소법 등이 적용되어야 한다.

유한 차분기법을 LES에 적용하는 데 있어서 가장 큰 수치해석 상의 문제는 LES가 큰 스케일의 유동구조만 해상 가능한 성긴 격자를 이용하는 데서 파생된다. 따라서 LES는 유동의 모든 스케일이 해상되는 직접수치모사(DNS)에 비해 차분오차에 민감하다. 이 때의 차분오차를 유한차분 오차

\* 서울대학교 기계항공공학부

† 책임저자, 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : jyoo@plaza.snu.ac.kr

TEL : (02)880-7112 FAX : (02)883-0179

\*\* 회원, 서울대학교 기계항공공학부

(finite-differencing error)와 파수중첩 오차(aliasing error)로 나누어 생각할 필요가 있다. 유한차분 오차는 차분기법이 격자스케일 근처의 높은 파수성분을 해상할 수 없기 때문에 발생하며, 파수중첩 오차는 비선형항을 유한한 격자를 가지는 물리적 공간에서의 곱으로 구할 때 포함되는 불필요한 고주파 성분으로, 서로 다른 기원을 가지는 독립적인 오차이다. 최근의 연구결과<sup>(8,9)</sup>에 따르면 차분 오차는 LES 모델링에 의한 오차 또는 모델링된 아격자 응력 자체 보다 크다. 특히 저차의 차분기법으로 갈수록 유한차분 오차가 커지는 데 반해, 고차의 차분기법에 있어서는 파수중첩 오차가 지배적인 요인이다.

한편, WENO<sup>(10)</sup>와 컴팩트 상류차분<sup>(11,12)</sup> 등을 기반으로 다양한 고차/고해상도의 상류차분기법들<sup>(13-15)</sup>이 최근까지도 활발하게 개발되고 있는 데, 이는 충격파/난류, 충격파/경계층 상호작용 등을 포함하는 유동의 정확한 모사를 위해 수치확산을 최소화하면서도 불연속면 주위의 수치적 진동이 없는 차분기법이 요구되기 때문이다. 난류유동의 계산에서 상류차분의 또 다른 장점은 내재된 수치확산이 파수중첩 오차를 줄이는 역할을 한다는 것이다. 반면 중심 차분 기법에서는 차분기법이 에너지 보존을 만족시키는 경우에만 파수중첩 오차로 인한 해의 발산을 막을 수 있다.<sup>(16,17)</sup> 그러나, 무엇보다도 상류차분 기법의 가장 큰 장점은 수치적 안정성에 있으며, 이로 인해 실제문제의 적용에서 상류차분이 선호되고 있다.

그러나, 최근 수치소산이 있는 차분기법은 난류 유동의 LES에 적합하지 않음이 밝혀지고 있다. 극도로 많은 격자를 사용한 경우를 제외하면, 상류차분기법들은 주어진 격자에서 해상가능한 파수성분의 대부분을 소산시켜버리는 것으로 나타났다. 이를 뒷받침하는 대표적인 예로는 Beaudan과 Moin<sup>(18)</sup>(이하 BM94)에 의해 수행된 레이놀즈 수 3900의 원형 실린더 주위유동의 LES를 들 수 있다. 이 연구에서 난류채널과 평판경계층 유동천이의 DNS<sup>(19,20)</sup>에 성공적으로 적용된 바 있는 5차 및 7차 정확도의 상류편향 차분 기법이 적용되었다. 그러나 실린더 유동의 LES를 통해 얻은 결론은 작은 스케일이 격자에 의해 해상되는 실린더 주위를 제외하고는 대부분의 후류 영역에서 수치확산은 아격자 응력을 압도한다는 것이었다.<sup>(16,18)</sup> 이러한 결론에도 불구하고, 이후에도 LES에서의 상류차분의 적용 가능성에 대해 많은 연구<sup>(21-25)</sup>가 수행되었다. QUICK을 적용한 원형 실린더 유동<sup>(21)</sup>의 결과 및 고전적인 충격파 포획기법과 WENO 등을 적용한 등방성 난류<sup>(22)</sup>와 난류채널<sup>(23)</sup>의 결

과는 BM94의 결론을 뒷받침하지만, ENO 및 WENO를 적용한 2차원 등방성 난류 유동<sup>(24)</sup> 및 AUSM을 적용한 제트 유동<sup>(24)</sup>의 계산결과는 중심차분의 결과와 큰 차이가 없으며 따라서 BM94와 상반된 결론을 내리고 있다. 따라서 다른 난류 유동장과 다른 상류차분 기법, 특히 최근에 제안된 고해상도 상류차분 기법들에 대해서도 BM94의 결론이 충분히 일반적인지에 대한 의문이 발생한다.

본 연구의 목적은 위의 의문에 대해 답하는 것이다. 이와 함께 복잡한 유동의 LES에 있어서 고차의 컴팩트 중심 차분기법의 적합성에 대한 조사도 본 연구의 또 다른 목적이다. 특히, 이전 연구들<sup>(17,26-28)</sup>의 연장선상에서 수치실험 및 해석을 통해 대류항 차분형태와 파수중첩오차의 관계를 밝히는 데 초점이 맞춰져 있다.

## 2. 수치해석 기법

지배방정식은 질량, 운동량, 에너지 방정식 및 상태방정식으로 구성된 압축성 유동의 보존방정식이며, 이를 직교 좌표계에서 공간에 대해 필터링된 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} u_k) &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho} u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} u_i \bar{u}_k + \bar{p} \delta_{ik} - \bar{\sigma}_{ik} + \tau_{ik}) &= 0, \\ \frac{\partial \bar{E}_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \bar{u}_k (\bar{E}_T + \bar{p}) - \bar{\sigma}_{ik} \bar{u}_i - \bar{Q}_k + \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2} q_k \right\} &= 0, \\ \bar{p} &= (\gamma-1) \left( \bar{E}_T - \frac{1}{2} \bar{\rho} u_k \bar{u}_k \right) - \frac{\gamma-1}{2} \tau_{kk} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 해상된 응력 텐서, 열유속 및 아격자응력 등은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \\ \tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} &= -2C_S \bar{\rho} \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}^* \equiv -2\mu_T \bar{S}_{ij}^*, \\ \tau_{kk} &= 2C_I \bar{\rho} \Delta^2 |\bar{S}|^2, \\ \bar{Q}_k &= \frac{\mu}{(\gamma-1)M_\infty^2 \text{Re Pr}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k}, \\ q_i &= -\bar{\rho} \frac{C_S \Delta^2 |\bar{S}|}{\text{Pr}_T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \equiv -\frac{\mu_T}{\text{Pr}_T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 임의의  $\phi$ 에 대해  $\tilde{\phi}$ 는 질량 평균된 Favre-

필터(즉,  $\tilde{\phi} = \overline{\rho\phi}/\bar{\rho}$ )를 의미한다.  $S_{ij}$  는 속도변형률 텐서이며  $|S| = \sqrt{2S_{ij}S_{ji}}$  로 정의된다. 식 (2)에서 아직 결정되지 않은 양은 Smagorinsky 계수  $C_S$ ,  $C_I$  와 난류 Prandtl수  $Pr_T$  이며 이 값들은 동점성 계수 모델<sup>(6)</sup>을 통해 구해진다. 이렇게 구해진 계수들은 공간적으로 급격히 변하거나 음수가 될 수 있다. 이 현상자체는 물리적으로 타당하며 동적 모델의 바람직한 특성이지만 실제 계산에서는 수치적 불안정성을 야기할 수 있다.<sup>(7)</sup> 따라서 최소자승법<sup>(29)</sup>과 균질 방향으로의 평균기법이 적용되었다. 검사필터와 격자필터의 비는 2 로 주었으며,<sup>(2)</sup> 검사필터로는 Simpson-1/3 법칙을 이용한 top-hat 필터가 적용되었다.

격자형상함수, 유동변수 및 유속 등을 포함한 모든 공간차분에는 4차의 표준 컴팩트기법<sup>(30)</sup>이 적용되었다. 단 대류항의 미분에는 다음과 같이 자유 계수  $\alpha$ 를 가지는 보다 일반적인 형태의 엇대칭 Padé 기법<sup>(11)</sup>이 적용되었다.

$$(1 + \alpha)\phi'_{i-1} + 4\phi'_i + (1 - \alpha)\phi'_{i+1} = \frac{1}{h} \{(-3 - 2\alpha)\phi_{i-1} + 4\alpha\phi_i + (3 - 2\alpha)\phi_{i+1}\} \quad (3)$$

식 (3)은  $\alpha = 0$  일 때 4차의 표준 컴팩트기법(이하 COM4)이 되며, 다른  $\alpha$ 에 대해서는 3차 정확도의 컴팩트 상류편향 차분기법(compact upwind-biased difference, 이하 CUD)이다. Zhong<sup>(11)</sup>은  $\alpha = 0.25$  를 추천하였으므로 이 경우 (3)을 CUDZ 라 한다.  $\alpha = 1.5$  일 때 (3)은 Tolstykh 와 Lipavskii<sup>(12)</sup>에 의해 제안된 상류차분기법이 되며, 그들의 명명을 따라

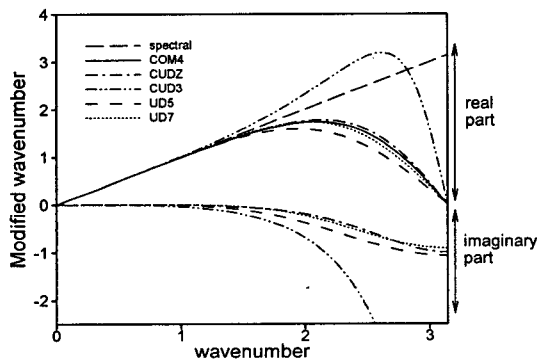


Fig. 1 Modified wavenumber for various differencing scheme

CUD3라 한다. CUDZ 와 CUD3 는 각각 구 주위 난류유동의 층류영역<sup>(31)</sup>과 점탄성 유체유동의 구성방정식<sup>(32,33)</sup>에 성공적으로 적용된 바 있다.

Fig. 1은 이 컴팩트기법들에 대한 수정파수를 나타낸다. 또한 스펙트랄기법과 5차 상류차분(이하 UD5) 및 7차 상류차분(UD7)<sup>(18)</sup>의 수정파수도 함께 나타내었다. 그림에서  $\alpha$ 의 값이 커질수록 수치소산의 양 또한 커짐을 알 수 있는데, 이는 수정파수 허수부의 크기로 나타내어진다. 따라서 계수  $\alpha$ 의 값을 조절함으로써 대부분의 고해상도 상류차분기법의 파수특성을 근접하게 모사할 수 있다. 예를 들어 UD7의 수정파수 특성은 CUDZ와 매우 유사하며, WENO3<sup>(10)</sup>와 같은 비선형 기법은 불연속성이 없을 경우 UD5와 파수특성이 같다.  $\alpha \neq 0$ 인 상류차분에 한해 다음과 같은 국소 Lax-Friedrichs 유속 벡터 분리법이 적용되었다.

$$F^\pm(Q) = \frac{1}{2}(F(Q) \pm |A|Q) \quad (4)$$

여기서  $|A| = \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_5|)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_5$  는 유속 벡터  $F(Q)$ 의 고유치 벡터이고  $Q$  는 식 (1)에서 정의된 보존변수, 즉  $Q = \{\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E_T\}^T$  이다. 식 (4)와 같은 방법외에도 많은 유속분리 방법들이 있으며, 이에 관해서는 참고문헌 (10)과 (34) 등에 잘 나타나 있다. 고유치가 음수인 유속의 차분에는 식 (3)과 중심점에 대해 계수가 대칭인 기법이 적용되었다.

COM4( $\alpha = 0$ )의 경우 보존형(divergence form), 대류형(advective form) 및 엇대칭형(skew-symmetric form)의 비선형항이 고려되었는데, 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} N_i^d &= \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}, \\ N_i^a &= \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}, \\ N_i^s &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Kravchenko 와 Moin,<sup>(17)</sup> Zang,<sup>(26)</sup> Blaisdel 등<sup>(27)</sup>은 1차원 해석 및 수치실험을 통해 엇대칭형이 파수중첩 오차를 최소화함을 보인 바 있다. 반면, Fedioun 등<sup>(28)</sup>은 대류형이 전체 수치오차를 최소화한다고 주장하였다.

통상적으로 컴팩트 차분기법에는 3차 및 4차의 Runge-Kutta 기법과 같은 외재적 시간전진기법이

적용되지만 벽이나 전단층이 존재하는 경우, 격자의 밀집으로 인한 심각한 시간 간격의 제약으로 계산시간의 증가가 불가피하다. 이 문제를 극복하기 위해 본 연구에서는 Beam-Warming 기법<sup>(35)</sup>을 컴팩트 차분으로 확장한 내재적 시간 차분기법<sup>(36-38)</sup>을 적용하였다. 물리적 시간간격의 전진에는 2 차 정확도의 Crank-Nicolson 기법이 적용되었으며, 자코비안행렬의 해는 각 방향으로 근사인수분해된 블록 3 대각 행렬 해법으로 구해진다. 이 때 계산량의 감소를 위해 균질방향으로 대각화기법<sup>(39)</sup>이 적용되었다. 또 선형화오차 및 근사인수분해오차를 제거하기 위해 매 시간간격마다 Newton 비선형 반복해법이 적용되었다.

한편, COM4의 경우 수치적인 점성이 없으므로 비선형성으로 인한 중첩오차, 2-Δ 파에 의한 교란(odd-even decoupling), 운동에너지 비보존, 경계조건, 격자의 불균등성 등으로 인한 수치적 교란이 시간에 대해 쉽게 증폭될 수 있다.<sup>(40)</sup> 이러한 불안정성을 제거하기 위해 컴팩트 필터<sup>(30,40,41)</sup>를 적용한다. 임의의 스칼라 또는 벡터 성분  $\phi$ 에 대해 필터된 양  $\hat{\phi}$ 는 다음의 3 대각 행렬시스템의 해로 주어진다.

$$\alpha_f \hat{\phi}_{i-1} + \hat{\phi}_i + \alpha_f \hat{\phi}_{i+1} = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2} (\phi_{i+n} + \phi_{i-n}) \quad (6)$$

이 때  $\alpha_f$ 는  $-0.5 < \alpha_f \leq 0.5$ 에서 정의되는 조절가능한 자유계수인데, 이 값이 커질수록 필터의 영향은 작아지며  $\alpha_f = 0.5$ 일 때 필터되지 않은 값으로 환원된다. 본 연구에서는 보존변수에 대해 8 차 정확도의 필터<sup>(41)</sup>를 적용하였다. 계수  $a_n$ 은 Taylor 급수전개로부터 얻어지는 데, Gaionde와 Visbal<sup>(41)</sup>을 참고하라. 고차의 필터를 적용하더라도 필터링은 해상된 해에 영향을 미치므로 난류유동의 계산 시 상당한 주의를 요한다. 본 연구에서는 필터의 영향을 최소화하기 위해 통상적으로  $\alpha_f > 0.49$ 의 값을 주었으며, 매 10 ~ 30 회의 물리적 시간간격마다 한번씩 필터를 적용하였다. 물론 이 값들은 문제의 특성과 사용된 격자에 따라 달라지며 본 연구에 적용된 문제들에 대해서는 많은 수치실험을 통해 필터링이 해상된 유동장에 영향을 미치지 않으며 2-Δ파의 제거만을 위해 작동함을 확인하였다. 수치확산이 내재된 고해상도 상류차분을 쓰는 방법과 중심차분기법에 고차의 필터링을 하는 방법은 해의 안정화를 피한다는 측면에서 같으며 실제 난류유동의 계산을 통해서 두 방법을 비교해 보는

것 또한 흥미로운 일이다.

### 3. 수치실험 결과

#### 3.1 Re = 23000의 난류채널유동

첫번째로 해석한 유동은 중심속도  $U_c$ 와 채널 반폭  $\delta$ 를 기준으로 한 레이놀즈수 23000의 완전 발달된 난류 채널유동이다. 채널유동은 큰 유동구조가 존재하지 않으며 오직 벽근처의 응집구조에 의해 특성이 결정되므로 LES에 있어서는 매우 도전적인 문제이다. 이 유동에 대해서는 Kravchenko와 Moin<sup>(17)</sup>(이하 KM97)이 의사-스펙트럴 기법(pseudo-spectral method)을 적용한 코드의 균질방향 수정과수를 변화시키는 방법으로 2 차 정확도의 중심차분(CD2)부터 스펙트럴 기법까지 다양한 차분 기법을 모사해 LES를 수행한 바 있다.

격자 분포 및 초기조건 등의 계산조건은 KM97과 같다. 주유동 방향(x), 벽에 수직인 방향(y), 너비 방향(z)으로 각각  $48 \times 64 \times 48$ 의 격자가 적용되었으며, 계산영역은 주유동 및 너비방향으로 각각  $2\pi\delta, \pi\delta/2$ 이다. 격자간격을 벽단위로 환산하면  $\Delta x^+ = \Delta x u_\tau / \nu \approx 130, \Delta y^+_{\min} \approx 0.5, \Delta y^+_{\max} \approx 110, \Delta z^+ \approx 33$ 으로 매우 성긴 격자에 해당한다. 따라서 수치기법의 영향을 명확하게 볼 수 있을 것으로 생각된다. 본 연구에 사용된 압축성지배방정식(1)은 레이놀즈 수와 함께 마하 수와 프란틀 수를 필요로 하는데, 각각  $M_\infty = 0.2$ 와  $Pr = 0.7$ 로 주었다. 이는 압축성 효과를 무시할 수 있는 공기의 유동조건에 해당한다. 주유동 및 너비 방향으로 주기 경계조건을, 벽에서는 점착조건과 단열조건을 주었다. 주유동 방향으로 주기조건을 주기 위해 식(1)의 운동량 방정식과 에너지 방정식에 생성 항을 첨가하였다. 이 생성항은 공간적으로 일정하며 질량유속이 일정하도록 매 시간 간격마다 갱신된다. 자세한 방법은 Coleman 등<sup>(42)</sup>을 참고 하라.

**Table 1** Numerical simulations of turbulent channel flow with various discretization schemes.

Scheme	Nonlinear terms	SGS model	Results
COM4	Divergence	O	↑
COM4	Skew-symmetric	O, x	•
COM4	Advective	O	•
CUDZ	Divergence	O, x	↓
CUD3	Divergence	O, x	↓

• Stable; ↑ numerically unstable; ↓ flow laminarizes

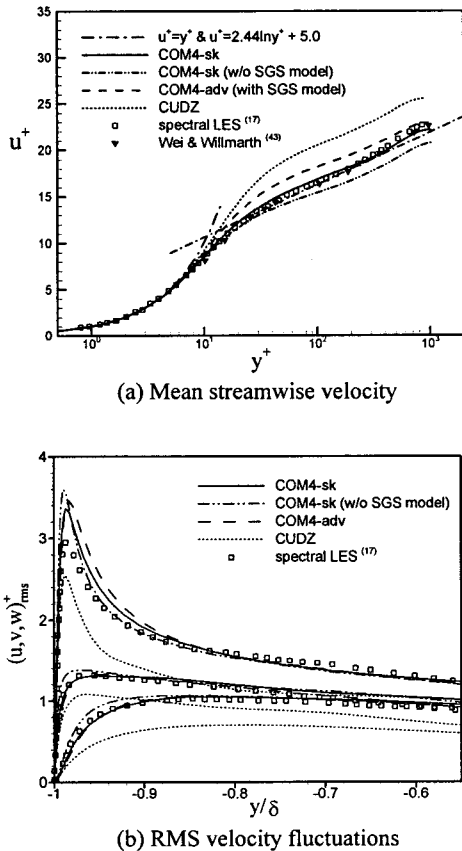


Fig. 2 Mean quantities for turbulent channel flow.

계산시간간격은  $\Delta t = 0.0068/U_c$ 로 고정 되었으며, 이는 RK4와 같은 완전 외재적 기법으로 계산할 경우에 비해 10배 이상 큰 값이다. 앞서 언급한 바와 같이 COM4의 경우 매 25회의 시간간격마다 한 번씩 필터가 적용 되었으며, 이 때 필터계수는  $\alpha_f = 0.495$ 로 주었다.

차분기법과 아격자 응력모델의 유무에 따라 다양한 계산이 수행되었는데, 각 계산의 안정성 여부 및 주요 특징을 Table 1에 정리하였다. 비선형항을 보존형으로 구성한 경우 수치적 불안정성으로 인해 발산하였는데, 이는 KM97의 결과와 일치하는 것이다. 이는 파수중점오차로 인해 운동에너지 보존이 만족되지 않는 데 따른 것이다. 반면, 엇대칭형으로 비선형항을 구성한 경우는 아격자 응력모델 유무와 상관없이 안정적인 해를 얻을 수 있었다. 대류형 또한 엇대칭형과 같이 안정적인 해를 얻을 수 있었다.

한편 상류차분을 적용한 계산은 층류화되는 경향이 있다. CUD3를 적용한 경우 유동은 급속히 층

류화되는 데 비해, 이 보다 수치소산이 적은 CUDZ의 경우 초기의 무차원교란은 완전발달된 난류유동으로 발전되고 이 난류유동이 상당 시간 유지된다. 그러나 평균속도나 난류섭동량은 정해진 값들로 수렴하지 않으며 조금씩 층류해의 방향으로 이동해 감을 볼 수 있었다. 따라서 궁극적으로 CUDZ의 결과 또한 층류화될 것임을 예측할 수 있다. 이러한 층류화의 원인으로는 수치소산을 들 수 있지만, 이것이 증가된 유한차분 오차에 의한 것인지는 명확하지 않다.

식 (3)의 CUD는  $\alpha = 0$ 일 때 보존형으로 구성된 COM4가 된다. 실제로 보존형 COM4의 경우 필터의 양을 늘릴 경우, 예를 들어  $\alpha_f = 0.4$ 로 하고 매 시간간격마다 필터를 적용한 경우 수치적 불안정성이 사라지는 대신, 유동이 층류화됨을 확인할 수 있었다.

Fig. 2(a)와 2(b)는 각각 주유동 방향의 평균속도와 속도섭동량을 나타낸 것이다. KM97의 스펙트럴 LES결과와 실험결과<sup>(43)</sup>도 함께 나타내었다. CUDZ의 경우 층류화 중이지만 비교 예시를 위해 나타내었다. 엇대칭형 대류항을 사용한 COM4의 LES 결과는 스펙트럴 LES 및 실험결과와 매우 잘 일치한다. 아격자응력 모델이 없는 경우, 평균유동은 작게 예측하고 벽근처의 속도섭동량을 크게 예측하는데, 이는 KM97 및 다른 LES 결과들과 일치하는 것이다. 대류형의 경우 속도섭동량은 매우 잘 예측하나, 벽단위로 무차원된 평균 유동장을 다소 크게 예측한다. 한편, CUDZ의 결과들은 평균 유동장을 크게 예측하고 속도 섭동량을 작게 예측하는데, 이는 과도한 수치확산이 있을 경우의 전형적인 결과들이다.

이러한 양상은 Fig. 3과 같은 벽근처의 1차원 에너지 스펙트럼에서 극명하게 나타난다. 아격자 응력을 적용한 COM4의 스펙트럼은 차분기법에 의해 결정되는 최대해상가능 파수까지 스펙트럴 LES의 스펙트럼과 매우 잘 일치한다. 아격자 응력 모델이 없는 경우는 모든 파수에서 스펙트럼을 크게 예측한다. 이러한 에너지 스펙트럼 으로부터 아격자 응력모델의 효과는 명백하다. 그러나, 난류 모델이 없는 경우의 스펙트럼 또한 CUDZ의 결과와 비교할 때 실험결과와 비교적 잘 일치한다. CUDZ의 스펙트럼은 매우 낮은 파수영역을 제외하고는 거의 모든 파수에서 에너지를 소산시킴을 볼 수 있다.

Fig. 4는 전체소산량에서 아격자 소산이 차지하는 비율을 나타낸 것이다. 이는 차분오차가 아격자 응력에 미치는 영향을 직접적으로 가늠할 수 있는

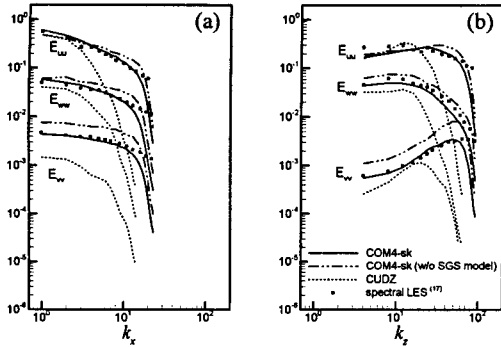


Fig. 3 One-dimensional energy spectra at  $y^+ \approx 15$  for turbulent channel flow: (a) streamwise wavenumber; (b) spanwise wavenumber

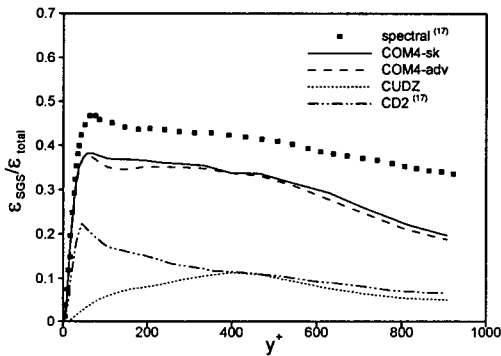


Fig. 4 Ratio of the subgrid-scale dissipation to total dissipation for turbulent channel flow

척도이다. Fig. 4에서 스펙트럴 기법과 CD2의 결과는 KM97에서 발췌한 것이다. Fig. 1에 제시한 각 기법의 수정과수를 고려하면, 엇대칭형 및 대류형 COM4의 계산결과 나타난 소산량은 정량적으로 매우 적절해 보인다. 그러나 CUDZ로부터 구한 소산률 비는 CD2에 비해서도 작을 뿐 아니라 정성적인 거동 또한 다른 기법들과 매우 다르다. 이는 CUDZ로는 아격자응력 모델이 잘 작동하지 않음을 의미한다.

Fig. 5는 순간 유동장의 와동 구조를  $\lambda_2$ -인식 기법<sup>(44)</sup>으로 가시화한 것으로, 통계량으로부터 얻은 결론들을 뒷받침해 준다. 아격자 응력모델을 적용한 COM4의 경우 벽면 근처의 응집 구조를 나타내는 뚜렷한 줄무늬 구조를 관찰할 수 있다. 이 때 각 줄무늬 구조간의 거리는 벽단위로 약 100인 데, 이는 저 레이놀즈수 채널유동의 DNS 결과로 알려진 값들과 일치한다. 그러나 아격자

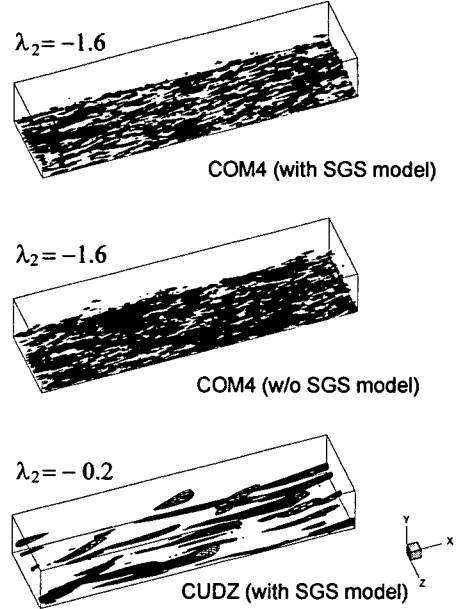


Fig. 5 Instantaneous vortical structures in turbulent channel flow

모델을 적용하지 않으면, 유동장은 해상되지 않은 파수의 수치오차로 오염되어 줄무늬구조가 뚜렷하지 않음을 볼 수 있다. 반면, CUDZ로 계산된 순간 유동장은 COM4의 경우보다 훨씬 작은 크기의 와동만이 관찰되었으며, 마치 저 레이놀즈 수의 채널유동과 같은 전혀 다른 유동구조를 보여준다.

### 3.2 Re = 3900의 원형 실린더 주위의 유동

다음으로 계산된 문제는 자유속도  $U_\infty$ 와 직경  $D$ 를 기준으로 한 레이놀즈 수 3900의 원형 실린더 주위의 유동이다. 이 레이놀즈 수에서 유동박리는 층류유동에 속하고 전단층의 불안정성으로 인해 후류영역은 난류유동에 속한다. 특히, 이 유동은 복잡한 유동장의 LES에 있어서 도전적인 문제로 CD2,<sup>(16,21)</sup> 상류편향차분<sup>(18,21)</sup> 및 B-spline 기법<sup>(45)</sup> 등의 다양한 차분기법을 적용한 연구가 행해진 바 있다.

Fig. 6(a)와 6(b)는 사용된 격자분포를 나타낸다. 격자 수 및 계산영역은 BM94 및 Kravchenko와 Moin<sup>(45)</sup>의 결과를 참고하여 본 연구의 코드를 이용한 다양한 수치실험을 통해 결정되었다. 최종적으로 선택된 격자는 원주, 반경 및 너비 방향으로  $144 \times 201 \times 48$ 의 O형격자계로, 계산영역의 반경은  $40D$ 이고 너비방향의 길이는  $\pi D$ 이다. 이는 BM94

**Table 2** Flow parameters for the flow over a circular cylinder

Data from	$C_D$	$-C_{pb}$	$U_{min}$	
Exp. <sup>(47-49)</sup>	0.99±0.05	0.88±0.05	0.215 ±0.005	-0.24±0.1
UD7 <sup>(18)</sup>	1.00	0.95	0.203	-0.32
CD2 <sup>(16)</sup>	1.00	0.93	0.207	-0.35
B-spline <sup>(45)</sup>	1.04	0.94	0.210	-0.37
Run1	1.02	0.89	0.209	-0.33
Run2	1.04	0.93	0.209	-0.34
Run3	0.95	0.80	0.210	-0.27

Run 1: COM4 with SGS model; Run2: COM4 without SGS model; Run3: CUDZ with SGS model

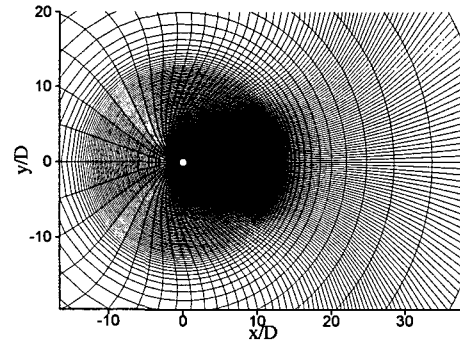
와 원주 및 너비방향의 격자수는 같고 반경방향으로 50% 가량 더 많은 격자이며, Kravchenko와 Moin<sup>(45)</sup>의 Case2와 전체격자수가 거의 같고, Case3의 약 60%에 해당한다.

격자 수 뿐 아니라 격자의 분포 또한 정확성과 안정성의 측면에서 매우 중요한데, Fig. 6의 격자는 BM94에서 사용된 대수적인 방법을 응용해 생성한 것으로, 모든 격자점에서의 공간미분이 연속적이도록, 즉 격자 형상함수들이 부드러운 분포를 가지도록 설계되었다.

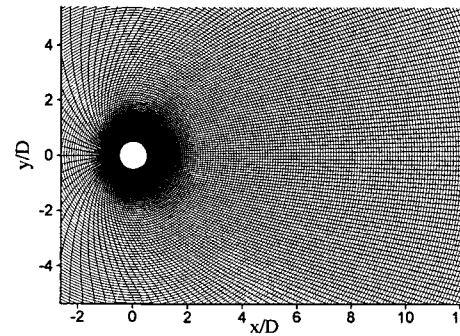
그러나, Fig. 6에서 알 수 있듯이  $2 < x/D < 12$ 의 후류영역에서 거의 균일한 격자분포를 유지하기 위해 전후류영역에서 반경방향으로 격자가 매우 밀집되어 있음을 볼 수 있다. 이러한 격자의 밀집과 비균일성으로 인해 수치적 불안정성이 야기될 수 있다.<sup>(41,46)</sup> 격자간격의 큰 변화에 따른 불안정성은 중심차분의 경우 채널 계산에서와 마찬가지로 컴팩트 필터를 이용해 제거되었으며, CUDZ 등과 같은 상류차분에서는 중심차분의 경우와는 달리 불안정성이 발생하지 않았다.

자유류 마하 수 및 프란틀 수는 채널과 마찬가지로  $M_\infty = 0.2$ ,  $Pr = 0.7$ 로 두었으며, 시간간격은  $\Delta t = 0.003 D/U_\infty$ 로 고정되었다. 144×101×24의 성근 격자계로 주기적인 보텍스 웨딩이 발생할 때까지 계산을 진행한 후 이 값을 내삽하여 초기조건으로 주었다. 이후 약 10주기(≈50  $D/U_\infty$ ) 정도 후부터 시작하여 추가적으로 약 18 주기(≈88  $D/U_\infty$ ) 동안 통계량을 수집하였다.

계산으로부터 얻어진 주요 유동 변수들과 이전의 LES 결과<sup>(16,18,45)</sup> 및 실험 결과<sup>(47-49)</sup>들은 Table 2에 정리되었다. Table 2에 나타난 본 연구의 결과는 아 격자 응력모델의 유무에 따른 COM4의 결과들과 CUDZ의 결과들이다.



(a) Grid distribution



(b) Near wake region

**Fig. 6** O-mesh (144×201×48) for flow over a circular cylinder. In (a), every other grid is plotted in the radial direction for clarity

COM4의 경우 비선형항은 엇대칭형으로 구성되어 있다. 난류 채널유동과는 달리 실린더 유동에서는 비선형항의 형태가 해에 거의 영향을 미치지 않으며, 따라서 보존형과 대류형을 적용한 결과도 거의 동일하다. 따라서 이 유동장의 경우 파수 중첩 오차가 거의 없음을 의미하는 것으로 채널유동에 비해 높은 해상도와 낮은 레이놀즈 수에 의한 영향인 것으로 생각된다.

스트롤 수 ( $St$ ), 항력 계수 ( $C_D$ ) 등을 포함한 통계량들은 차분기법과 난류모델에 관계 없이 실험 및 기존 LES의 범위안에 있음을 알 수 있다. 따라서, 이들은 수치기법에 크게 영향을 받지 않음을 알 수 있다. 그러나 CUDZ의 경우, 실린더 후정체점의 압력계수( $C_{pb}$ )와 재순환영역의 최소속도( $U_{min}$ )를 다소 작게 예측한다. Fig. 7은 각 기법의 순간 유동장의 와도 분포를 비교한 것으로 전단층의 박리와 Karman 와열(Karman vortex street)의 발달을 보여준다. 유동장이 잘 해상된 근접 후류 영역에서는 COM4의 결과와 CUDZ의 결과는 매우

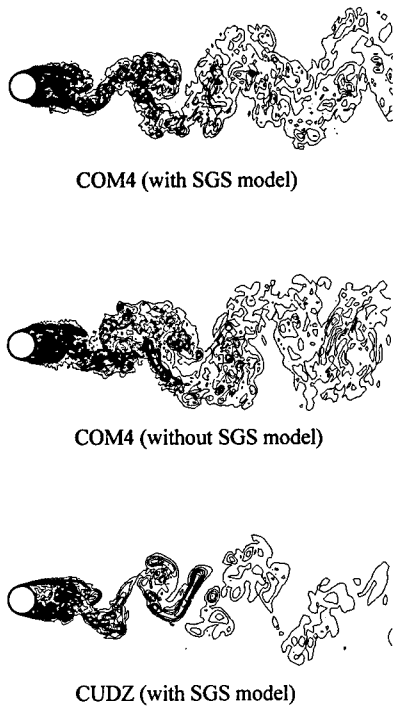
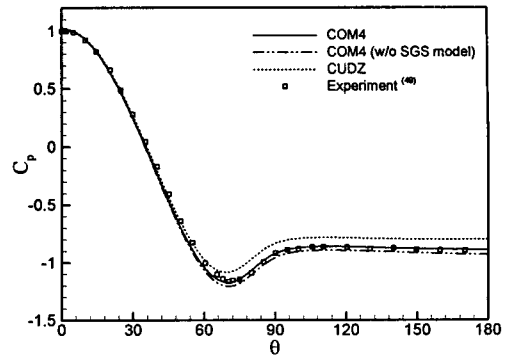
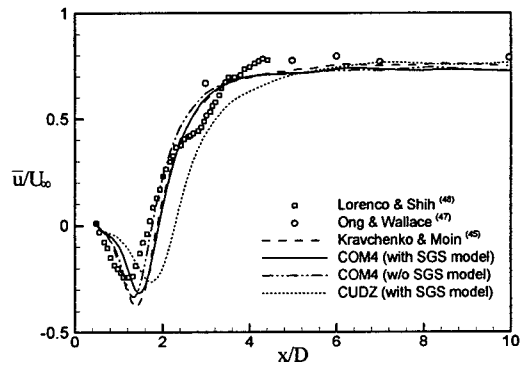


Fig. 7 Separating shear layer and development of Karman vortex street in flow over a circular cylinder at  $Re = 3900$ . Shown are 16 contours of instantaneous vorticity magnitude from  $\omega D/U_\infty = 0.5$  to 10.0

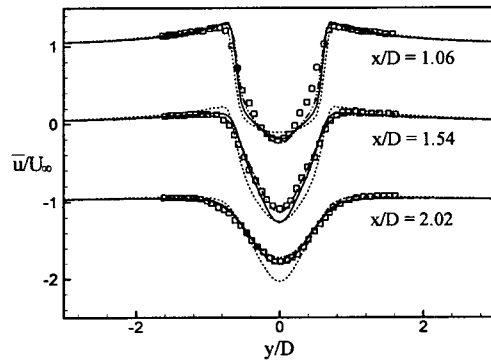
유사하다. 그러나 COM4의 결과와는 달리  $x/D > 3$ 인 영역에서 CUDZ의 결과에는 작은 스케일의 유동이 거의 보이지 않음을 알 수 있다. Fig. 8 (a), (b), (c)는 각각 실린더 표면에서의 압력계수,  $y = 0$ 에서의 주유동방향 속도분포, 후류영역 내에서의 속도분포를 나타낸다. 아격자 모델의 유무와 상관없이 COM4의 결과들은 실험값과 잘 일치한다. 다만,  $x/D = 1.06$ 에서 주유동 방향의 평균속도가 실험치는 V형에 가까운 데 반해, 계산 결과는 U형에 가까운 것을 알 수 있는 데(Fig. 8(c)), 실험에서는 내재된 난류(background turbulence)등의 영향으로 인해 전단층의 천이가 일찍 발생하기 때문인 것으로 생각된다.<sup>(45)</sup> 이는 순간와도장(Fig. 7) 및  $y = 0$ 에서의 주유동 방향속도분포(Fig. 8(b))에서도 확인할 수 있다. 아격자 모델이 적용되지 않은 경우, 수치소산의 부족으로 인해 전단층 주변에 2- $\Delta$ 파에 가까운 고주파가 발생하고 이로 인해 전단층의 천이가 앞당겨짐을 알 수 있다. 따라서, 실험치와 보다 가까운 속도분포가 얻어진다. 그러나,



(a) pressure coefficient on the cylinder surface



(b) Mean streamwise velocity at  $y = 0$



(c) Mean streamwise velocity at three streamwise locations in the wake

Fig. 8 Mean statistics for flow over a circular cylinder at  $Re = 3900$

아격자 응력이 있는 경우의 결과와 정량적 차이는 크지 않다. 반면, CUDZ의 경우 과도한 수치확산으로 인해 천이가 상당히 지연되어 압력계수와 평균



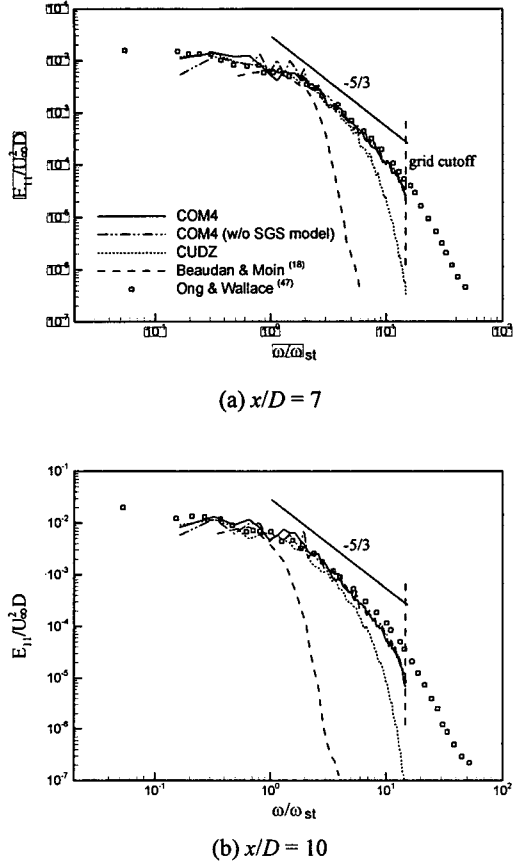


Fig. 9 One-dimensional frequency spectra in the wake region of the cylinder

속도 등이 실험값과 차이를 보임을 알 수 있다. 수치확산의 영향은 격자해상도가 비교적 떨어지는  $x/D > 5$  이상의 후류 영역에서 더욱 뚜렷이 나타나는 데, 이는 에너지 스펙트럼을 통해 쉽게 관찰할 수 있다. Fig. 9(a)와 (b)는 각각  $x/D = 7$ 과 10에서의 주유동방향 속도섭동의 1 차원 스펙트럼을 나타낸다. 본 연구와의 비교를 위해 실험<sup>(47)</sup> 및 UD7을 적용한 BM94의 결과를 함께 나타내었다. 그림에 나타난 스펙트럼은 Choi와 Moin<sup>(50)</sup>의 방법을 따라 48개의 너비방향의 격자점 각각에서  $88 tU_\infty/D$  동안 수집된 주유동 방향 속도로부터 구했는데, 이를 다시 5개의 50% 중첩된 영역으로 나누고 Hanning 윈도우를 적용하여 각 영역의 스펙트럼을 구한다. 이렇게 구해진  $5 \times 48 = 240$  개의 스펙트럼은 독립적인 구현으로 가정할 수 있으므로, 이를 평균하여 최종적인 스펙트럼을 구한다. 따라서 최소 해상가능 주파수는  $\{(5+1)/2\}/88 = 0.034 fD/U_\infty \approx 0.16 St$ 이다. 한편, 최대 해상가능 주

파수는 샘플링 간격(계산 시간간격)에 의해 주어지지만, 이에 비해 격자 간격이 매우 크므로 Taylor 가정을 적용하면 실제로는 격자 간격에 의해 결정된다. 이 최대주파수가 격자 절단 주파수(grid-cut-off frequency)이다. 영역  $5 < x/D < 12$ 에서 평균 격자간격  $\Delta x/D \approx 0.105$ 이고, 이 영역의 평균 속도가 약  $0.7U_\infty$ 이므로(Fig. 8(b)) 이를 유동구조의 대류 속도라 가정하면 최대 해상 가능 주파수는  $0.7/(2 \times 0.105) \approx 3.3 fD/U_\infty \approx 16 St$ 이며, 이를 격자 절단 주파수로 정하였다.

Fig. 9에서 아격자 응력모델의 유무와 관련 없이 COM4의 결과는 격자 절단 파수까지 실험결과와 매우 잘 일치한다. 반면, CUDZ의 결과는 고주파영역의 에너지가 소실되는 것을 볼 수 있다. 따라서 이 영역에서도 아격자 응력의 영향보다는 차분기법의 영향이 크며, 이는 기존의 LES<sup>(21, 45)</sup>와도 일관된 결론이다. 한편, Fig. 9에서 UD7을 적용한 BM94의 결과는 CUDZ에 비해 수치확산이 훨씬 커서 거의 모든 주파수에서 에너지가 소산됨을 볼 수 있다. CUDZ와 UD7의 수정파수가 유사함에도(Fig. 1), 이처럼 차이가 나는 주된 이유는 채택된 격자의 차이에 있다고 생각된다. BM94에서는 반경 방향으로 본 연구보다 적은 136개의 격자를 사용했으며,  $x/D = 7$ 에서의 격자 간격은  $\Delta x/D \approx 0.25$ 이다. 따라서 이 경우 격자절단 주파수는 약  $6.7St$ 이 된다. 한편, Fig. 9(a)에서 CUDZ의 스펙트럼을 관찰하면 대략  $5St$ 에서 스펙트럼의 감쇄(fall-off)가 시작된다. 따라서 해상효율(resolving efficiency)은 약 30% 정도이다. 이를 유사한 수정파수특성을 갖는 UD7에 적용하면 BM94의 경우  $6.7St \times 0.3 \approx 2St$ 에서 감쇄가 시작될 것으로 예측되며, 이 예측은 Fig. 9(a)의 결과와 잘 일치한다.  $x/D = 10$ (Fig. 9(b))에서도 마찬가지로 생각할 수 있다. Fig. 9(b)에서 CUDZ와 UD7은 더욱 큰 차이를 보이는 데, 이는 본 연구에서는  $x/D = 12$ 까지 거의 균일한 격자간격이 유지되는 데 비해 BM94의 경우  $x/D = 10$ 부터 격자간격이 급격히 커지는 데 따른 수치 소산 때문인 것으로 생각된다.

이상의 실린더주위 유동의 계산 결과에서 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 첫째, 준임계영역의 실린더유동의 LES에서 아격자응력의 역할은 작으며, 격자와 차분기법의 영향이 지배적이다. 둘째, 수치확산은 근접 후류 예측에 결정적 영향을 미치는 전단층의 천이를 지연시키는 경향이 있다. 셋째, LES와 상류차분에 관한 BM94 및 Mittal과 Moin<sup>(16)</sup>의 결론은 정성적으로 옳다고 생각되나, 실린더 유동에 관한 한 정량적으로 다소 과장되어 있다.

## 4. 결 론

수치실험을 통해 LES에 있어서의 고차의 중심 및 상류 컴팩트차분의 적합성에 대해 연구하였다. 난류채널유동과 실린더주위 유동이 해석되었으며, 그 결과 컴팩트 중심차분은 엇대칭형 대류항 처리 등과 같은 적절한 파수중첩 오차의 제거만 이루어진다면 복잡한 난류유동에 성공적으로 적용될 수 있는 정확한 기법임을 알 수 있었다. 한편, 상류컴팩트 차분 또한 다른 상류차분기법과 마찬가지로 과도한 수치확산으로 인해 난류유동의 LES의 적용에 부적절함을 확인하였다.

그러나, 본 연구의 결과들은 특정한 유동과 계산조건 하에서 얻어진 결론으로 일반화되기 어렵다. 따라서 다른 수치적인 요인이 배제된 이상적인 조건에서의 이론적 해석을 통해 상류차분의 오차가 LES에 미치는 영향을 밝혀야할 필요성이 제기된다. 이에 관해서 저자들의 이어지는 연구<sup>(51, 52)</sup>에서 상세하게 밝혀질 것이다.

## 후 기

본 연구는 교육부 BK21사업과 과학기술부 창의적연구진흥사업의 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Moin, P., 2002, "Advances in Large Eddy Simulation Methodology for Complex Flows," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 23, pp. 710-720.
- (2) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W., 1991, "A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model," *Phys. Fluids A*, Vol. 3, pp. 1760-1765.
- (3) Moin, P., Squires, K., Cabot, W. and Lee, S., 1991 "A Dynamic Subgrid Scale Model for Compressible Turbulence and Scalar Transport," *Phys. Fluids A*, Vol. 3, pp. 2746-2757.
- (4) Nicoud, F., Baggett, J. S., Moin, P. and Cabot, W., 2001, "Large Eddy Simulation Wall Modeling Based on Sub optimal Control Theory and Linear Stochastic Estimation," *Phys. Fluids*, Vol. 13, pp. 2968-2984.
- (5) Hughes, T. J. R., Mazzei, L., Oberai, A. A. and Wray, A. A., 2002, "The Multiscale Formulation of Large Eddy Simulation: Decay of Homogeneous Isotropic Turbulence", *Phys. Fluids*, Vol. 13, pp. 505-512.
- (6) Dubois, T., Jauberteau, F. and Zhou, Y., 1997, "Influences of Subgrid Scale Dynamics on Resolvable Scale Statistics in Large-Eddy Simulations," *Physica D*, Vol. 100, pp. 390-406.
- (7) Domaradzki, J. A. and Loh, K., C., 1999, "The Subgrid-Scale Estimation Model in the Physical Space Representation," *Phys. Fluids*, Vol. 11, pp. 2330-2342.
- (8) Ghosal, S., 1996, "An Analysis of Numerical Errors in Large-Eddy Simulations of Turbulence," *J. Comput. Phys.*, Vol. 125, pp. 187-206.
- (9) Vreman, B., Geurts, B. and Kuerten, H., 1996 "Comparison of Numerical Schemes in Large-Eddy Simulation of the Temporal Mixing Layer," *Int. J. Numer. Met. Fluids*, Vol. 22, pp. 297-311.
- (10) Jiang, G. S. and Shu, C. W., 1996, "Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes," *J. Comput. Phys.*, Vol. 126, pp. 202-228.
- (11) Zhong, X., 1998, "High-Order Finite-Difference Schemes for Numerical Simulation of Hypersonic Boundary-Layer Transition," *J. Comput. Phys.*, Vol. 144, pp. 662-709.
- (12) Tolstykh, A. I. and Lipavskii, M. V., 1998, "On Performance of Methods with Third- and Fifth-Order Compact Upwind Differencing," *J. Comput. Phys.*, Vol. 140, pp. 205-232.
- (13) Adams, N. A. and Shariff, K., 1996, "A High-Resolution Hybrid Compact-ENO Scheme for Shock-Turbulence Interaction Problems," *J. Comput. Phys.*, Vol. 127, pp. 27-51.
- (14) Pirozzoli, S., 2002, "Conservative Hybrid Compact-WENO Schemes for Shock-Turbulence Interaction," *J. Comput. Phys.*, Vol. 178, pp. 81-117.
- (15) Wang, Z. and Huang, G. P., 2002, "An Essentially Nonoscillatory High-Order Pade-type(ENO-Pade) Scheme," *J. Comput. Phys.*, Vol. 177, pp. 37-58.
- (16) Mittal, R. & Moin, P., 1997, "Suitability of Upwind-Biased Finite-Difference Schemes for Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows," *AIAA Journal*, Vol. 35, pp. 1415-1417.
- (17) Kravchenko, A. G. and Moin, P., 1997, "On the Effect of Numerical Errors in Large-Eddy Simulations of Turbulent Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 131, pp. 310-322.
- (18) Beaudan, P. and Moin, P., 1994, "Numerical Experiments on the Flow past a Circular Cylinder at a Sub-Critical Reynolds Number," Report No. TF-62, Department of Mechanical Engineering, Stanford Univ.
- (19) Rai, M. M. and Moin, P., 1991, "Direct Simulations of Turbulent Flow Using Finite-Difference Schemes," *J. Comput. Phys.*, Vol. 96, pp. 15-53.
- (20) Rai, M. M. and Moin, P., 1993, "Direct Numerical Simulation of Transition and Turbulence in a Spatially Evolving Boundary Layer," *J. Comput. Phys.*, Vol. 109, pp. 169-192.
- (21) Breuer, M., 1998, "Numerical and Modeling Influences on Large Eddy Simulations for the Flow Past a Circular Cylinder," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 19, pp.512-521.
- (22) Garnier, E., Mossi, M., Sagaut, P., Comte, P. and Deville, M., 1999, "On the Use of Shock-Capturing Schemes for Large-Eddy Simulation," *J. Comput. Phys.*, Vol. 153, pp. 273-311.
- (23) Mossi, M. and Sagaut, P., 2003, "Numerical Investigation of Fully Developed Channel Flow Using Shock-Capturing Schemes," *Computers & Fluids*, Vol. 32, pp. 249-274.

- (24) Ladeinde, F., Cai, X., Visbal, M and Gaitonde, D. V., 2001, "Turbulence Spectra Characteristics of High Order Schemes for Direct and Large Eddy Simulation," *Appl. Numer. Math.*, Vol. 36, pp. 447-474.
- (25) Meinke, M., Schroder, W., Krause, E. and Rister, Th., 2002, "A Comparison of Second- and Sixth-order Methods for Large-Eddy Simulations," *Computers & Fluids*, Vol. 31, pp. 695-718.
- (26) Zang, T. A., 1991, "On the Rotation and Skew-Symmetric Forms for Incompressible Flow Simulations," *Appl. Numer. Math.*, Vol. 7, pp. 27-40.
- (27) Blaisdell, G. A., Spyropoulos, E. T. and Qin, J. H., 1996, "The Effect of the Formulation of Nonlinear Terms on Aliasing Errors in Spectral Methods," *Appl. Numer. Math.*, Vol. 21, pp. 207-219.
- (28) Fedouin, I., Lardjane, N. and Gökalp, I., 2001, "Revisiting Numerical Errors in Direct and Large Eddy Simulations of Turbulence: Physical and Spectral Space Analysis," *J. Comput. Phys.*, Vol. 174, pp.816-851.
- (29) Lilly, D., 1992, "A Proposed Modification of the Germano Subgrid Scale Closure Method," *Phys. Fluids A*, Vol.4, pp. 633-634.
- (30) Lele, S. K., 1992, "Compact Finite-Difference Schemes With Spectral-Like Resolution," *J. Comput. Phys.*, Vol. 103, pp. 16-42.
- (31) Kim, D., 2001, *Numerical Study on Dynamics and Control of Flow over a Sphere up to  $Re=10^4$* , Ph. D. thesis, Seoul National University
- (32) Min, T., Yoo, J. Y. and Choi, H., 2000 "Effect of Spatial Discretization Schemes on Numerical Solutions of Viscoelastic Fluid Flows," *KSME Journal B*, Vol. 24 (9), pp. 1227-1238.
- (33) Min, T., Yoo, J. Y. and Choi, H., 2001 "Effect of Spatial Discretization Schemes on Numerical Solutions of Viscoelastic Fluid Flows," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 100, pp. 27-47.
- (34) Anderson, W., Thomas, J. and Van Leer, B., 1986, "Comparison of Finite Volume Flux Vector Splitting for the Euler Equations," *AIAA Journal*, Vol. 24, pp. 1453-1460.
- (35) Beam, R. M. and Warming, R. F., 1978, "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations," *AIAA Journal*, Vol. 16, pp. 393-402.
- (36) Ekaterinaris, J. A., 1999, "Implicit, High-Resolution, Compact Schemes for Gas Dynamics and Aeroacoustics," *J. Comput. Phys.*, Vol. 156, pp. 272-299.
- (37) Park, N. and Yoo, J. Y., 2000, "A New Implicit Implementation of Compact Difference Scheme for the Direct Simulation of Compressible Flows," *Bulletin of the American Physical Society*, Vol. 45, No. 9, pp. 38-39.
- (38) Jin, B. J., Park, N. and Yoo, J. Y., 2001, "Large Eddy Simulation of Boundary Layer Transition on the Axial Turbine Blade by Rotor Induced Wake," FEDSM2001-18195, Proceedings of 2001 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, May 29 - June 1, 2001, New Orleans, L.A., USA.
- (39) Pulliam, T. H. and Chaussee, D. S., 1981, "A Diagonal Form of an Implicit Approximate-Factorization Algorithm," *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 347-363.
- (40) Visbal, M. R and Gaitonde, D. A., 1999, "High-Order-Accurate Methods for Complex Unsteady Subsonic Flows," *AIAA Journal*, Vol. 37, pp. 1231-1239.
- (41) Gaitonde, D. V. and Visbal, M. R., 2000, "Pade-type Higher-Order Boundary Filters for the Navier-Stokes Equations," *AIAA Journal*, Vol. 38, pp. 2103-2112.
- (42) Coleman, G. N., Kim, J. and Moser, R. D., 1995, "A Numerical Study of Turbulent Supersonic Isothermal-Wall Channel Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 305, pp. 159-183.
- (43) Wei, T. and Willmarth, W. W., 1989, "Reynolds-Number Effects on the Structure of a Turbulent Channel Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 204, pp. 57-95.
- (44) J. Jeong and F. Hussain, 1995, "On the Identification of a Vortex," *J. Fluid Mech.*, Vol. 285, pp. 69-94.
- (45) Kravchenko, G. and Moin, P., 2000, "Numerical Studies of Flow over a Circular Cylinder at  $Re_D=3900$ ," *Phys. Fluids*, Vol. 12, pp. 403-417.
- (46) Hahn, S. and Choi, H., 1997, "Unsteady Simulation of Jets in a Cross Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 134, pp. 342-356.
- (47) Ong, L. and Wallace, J., 1996, "The Velocity Field of the Turbulent Very Near Wake of a Circular Cylinder," *Exp. Fluids*, Vol. 20, pp. 441-453.
- (48) Lourenco, L. M. & Shih, C., 1993, "Characteristics of the Plane Turbulent Near Wake of a Circular Cylinder. A Particle Image Velocimetry study," data taken from (45).
- (49) Norberg, C., 1987, "Effects of Reynolds Number and Low-Intensity Free-Stream Turbulence on the Flow around a Circular Cylinder," Publ. No. 87/2. Department of Applied Thermosc. And Fluid Mech., Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden.
- (50) Choi, H. and Moin, P., 1990, "On the Space-Time Characteristics of Wall-Pressure Fluctuations," *Phys. Fluid A*, Vol. 2, pp. 1450-1460.
- (51) Park, N., Yoo, J. Y. and Choi, H., 2003 "On the Suitability of Centered and Upwind-biased Compact Different Schemes for Large Eddy Simulation: Part II - Static Error Analysis," *Trans. Of the KSME B*, Vol. 27, No. 7, pp. 984-994.
- (52) Park, N., Yoo, J. Y. and Choi, H., 2003 "On the Suitability of Centered and Upwind-biased Compact Different Schemes for Large Eddy Simulation: Part III - Dynamic Error Analysis," *Trans. Of the KSME B*, Vol. Vol. 27, No. 7, pp. 995-1006.