

# 혼합 유한요소를 이용한 축대칭 쉘의 정·동적해석

## Static and Vibration Analysis of Axisymmetric Shells Using Mixed Finite Element

김진곤†

Kim, Jin-Gon

노병국\*

Loh, Byoung-Gook

(논문접수일 : 2002년 11월 25일 ; 심사종료일 : 2003년 6월 16일)

### 요 지

본 연구에서는 축대칭 쉘구조물의 정동적해석을 효과적으로 수행할 수 있는 새로운 유한요소를 제안하였다. 본 유한요소는 축대칭 쉘의 전단변형률을 고려하였으며, 쉘의 경계에서 기술할 수 있는 변수들만으로 표현되는 효율적인 형태의 수정된 혼합 변분이론에 바탕하여 유한요소정식화를 수행하였다. 또한, 변위장에 대해 무절점 자유도를 추가적으로 도입하여 요소의 수치적 성능을 크게 향상시켰다. 계산의 효율성을 위해, 요소정식화의 최종단계에서 정치조건으로부터 응력매개변수들을 제거하고, 동적축약을 통하여 무절점 자유도 성분들 또한 최종적인 유한요소방정식에서 제거되어짐으로써, 일반적인 변위기저 요소와 같은 크기의 유한요소방정식을 얻을 수 있다. 몇 가지 수치예제들에 대한 해석을 통하여, 무절점 자유도와 변위장에 일치하는 적절한 응력매개변수를 가지는 제안된 혼합 축대칭 쉘요소가 정동적해석에서 대단히 정확하고 효율적임을 확인할 수 있었다.

**핵심용어** : 축대칭 쉘 요소, 혼합 정식화, 무절점 자유도

### Abstract

In this study, a new and efficient harmonic axisymmetric shell element for static and dynamic analysis is proposed. The present element considering shear strain is based on a modified mixed variational principle in which the independent unknowns are only the quantities prescribable at the shell edges. Unlike existing hybrid-mixed axisymmetric shell elements, the present element introduces additional nodeless degrees for displacement field interpolation in order to enhance the numerical performance. The stress parameters are eliminated by the stationary condition and the nodeless degrees are condensed out by the Guyan reduction. Through several numerical examples, the hybrid-mixed shell element with the additional nodeless degrees and the consistent stress parameters is shown to be efficient and yield very accurate results for static and vibration analysis.

**Keywords** : axisymmetric shell element, hybrid-mixed formulation, nodeless degrees

### 1. 서 론

이중곡률(double curvature)을 가지는 축대칭 쉘은 탄성학 분야에서도 매우 해석이 어려운 구조요소이지만, 그 고유의 강도로 인하여 많은 분야에서 이용이 이루어지고 있다. 축대칭 쉘 구조의 효율적이고 정확한 해석은 적혈구와 같은 인간의 생체역학 분야로부터 압력용기와 항공기 동체 등과 같은 공학분야에 이르기까지 거의 모든 분야에

서 필수적이라고 할 수 있다.

이러한 축대칭 쉘의 해석을 위한 다양한 방법들이 연구되었으나,<sup>1)~6)</sup> 그 중에서도 효율적인 유한요소의 개발은 오랜 기간동안 많은 연구자들이 관심을 기울여온 연구분야이다. 가장 널리 알려진 방법들은 대부분 최소 퍼텐셜 에너지 이론에 바탕한 변위기저 유한요소들이다. 하지만 이러한 변위에 바탕한 일반적인 형태의 유한요소들은 강성과잉(membrane & shear locking) 과 응력요동(stress os-

† 책임저자, 정회원 · 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부

전화: 053-850-2711; Fax: 053-850-2710

E-mail: kimjg1@cataegu.ac.kr

\* 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부

· 이 논문에 대한 토론을 2003년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2003년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

cillation)과 같은 심각한 수치적인 문제점들을 가지게 된다.<sup>7),8)</sup> 강성과잉 현상은 실제로는 존재하지 않는 가상 에너지가 유한요소정식화 과정에 도입되어 모델링 자체의 강성이 아주 크게 나타나는 현상을 일컫는다. 이러한 수치적인 문제점을 개선하고 얇은 구조물에 대한  $C^0$  유한요소의 계산 효율을 향상시키기 위해서 선택/감차적분(selective/reduced integration) 요소,<sup>9)</sup> 비등매개(anisoparametric) 유한요소<sup>10)</sup>와 장일치(field-consistent) 유한요소<sup>5)</sup> 등의 여러 기법들이 제안되어졌다. 이러한 변위기저 유한요소의 대안으로서, Hellinger-Reissner 변분이론에 바탕한 혼합(mixed 또는 hybrid-mixed) 유한요소가 여러 연구자들에 의해 꾸준히 연구되어 왔다.<sup>11)~13)</sup>

본 연구에서는, 축대칭 쉘의 경계에서 기술할 수 있는 변수들만으로 표현되는 수정된 Hellinger-Reissner 변분이론에<sup>14)</sup> 바탕하고 축대칭 쉘의 정동적 해석을 수행할 수 있는 새로운 3절점 혼합  $C^0$  유한요소를 개발하였다. 하지만 혼합요소일지라도 변위장에 대응하는 적절한 응력매개변수를 선정하지 않으면 변위기저 유한요소와 동일한 수치적인 문제점을 가지게 된다. 따라서, 본 연구에서는 장일치 개념<sup>10)</sup>을 적용하여 변위장에 대응하는 적절한 응력매개변수를 선정하였으며, 또한 저차의 혼합  $C^0$  유한요소가 가지는 수렴성의 문제와 고차진동모드 예측의 정확성을 개선하기 위하여 무절점 자유도를 도입하였다. 이러한 축대칭 쉘 요소의 혼합 정식화에서 무절점 자유도와 변위장에 대응하는 적절한 응력매개변수를 도입함으로써 강성과잉과 같은 수치적인 문제점들을 해결하고 해의 수렴성을 크게 향상시킬 수 있다. 수치계산상의 효율성을 높이기 위하여 무절점 자유도는 동적축약(dynamic reduction)을 통하여 요소의 운동방정식에서 제거되며, 응력매개변수들은 정지조건(stationary condition)으로부터 요소단위에서 변위값들로 대체된다. 이를 통하여 요소의 최종적인 강성행렬은 일반적인 변위기저 유한요소와 같은 크기를 가지게 된다. 요소단위에서 강성행렬을 구하기 위해 추가되는 계산량은 향상된 요소의 수렴성과 정확성으로 충분히 보상받게 된다. 몇 가지 수치예제들에 대한 비교해석을 통하여 본 논문에서 제안한 혼합 축대칭 쉘요소의 정동적해석에서의 뛰어난 수치적 거동을 검증할 수 있었다.

## 2. 수정된 Hellinger-Reissner 변분이론

그림 1은 축대칭 쉘의 자오방향(meridional) 곡률  $1/r_1 = d\phi/ds$ , 원주방향(circumferential) 곡률  $1/r_2 = \sin\phi/r$ 과 중립면(mid-surface)의 자오방향 호의 길이  $s$ 를 나타내고 있다. 접선방향 변위  $u$ 와  $v$ 는 각각 그림 2의  $s$ 와  $\theta$ 방

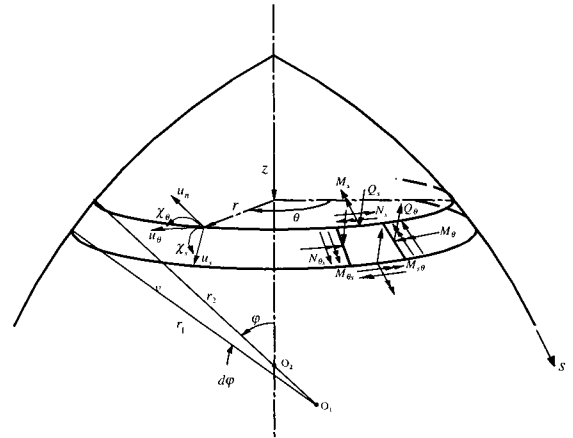


그림 1 축대칭 쉘의 기하 및 변위

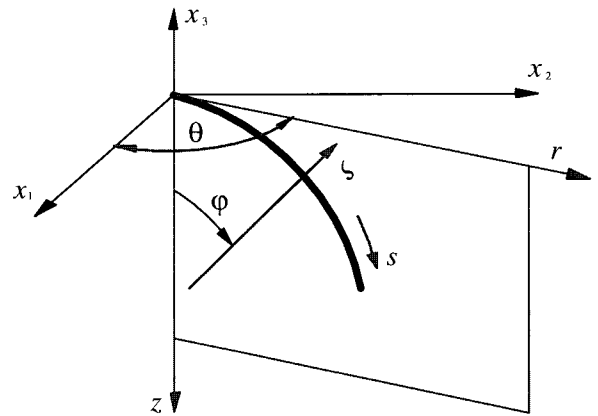


그림 2 자오방향 호의 길이  $s$ 와 외향법선방향  $\zeta$ 를 포함하는  $r-z$ 면의 삼차원 공간상의 표현

향 성분을 나타내며  $w$ 는 수직방향 변위를 나타낸다. 수직방향 변위가 쉘의 두께(그림 2의  $\zeta$ 방향)를 따라 일정하다고 가정한다면, 변위성분들을 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$U = \begin{Bmatrix} w \\ u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_s \\ \chi_\theta \\ u_n \\ u_s \\ u_\theta \end{Bmatrix} = T \cdot D \quad (1)$$

여기서  $u_n$ 은 중립면에서의 수직방향 변위값을,  $u_s$ 와  $u_\theta$ 는 각각  $s$ 와  $\theta$ 방향의 중립면에서의 변위값들을 나타낸다.  $\chi_s$ 와  $\chi_\theta$ 는 중립면에 대한 수직선의 회전량을 나타낸다.

고유진동수  $w$ 를 가지는 조화운동을 가정하고 고정된 시간에서 체체에 대한 운동에너지의 변동을 적분하면, 다음과 같이 축대칭 쉘에 대한 수정된 Hellinger-Reissner 복함수(functional)식을 나타낼 수 있다.

$$\delta \Pi_R = \delta \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \int_{s_1}^{s_2} L_R ds - \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_{s_1}^{s_2} \int_{-l/2}^{l/2} \mathbf{U}' \cdot \mathbf{U} dh ds \right] r d\theta \right\} = 0 \quad (2)$$

여기서  $\rho$ 는 질량밀도를 그리고  $L_R$ 은 에너지밀도(energy density)를 나타낸다. 본 논문에서 사용한 복합수식의 자세한 유도과정은 참고문헌에<sup>14)</sup> 자세히 설명되어 있다.

Sanders의 운동학적 관계식(kinematic relations)과 축대칭 쉘의 구성방정식을 이용하면, 쉘의 경계부에서 기술할 수 있는 변수들만으로 식(1)의 에너지밀도식을 표현할 수 있다. 이 때의 변수들은 변위 벡터  $\mathbf{D}$ 와 합력 벡터  $\mathbf{F}$ 로서 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \chi_s \\ \chi_\theta \\ u_n \\ u_s \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \chi_s^{(n)} \cos n\theta \\ \chi_\theta^{(n)} \sin n\theta \\ u_n^{(n)} \cos n\theta \\ u_s^{(n)} \cos n\theta \\ u_\theta^{(n)} \sin n\theta \end{Bmatrix}; \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} M_s \\ M_{s\theta} \\ Q_s \\ N_s \\ N_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_s^{(n)} \cos n\theta \\ M_{s\theta}^{(n)} \sin n\theta \\ Q_s^{(n)} \cos n\theta \\ N_s^{(n)} \cos n\theta \\ N_{s\theta}^{(n)} \sin n\theta \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서 윗첨자  $n$ 을 가지는 성분은  $n$ 번째 원주방향 하모닉 성분의 푸리에 계수값을 나타낸다. 이 때 원주방향 하모닉 성분들은 계산 시 모두 독립적으로 분리된다. 따라서 각각의 하모닉 성분들에 대해서 개별적으로 계산을 수행한 후 최종적으로 각 결과를 중첩시키면 되므로 매우 효율적인 계산방법이라고 할 수 있다. 이상과 같이  $\delta \Pi_R$ 을  $\theta$ 에 대하여 적분하면,  $n$ 번째 하모닉 성분에 대한 수정된 혼합 복합수식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta \Pi_R^{(n)} = \delta \left\{ k\pi \left[ \int_{s_1}^{s_2} L_{MR}^{(n)} ds - \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_{s_1}^{s_2} \int_{-l/2}^{l/2} \mathbf{D}^{(n)'} \mathbf{T} \mathbf{D}^{(n)} dh r ds \right] \right\} = 0$$

$$k = 2 \text{ for } n = 0, \quad k = 1 \text{ for } n > 1 \quad (4)$$

$n$ 번째 하모닉 성분에 대한 수정된 에너지밀도  $L_{MR}^{(n)}$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$L_{MR}^{(n)} = \mathbf{F}^{(n)'} \cdot \frac{d\mathbf{D}^{(n)}}{ds} + \mathbf{D}^{(n)'} \cdot \mathbf{E}^{(n)} \cdot \mathbf{F}^{(n)} - \frac{1}{2} \mathbf{F}^{(n)'} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}^{(n)} + \frac{1}{2} \mathbf{D}^{(n)'} \cdot \mathbf{K}^{(n)} \cdot \mathbf{D}^{(n)} \quad (5)$$

대칭행렬인  $\mathbf{C}$ 와  $\mathbf{K}^{(n)}$ 은 각각 유연성(compliance)행렬과 강성(stiffness)행렬의 차원을 가진다. 등방성 재료에 대해서, 행렬  $\mathbf{E}^{(n)}$ ,  $\mathbf{C}$ , 그리고  $\mathbf{K}^{(n)}$ 은 각각 다음과 같은 행렬형태로 표현된다.

$$\mathbf{E}^{(n)} = \begin{bmatrix} v \frac{c_\phi}{r} & -\frac{n}{r} & 1 & 0 & 0 \\ v \frac{n}{r} & -\frac{c_\phi}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_1} + v \frac{s_\phi}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{2\zeta n}{r} & -\frac{1}{r_1} & v \frac{c_\phi}{r} & -\frac{n}{r} \\ 0 & -\frac{2\zeta c_\phi}{r} & 0 & v \frac{n}{r} & -\frac{c_\phi}{r} \end{bmatrix} \quad (6a)$$

$$\mathbf{K}^{(n)} = \frac{Et}{r^2} \begin{bmatrix} \frac{c_\phi^2 t^2}{12} & \frac{nc_\phi^2 t^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{nc_\phi^2 t^2}{12} & \frac{n^2 t^2}{12} + \frac{r^2}{\mu} & -\frac{nr}{\mu} & 0 & -\frac{rs_\phi}{\mu} \\ 0 & -\frac{nr}{\mu} & \frac{n^2}{\mu} + s_\phi^2 & s_\phi c_\phi & ns_\phi \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \\ 0 & 0 & s_\phi c_\phi & c_\phi^2 & nc_\phi \\ 0 & -\frac{rs_\phi}{\mu} & ns_\phi \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) & nc_\phi & \frac{s_\phi^2}{\mu} + n^2 \end{bmatrix} \quad (6b)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{Et} \begin{bmatrix} \frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{c^2(1-\nu)} + 2\zeta^2(1+\nu) & 0 & 0 & 2\zeta(1+\nu) \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 2\zeta(1+\nu) & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (6c)$$

여기서  $E$ 와  $\nu$ 는 각각 탄성계수와 포아송 비를 의미하며, Reissner에 의해 전단유연성계수(shear flexibility factor)  $\mu$ 와 상당두께(reduced thickness)  $c$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\mu = \frac{12(1+\nu)}{5}; \quad c^2 = \frac{t^2}{12(1-\nu^2)}$$

### 3. 유한요소 정식화

본 논문에서는 저차의 혼합요소가 가지는 수렴성저하 문제를 개선하고 고차 진동모드 예측의 정확성을 높이기 위하여, 3 절점 유한요소 정식화에서 변위성분 ( $\chi_s, \chi_\theta, u_n, u_s, u_\theta$ )들을 아래 식과 같은 일반적인 형태의 2차 Lagrange 다항식에 고차 버블함수(bubble function)  $\xi(1-\xi^2)$ 를<sup>17)</sup> 도입하여 3차의 다항식으로 보간하였다.

$$N_1(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^2; \quad N_2(\xi) = 2\xi^2 - \xi;$$

$$N_3(\xi) = 4\xi(1-\xi) \quad (7)$$

여기서  $\xi$ 는 요소에서 0부터 1까지 변하는  $s$ 의 무차원 매개변수로서, 자코비안  $|J|$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$ds = (r_\xi^2 + z_\xi^2)^{1/2} d\xi = |J| d\xi$$

이로부터 식(5)에서 사용된 요소 변위 벡터  $\mathbf{D}^{(n)}$ 은 다음과 같은 행렬형태로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{D}^{(n)} = [\mathbf{N}_c \ \mathbf{N}_h] \cdot \{\mathbf{d}_c^{(n)} \ \mathbf{d}_h^{(n)}\}' = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}^{(n)} \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{N}_c$ 와  $\mathbf{N}_h$ 는 각각 절점에서의 자유도 성분  $\mathbf{d}_c^{(n)}$ 와 무절점 자유도  $\mathbf{d}_h^{(n)}$ 에 대한 보간함수를 나타내는 행렬을 의미한다.  $(\mathbf{N}_c, \mathbf{N}_h)$ 와  $(\mathbf{d}_c^{(n)}, \mathbf{d}_h^{(n)})$ 에 대한 상세한 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_c &= [\bar{\mathbf{N}}_1 \ \bar{\mathbf{N}}_2 \ \bar{\mathbf{N}}_3] \\ \mathbf{N}_h &= \text{Diagonal\_Matrix}[\xi(1-\xi^2)]_{5 \times 5} \\ \bar{\mathbf{N}}_i &= \text{Diagonal\_Matrix}[N_i(\xi)]_{5 \times 5} \end{aligned} \quad (9)$$

그리고

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_c^{(n)} &= \{\chi_{si}, \chi_{\theta i}, u_{ni}, u_{si}, u_{\theta i}\}' \quad (i = 1, 2, 3) \\ \mathbf{d}_h^{(n)} &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}' \end{aligned}$$

변위기저 유한요소가 가지는 수치적인 문제점을 개선하기 위해 변위요소의 대안으로 제안된 혼합요소일지라도 변위장에 대응하는 적절한 응력매개변수를 선정하지 않으면, 심각한 수치적인 문제점이 발생한다는 사실이 이미 여러 연구에서 보고된 바 있다.<sup>12),13),15)</sup> 따라서, 본 논문에서는 혼합정식화 과정에서 적절한 응력함수를 선정하기 위하여 전단과 막 변형률의 극한적인 거동을 고려하였다. 쉘의 두께가 극도로 얇아지거나 또는 쉘의 곡률이 0인 직선에 가까워지는 경우, 막변형률과 전단변형률은 이러한 극한조건(membrane inextensibility와 shearless deformation)에서 0에 가까운 값이 된다. 이러한 구속들은 요소단위에서  $u_{s,\xi\xi\xi} \rightarrow 0$ 와  $\chi_{s,\xi\xi\xi} \rightarrow 0$ 로 표현되는 불필요한 가성의 구속조건들을 발생시킨다. 유한요소의 전단/막 강성과 잉현상은 이러한 가성구속조건들에 의해 야기되며, 따라서 이러한 가성구속조건들을 제거하기 위해서는 해당 변형률에 대응하는 합력들을 이차의 응력함수로 다음과 같이 보

간하여야 한다.<sup>13)</sup>

$$\mathbf{F}^{(n)} = \mathbf{S}(1, \xi, \xi^2) \cdot \boldsymbol{\beta}^{(n)} \quad (10)$$

여기서  $\boldsymbol{\beta}^{(n)} = \{\beta_1, \dots, \beta_{15}\}$ 는  $n$ 번째 하모닉 성분에 대한 응력매개변수를 나타내며, 요소의 경계에서 연속하게 표현되지는 않는다. 또한  $S$ 는 합력에 대한 응력함수의 행렬을 나타낸다.

식(8)과 같은 3차의 변위함수와 식(10)과 같은 2차의 응력함수를 사용하여 정식화된 혼합요소를 지금부터 DCSQ3라고 명명하고자 한다. 제안된 요소는 무절점 자유도를 도입하지 않은 2차의 변위함수와 1차의 응력함수를 가지는 DQSL3 혼합요소와<sup>12)</sup> 수치적 거동을 비교하여 혼합요소에서 고차함수의 영향을 살펴보고자 한다. 또한 2차의 변위함수에 대응하는 가성구속조건을 발생시키는 적절하지 못한 2차의 응력함수를 가지는 혼합요소인 DQSQ3와(2차의 변위함수를 가지는 변위요소 DQ3와 동일한 수치특성을 가짐<sup>12)</sup>)의 수치특성 비교를 통하여 제안된 요소의 정동적해석에서의 효율성과 우수성을 검증하고자 한다.

유한요소정식화를 위하여, 식(8)과 (10)을 식(4)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi_R^{(n)} &= \boldsymbol{\beta}^{(n)'} \mathbf{G} \mathbf{d}^{(n)} + \mathbf{d}^{(n)'} \boldsymbol{\Xi}^{(n)} \boldsymbol{\beta}^{(n)} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^{(n)'} \mathbf{I} \boldsymbol{\beta}^{(n)} + \\ &\quad \frac{1}{2} \mathbf{d}^{(n)'} \boldsymbol{\Theta}^{(n)} \mathbf{d}^{(n)} - \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{d}^{(n)'} \mathbf{M}^{(n)} \mathbf{d}^{(n)} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,

$$\mathbf{G} = \int_0^1 [\mathbf{S}' \cdot (\frac{d\mathbf{N}_c}{d\xi} : \frac{d\mathbf{N}_b}{d\xi})] r d\xi = (\mathbf{G}_c : \mathbf{G}_b) \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\Xi}^{(n)} = \int_0^1 r (\mathbf{N}_c : \mathbf{N}_b)' \mathbf{E}^{(n)} \mathbf{S} |J| d\xi = (\boldsymbol{\Xi}_c^{(n)} : \boldsymbol{\Xi}_b^{(n)})' \quad (13)$$

$$\mathbf{I} = \int_0^1 r \mathbf{S}' \mathbf{C} \mathbf{S} |J| d\xi \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\Theta}^{(n)} = \int_0^1 r (\mathbf{N}_c : \mathbf{N}_b)' \mathbf{K}^{(n)} (\mathbf{N}_c : \mathbf{N}_b) |J| d\xi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Theta}_{cc}^{(n)} & \boldsymbol{\Theta}_{cb}^{(n)} \\ \boldsymbol{\Theta}_{bc}^{(n)} & \boldsymbol{\Theta}_{bb}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{M}^{(n)} = \rho \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} r \mathbf{N}' \mathbf{T}' \mathbf{T} \mathbf{N} dh |J| d\xi \quad (16)$$

$\Pi_R^{(n)}$ 의  $\mathbf{d}^{(n)}$ 와  $\boldsymbol{\beta}^{(n)}$ 에 대한 정치조건을 고려하면, 응력매

개변수  $\beta^{(n)}$ 을 변위  $\mathbf{d}^{(n)}$ 의 향으로 표현할 수 있다. 이로부터 더 다음과 같이 표현되는 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc}^{(n)} & \mathbf{K}_{ch}^{(n)} \\ \mathbf{K}_{hc}^{(n)} & \mathbf{K}_{hh}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_c^{(n)} \\ \mathbf{d}_h^{(n)} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{cc}^{(n)} & \mathbf{M}_{ch}^{(n)} \\ \mathbf{M}_{hc}^{(n)} & \mathbf{M}_{hh}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_c^{(n)} \\ \mathbf{d}_h^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

이 때 요소 운동방정식의 부분행렬  $\mathbf{K}_{ij}^{(n)}$ 와  $\mathbf{M}_{ij}^{(n)}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{K}_{ij}^{(n)} = (\mathbf{G}_i' + \mathbf{\Xi}_i^{(n)})\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{G}_j + \mathbf{\Xi}_j^{(n)'}) + \mathbf{\Theta}_{ij}^{(n)} \quad (i \text{ and } j = c, h) \quad (18)$$

$$\mathbf{M}_{ij}^{(n)} = \rho \int_0^l \int_{-l/2}^{l/2} r \mathbf{N}_i' \mathbf{T}' \mathbf{T} \mathbf{N}_j \, dh \, J \, d\xi \quad (i \text{ and } j = c, h) \quad (19)$$

유한요소정식화에서 도입한 무절점 자유도  $\mathbf{d}_h^{(n)}$ 는 요소 운동방정식의 행렬 크기를 증가시키므로, 수치계산상의 효율성을 높이기 위하여 최종적으로 전체 해석시스템에서 결합되는 요소의 강성행렬 크기를 줄이는 것이 바람직하다. 이를 위해 Guyan<sup>16)</sup>에 의해 처음으로 제안된 동적축약기법을 적용하여, 자유진동해석을 위해 절점에서의 자유도 성분인  $\mathbf{d}_c^{(n)}$ 로만 표현되는 축약된 형태의 다음과 같은 최종적인 형태의 고유값 문제를 얻을 수 있다.

$$[\mathbf{K}_e^{(n)} - \omega^2 \mathbf{M}_e^{(n)}] \mathbf{d}_c^{(n)} = 0 \quad (20)$$

여기서 축약된 요소 강성행렬  $\mathbf{K}_e^{(n)}$ 과 질량행렬  $\mathbf{M}_e^{(n)}$ 은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_e^{(n)} = \mathbf{K}_{cc}^{(n)} - \mathbf{K}_{ch}^{(n)} \mathbf{K}_{hh}^{(n)-1} \mathbf{K}_{hc}^{(n)} \quad (21)$$

$$\mathbf{M}_e^{(n)} = \mathbf{M}_{cc}^{(n)} + \mathbf{K}_{ch}^{(n)} \mathbf{K}_{hh}^{(n)-1} \mathbf{M}_{hh}^{(n)} \mathbf{K}_{hh}^{(n)-1} \mathbf{K}_{hc}^{(n)} - \mathbf{K}_{ch}^{(n)} \mathbf{K}_{hh}^{(n)-1} \mathbf{M}_{hc}^{(n)} - \mathbf{M}_{ch}^{(n)} \mathbf{K}_{hh}^{(n)-1} \mathbf{K}_{hc}^{(n)} \quad (22)$$

상기와 같이 축약된 요소의 강성행렬 및 질량행렬식에서 첫번째 항인  $\mathbf{K}_{cc}^{(n)}$ 와  $\mathbf{M}_{cc}^{(n)}$ 는 2차의 변위함수와 일차의 응력함수를 가지는 DQSL3 혼합요소의 강성과 질량행렬과 동일하다는 점에 유의하여야 한다. 무절점 자유도의 도입으로 인하여 DQSL3요소보다 제안된 DCSQ3 요소에서 추가되는 요소단위 계산량은 크게 향상되는 수렴성으로 인해 충분히 보상받게 됨을 다음의 수치예제들에서 확인할 수 있다.

#### 4. 수치 예제

본 절에서는, 제안하고자 하는 고차 혼합요소인 DCSQ3의 축대칭 쉘의 정동적해석에 대한 수치적 성능을 평가하고자 한다. 이를 위해 여러 문헌들에 보고된 수치예제들에 대해서 해석을 수행한 후 그 결과를 비교하고자 한다.

##### 4.1 단순지지된 원형 평판

그림 3과 같이 균일압력을 받는 단순지지된 원형 평판에서 전단강성과잉현상을 살펴 보았다. 원형 평판의 기하학적 치수와 재료 물성은  $R=1m$ ,  $E=10^6 \text{ kN/m}^2$ ,  $\nu=0.0$ , 그리고 균일분포압력  $p=1 \text{ kN/m}^2$  이다. 그림 4는 원형 평판의  $R/t$  을 증가시킬 때 한 개의 요소만 사용하여 구한 중심부의 변형값을 로그 스케일로 보여주고 있다. 그림에서 2차의 변위함수를 가지는 전형적인 3절점 변위요소 DQ3와 2차의 변위함수와 동일한 차수의 부적절한 응력매개변수를 가지는 혼합요소DQSQ3는 두께가 작아질 때 강성과잉현상이 발생하는 동일한 수치적 거동을 보임을 확인할 수 있었다. 하지만, 변위장에 대응하는 적절한 응력매개변수를 채택한 혼합요소인 DQSL3와 DCDQ3 는 강성과잉현상이 발생하지 않았으며, 특히 DCSQ3 요소는 하나의 요소만으로도 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있었다.

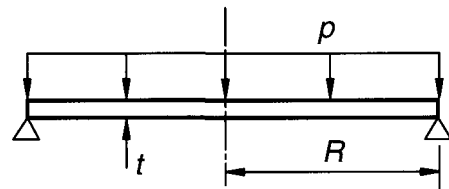


그림 3 균일분포하중을 받는 단순지지 원형 평판

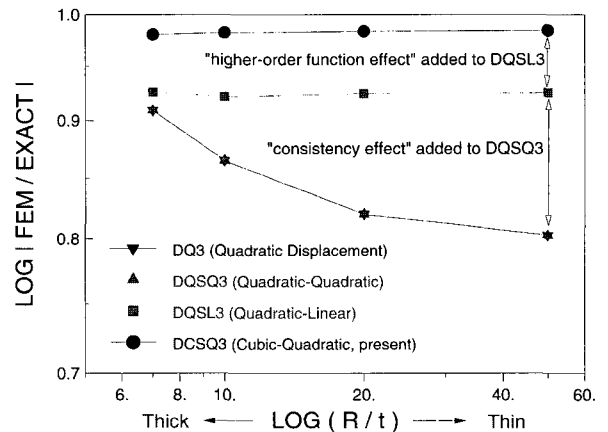


그림 4 원형 평판에서 하나의 요소를 사용하여 구한 두께 변화에 대한 중심부 변형값

### 4.2 반구형 쉘

그림 5는 Grafton<sup>1)</sup>이 사용하였던 하단부가 고정되고 상단부가 열린 반구형 쉘의 기하학적 모양을 보여주고 있다. 반경  $R=100$  in(0.254m), 탄성계수  $E=10^7$  psi(68.95 GPa), 프와송 비  $\nu=0.33$  그리고 두께  $t=1$  in(0.0254m)인 쉘의 끝단에서  $M_s=1$  lbf-in/in(4.4482 N-m/m)인 모멘트를 하중조건으로 부과하였다. 이러한 예제는 요소에 발생하는 막강성과잉현상을 살펴볼 수 있는 좋은 정적 문제이다. 요소의 수렴성을 검토하기 위해서 2개의 요소( $2^*5^\circ$ 와  $2^*25^\circ$  간격으로 5개의 절점), 3개의 요소( $2^*2^\circ$ ,  $2^*6^\circ$  그리고  $2^*22^\circ$  간격으로 7개의 절점), 5개의 요소( $2^*1^\circ$ ,  $4^*2^\circ$ ,  $2^*2.5^\circ$  그리고  $2^*22.5^\circ$  간격으로 11개의 절점) 그리고 14개의 요소( $14^*0.5^\circ$ ,  $8^*1^\circ$ ,  $2^*3^\circ$ ,  $2^*4.5^\circ$  그리고  $2^*15^\circ$  간격으로 29의 절점)로 각각 분할하여 해석을 수행하였다.<sup>5)</sup>

그림 6은 자유단에서의 회전성분  $\chi_s(\phi=30^\circ)$ 의 수치 해석결과를 보여주고 있다. 제안된 DCSQ3요소를 Prathap<sup>5)</sup>과 Kim<sup>12)</sup>에 의해 제안된 요소의 수치해석결과와 비교하였다. 비교결과는 Kim의 DQSL3 혼합요소와 Prathap의 장일치 요소 CMCS는 거의 대등한 거동을 보였으

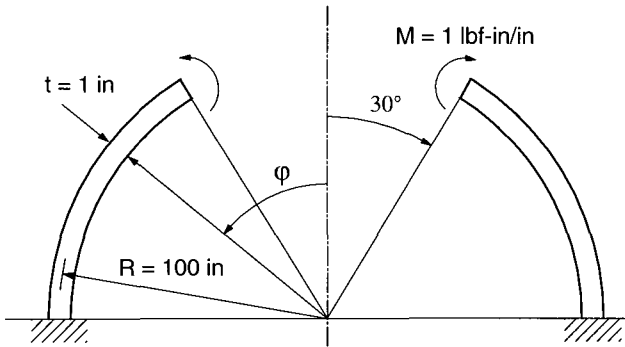


그림 5 끝단 모멘트를 받는 반구형 쉘

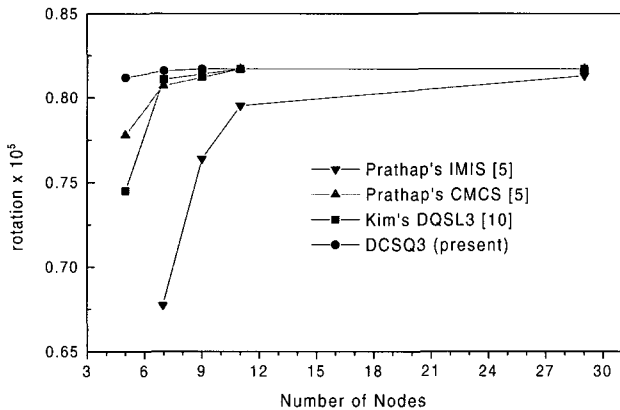


그림 6  $\phi=30^\circ$ 에서 끝단 회전값의 수렴성

며, DCSQ3 요소는 이 두 요소보다 월등히 뛰어난 수렴성을 보였다. Prathap의 장불일치 요소인 IMIS를 제외한 세 요소 모두 가성구속조건을 적절히 제거함으로써, 강성 과잉현상은 발생하지 않음을 확인할 수 있다.

### 4.3 자유단-고정단을 가지는 원통형 쉘

다음으로 그림 7과 같은 한쪽이 고정된 원통형 쉘에 대한 자유진동해석을 수행한 후, 각 하모닉 성분별로 2번째와 3번째 진동모드를 구하였다. 해석에 사용된 쉘의 기하학적 치수와 재료의 물성치는  $R=101.6$ mm,  $L=226.786$ mm,  $t=1.016$ mm,  $E=2.069 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu=0.3$ ,  $\rho=7868$  kg/m<sup>3</sup>이다.<sup>3)</sup>

각각 2개의 DQSL3 요소와 본 논문의 DCSQ3 요소를 사용하여 얻은 해석결과를 그림 7에서 비교하였다. 그림으로부터 단 2개의 요소만으로도 DCSQ3요소는 정해에 매우 근접한 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다. 특히, 고차의 하모닉 성분과 진동모드로 갈수록 DQSL3요소의 오차는 크게 증가하지만, 무절점 자유도를 도입한 DCSQ3요소는 안정적인 거동을 보임을 확인할 수 있다. 또한, 동적축약을 인한 정확성의 손실은 무시할 수준이며, 요소단위에서 추가되는 계산량에 비해 고차모드에서 증대되는 효율성과 정확성이 매우 큼을 알 수 있다.

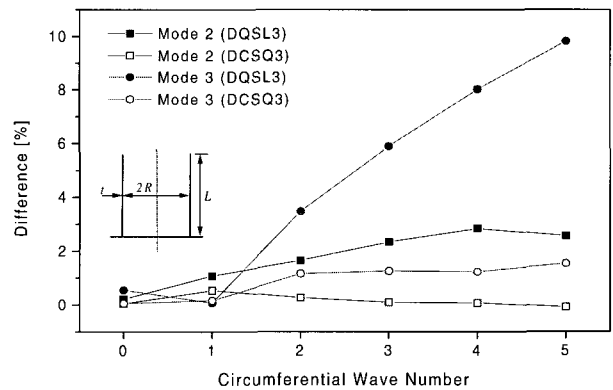


그림 7 원통형 쉘의 하모닉 성분별 고유진동수의 오차

### 4.3 쌍곡선 쉘

마지막으로 그림 8과 같은 끝단이 고정된 쌍곡선 쉘에 대한 자유진동해석을 수행하였다. 본 문제는 Sen<sup>3)</sup>이 유한요소 해석을 수행하고 Hashish<sup>2)</sup>가 쌍곡선 모양의 냉각탑의 스케일 일 모델을 이용해 실험하였다. 단면은  $(r/a)^2 - (z/b)^2 = 1$ 의 쌍곡선 방정식으로 정의되며, 이 때  $a=4.79$ 이고  $b=11.391$ 이다. 재료의 물성치는  $E=0.738 \times 10^6$  psi(30.4GPa),  $\nu=0.3$ ,  $\rho=0.210 \times 10^{-3}$  lb/in<sup>3</sup>(5.8128kg/m<sup>3</sup>)이다. 해석에

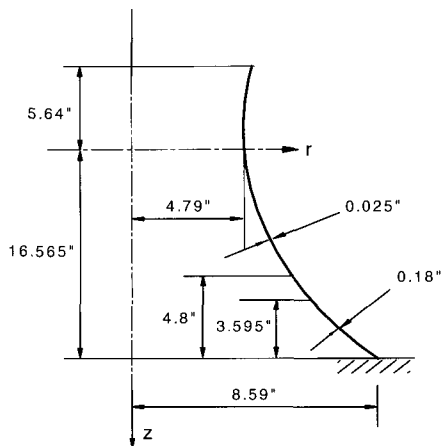


그림 8 고정-자유단을 가지는 쌍곡선 셸

표 1 쌍곡선 셸의 고유진동수

하모닉 성분 n	고유진동수(Hz)			
	실험치 <sup>2)</sup>	Sen <sup>3)</sup>	DCSQ3 (6 elements)	DCSQ3 (8 elements)
3	188	168	167.51	167.52
4	130	130	129.86	129.83
5	-	122	122.19	122.16
6	157	143	143.10	142.86
7	177	161	161.82	161.30

서 하단부는 고정되고 상단은 자유단으로 가정하였고, 그림과 같은 모든 두께의 변동을 고려하였다. 표 1에서 실험으로부터 구한 진동수가 유한요소해석을 통해 구한 해석결과들보다 일관되게 약간 높은 경향을 보임을 알 수 있다. 이러한 차이점은 실험에서 고려한 모델의 역학적 특성이 해석에서 충분히 고려되지 않은데 기인한 것으로 보인다. 하지만 본 연구에서 제안한 유한요소를 이용한다면 다른 유한요소들보다 비교적 적은 수의 유한요소를 사용하여 복잡한 형태의 축대칭 구조물을 효과적으로 해석할 수 있음을 다시 한 번 확인할 수 있다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 축대칭 셸의 정동적해석을 효과적으로 수행할 수 있는 새로운 고차 혼합 축대칭 셸요소를 제안하였다. 본 논문에 기술된 수치예제 뿐만 아니라 다양한 여러 수치예제들에 대한 정동적 해석을 통하여 제안된 요소의 효율성과 정확성을 검증할 수 있었다. 제안된 요소는 다음과 같은 특징을 가지고 있다.

첫째, 강성과잉과 수치적인 문제점을 제거하기 위하여 장일치 개념을 적용하여 변위장에 대응하는 적절한 응력매

개변수를 선정하였다.

둘째, 셸의 굽힘거동과 고차진동모드 예측의 정확성과 수렴성을 높이기 위하여 변위함수에 무절점 자유도를 도입하였다.

셋째, 동적축약과 정치조건을 이용하여 일반적인 형태의 요소강성행렬을 최종적으로 구하여 수치계산상의 효율성을 높였으며, 이로 인한 정확도의 손상은 무시할 수준이었다.

### 후 기

본 연구는 2003학년도 대구가톨릭대학교 일반 연구비 지원에 의한 것임.

### 참 고 문 헌

- Grafton, P.E., Strome, D.R., "Analysis of Axisymmetric Shells by the Direct Stiffness Method", *AIAA Journal*, Vol.1, 1963, pp.2342~2347
- Hashish, M.G., Abu-Sitta, S.H., "Free Vibration of Hyperbolic Cooling Towers", *ASCE Journal*, Vol.97, 1971, pp.253-269
- Sen, S.K., Gould, P.L., "Free Vibration of Shells of Revolution using FEM", *ASCE Journal*, Vol.100, 1974, pp.283~303
- Kunieda, H., "Flexural Axisymmetric Free Vibrations of a Spherical Dome: Exact Results and Approximate Solutions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.92, 1984, pp.1~10
- Prathap, G., Ramesh Babu, C., "A Field-Consistent Three-Noded Quadratic Curved Axisymmetric Shell Element", *International Journal for Numerical Method in Engineering* Vol.23, 1986, pp.711~723
- 남문희, 이관희, "비축대칭 하중을 받는 원통형 셸의 단순화 해석, 한국전산구조공학회 논문집", 제13권 제2호, 2000, pp.179~188
- Noor, A. K., Peters, J. M., "Mixed and Reduced/Selective Integration for Curved Elements", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol.17, 1981, pp.615~631
- Stolarski, H., Belytschko, T., "Shear and Membrane Locking in Curved C<sup>0</sup> Elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.41, 1983, pp.279~296

9. Zienkiewicz, O. C., Bauer, J., Morgan, K., Oate, E., "A Simple and Efficient Element for Axisymmetric Shells", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol.11, 1977, pp.1545~1558
10. Tessler, A., Spiridigliozzi, L., "Resolving Membrane and Shear Locking Phenomena in Curved Shear-Deformable Axisymmetric Shell Element", *International Journal for Numerical Method in Engineering* Vol.26, 1988, pp.1071~1086
11. Loula, A. F. D., Miranda, I., Hughes, T. J. R., Franca, L. P., "On Mixed Finite Element Methods for Axisymmetric Shell Analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.72, 1989, pp.201~231
12. Kim, Y.Y., Kim, J.G., "A Simple and Efficient Mixed Finite Element for Axisymmetric Shell Analysis", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol.39, 1996, pp.1903~1914
13. Kim, J. G., Kim, Y. Y., "A Higher-Order Hybrid-Mixed Harmonic Shell-of-Revolution Element", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.182, 2000, pp.1~16
14. Steele C. R., Kim, Y. Y., "Modified Mixed Variational Principle and the State-Vector Equation for Elastic Bodies and Shells of Revolution", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.59, 1993, pp.587~595
15. Kim, J.G., Kim, Y.Y., "A New Higher-Order Hybrid-Mixed Curved Beam Element", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol.43, 1998, pp.925~940.
16. Guyan, R.J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", *AIAA Journal*, Vol.3, 1965, pp.380
17. R.D. Cook, D.S. Malkus, M.E. Plesha, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1989, p.630