

고속철도 교량의 동특성 해석을 위한 준3차원 차량/궤도/교량 상호작용 해석기법의 개발

Development of a Quasi-Three Dimensional Train/Track/Bridge Interaction Analysis Program for Evaluating Dynamic Characteristics of High Speed Railway Bridges

김 만 철†

Kim, Man-Cheol

(논문접수일 : 2002년 9월 27일 ; 심사종료일 : 2003년 6월 12일)

요 지

철도교량은 차량과 교량의 상호작용에 의해 유발되는 동하중을 받고 있다. 이러한 동적인 효과는 교량 각 부재에 충격과 피로를 유발하고, 교량의 잔존수명에 영향을 미치게 된다. 따라서 수치적 또는 시험적 방법에 의한 교량의 실제적인 동적 거동을 분석하는 것이 매우 중요하다. 본 논문에서는 KTX 차량의 주행에 따른 교량의 동적 특성을 구조적 안전성, 주행 안전성 및 승차감 측면에서 평가할 수 있는 차량/궤도/교량 상호작용 해석프로그램을 개발하였다. 차량/궤도/교량의 실질적인 모델링을 위하여 차륜/레일 접촉 모델링을 위한 헤르쯔안 스프링 및 도상에 대한 윈클러 요소를 적용하였다. 또한 개발 프로그램은 준3차원 해석으로 차량의 복선궤도 주행에 따른 3차원 편심 효과를 고려하기 위해 비틀 자유도 및 기하학적인 관계에 따른 제약조건식을 사용하였다. 개발프로그램의 검증을 위해서 고속철도교량중 가장 일반적인 형식인 PSC 박스교(2@40m=80m)에 대해 수치해석결과 및 계측시험 결과를 비교하였다.

핵심용어 : 차량/궤도/교량 상호작용, 헤르쯔안 스프링, 윈클러 요소

Abstract

Railway bridges are subject to dynamic loads generated by the interaction between moving vehicles and the bridge structures. These dynamic loads result in response fluctuations in bridge members. To investigate the real dynamic behavior of the bridge, therefore, a number of analytical and experimental investigations should be carried out. In this paper, a train/track/bridge interaction analysis program for evaluating the dynamic characteristics of bridges due to KTX operation in terms of structural safety, operational safety and passenger comfort is developed. To build a practical model of train/track/bridge, Hertzian spring for wheel/rail contact modeling and Winkler element for ballast are applied. This program also used torsional degree of freedom and constraint equation based on geometrical relationship in order to take into consideration three-dimensional eccentricity effect due to the operation on double track through quasi-three-dimensional analysis. To verify the developed program, comparison has been made between the measured results and those of simulation of the typical PSC box bridge(2@40m=80m) of the KHSR bridges.

Keywords : train/track/bridge interaction, heritzian spring, winkler element

1. 서 론

철도교량은 주행차량에 의해서 동적인 효과를 받게 된다. 이러한 동적인 효과는 교량 각 부재에 충격과 피로를

유발하고, 교량의 잔존수명에 영향을 미치게 된다. 특히, 중량의 열차가 고속으로 교량상을 주행하는 경우에는 도로 교 및 기존 재래선의 일반열차와는 상이한 진동 특성을 보여줄 것이다. 따라서 고속철도 교량의 구조적 안전성 및 주

† 책임저자, 정회원 · 한국철도기술연구원, 선임연구원
전화: 031-460-5000; Fax: 031-460-5159
E-mail: kimmc@krii.re.kr

· 이 논문에 대한 토론을 2003년 9월 30일까지 본 학회에 보내주
시면 2003년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

행 안전성, 승차감을 확보하기 위해서는 차량/궤도/교량의 상호작용을 고려한 고속철도 주행에 따른 교량의 정확한 동적특성을 분석하는 것이 매우 중요하다.

철도교에 대한 진동문제는 19세기 중반부터 Willis Stokes에 의해 시작되었으며 Kryloff, Timoshenko, Inglis¹⁾ 등에 의해 발전되었다. 이러한 연구자들은 single smooth-running mass, single moving-pulsating force 등과 같이 열차를 단순화하여 모형화 하였다. 그후 Chu 등²⁾과 Wiriyachai 등³⁾은 화차를 1개의 차체, 2개의 가로대 및 2개의 대차부로 모델링 하였다. 차체에는 연직변위, 횡변위, 피칭, 롤링 및 요잉의 5개의 자유도를 고려하였고, 각 가로대는 연직변위, 횡변위 및 롤링의 3개의 자유도를 고려하였다. 또한 각 대차부에는 횡변위와 요잉 자유도 외에, 4개의 윤축장치의 연직변위가 합쳐져 6개의 자유도를 고려한 23자유도를 갖는 차량모델을 구성하였다. 국내에서는 김성일 등,⁴⁾ 유철수 등⁵⁾과 박홍석⁶⁾이 3차원 해석 모델을 이용하여 철도차량을 고려한 동적해석 연구를 수행하였다. 최창근 등⁷⁾은 2차원적 모형화를 기본으로 하여 3차원적 모형화의 중간 단계로서 차량의 궤도의 편심 존재의 영향을 고려한 차량/교량 해석방법을 개발하였다. 이 방법은 차량을 연행질량 모델로 고려하였으며, 궤도의 불규칙성을 해석에 포함하였다. 그러나 개발된 해석방법은 해석 순간마다 차량의 주행 위치의 변화를 고려하여 시스템 행렬(질량, 강성, 감쇠행렬)을 재구성하고, 이를 행렬분해한 후, Newmark- β 수치적분법을 이용하여 해석을 수행하는 알고리즘을 적용하고 있으며, 차륜과 궤도의 접촉모델과 도상의 강성 및 감쇠 효과를 고려하지 않고 있다.

본 연구에서는 최창근 등⁷⁾이 개발한 방법과 같이, 2차원

모델이지만 차량의 복선궤도 주행에 따른 3차원 편심 효과를 고려한 차량/궤도/교량 상호작용 해석프로그램을 개발하였다. 본 프로그램에서는 차량/궤도/교량의 실질적인 모델링을 위하여 차륜과 궤도의 접촉과 도상을 고려할 수 있는 헤르쯔안 스프링과 윈클러 요소를 개발하여 적용하였다. 또한, 차량과 교량 시스템을 각각 독립적으로 구성하고 접합조건 및 평형조건을 만족할 때까지 반복 수행하는 알고리즘^{8),9)}을 적용하여 각 해석단계마다 시스템 행렬을 재구성, 행렬분해하는 비효율성을 제거하였다. 또한, 본 개발프로그램의 검증을 위하여 계측결과와 수치해석결과를 비교·검토하였다.

2. 차량/궤도/교량 상호작용 해석 프로그램

2.1 차량 모델링

한국 고속철도 차량(그림 1)은 동력차 2량, 동력객차 2량과 객차 16량으로 이루어져 있다. 각각의 구성차량은 차체와 이차 현가장치, 대차와 일차 현가장치, 윤축으로 이루어져 있다. KTX 차량의 가장 큰 특징은 동력차에는 2개의 동력대차가 사용되지만, 동력객차와 객차의 연결과 객차와 객차 사이의 연결에 있어서 차체의 유동성이 종속되는 관절형 대차가 사용된다는 것이다. 관절형 대차를 사용함으로써 열차 전체가 유기적으로 연결되어 차체의 독립적인 거동을 막아줌으로써 기존 열차에 나타났던 진동 현상을 억제하는 효과를 얻고 있다. 본 논문에서는 차량을 2차원으로 모델링 하였으며, 차체, 대차와 윤축은 강체로 가정하였다. 차체의 연직 자유도와 피칭, 대차의 연직과 피칭 그리고 윤축의 연직 자유도를 고려하였다. 또한 열차는 등속

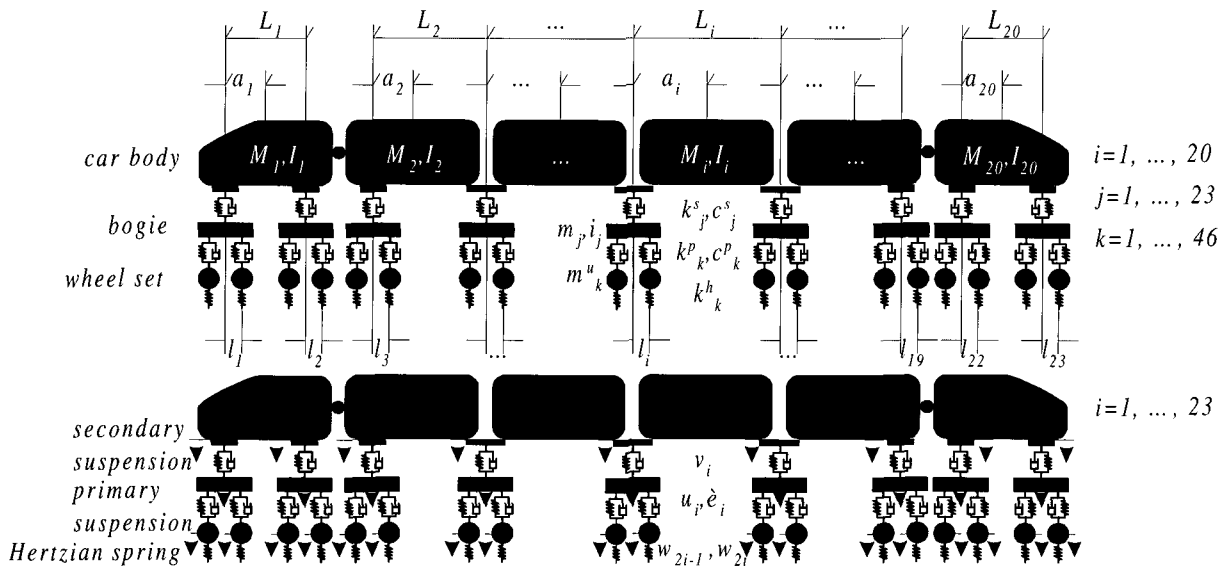


그림 1 KTX 차량 모델

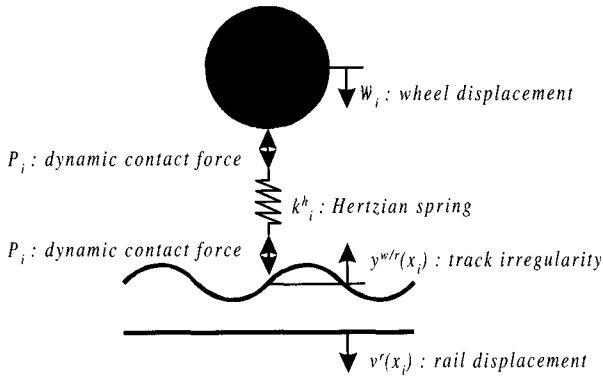


그림 2 윤축과 레일의 접촉강성 모델

직선운동을 하고 차륜은 레일에 항상 접촉하는 것으로 가정하였다.

차륜과 레일의 접촉강성을 고려하기 위하여 헤르쯔안(Hertzian) 스프링(k^h)을 차량 모델링에 포함하였다(그림 2). 헤르쯔안 스프링으로 표현되는 접촉강성은 차륜의 곡면과 레일의 곡면이 접촉하는 기하학적성으로 인하여 비선형성을 가지게 된다. 접촉면에서의 정적 하중(F)과 변위(δ)사이의 관계식은 다음과 같다.¹⁰⁾

$$F = c_H \delta^{3/2} \quad (1)$$

여기서 c_H 는 접촉하는 두 물체의 곡률반경과 물성치의 함수이다. 위의 관계식을 이용하면 접촉강성은 다음과 같다.

$$k^h = \frac{dF}{d\delta} = \frac{3}{2} c_H^{2/3} F^{1/3} \quad (2)$$

차륜과 레일의 곡면접촉을 원형접촉으로 가정하면 비선형 접촉강성을 다음과 같이 선형화할 수 있다.¹⁰⁾

$$k^h = 3 \sqrt{\frac{3EFV R_{wheel} R_{railprof}}{2(1-\nu^2)}} \quad (3)$$

여기서, E 는 탄성계수로 210GPa, F 는 주행차량의 축중이고 ν 는 포아송 비 0.3, R_{wheel} 은 주행 차륜의 반경, $R_{railprof}$ 은 레일 두부 단면의 반경이다.

차량의 지배방정식을 유도하기 위하여 다음 식과 같은 라그랑지안 방정식(Lagrange's equation)을 사용하였다.

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{g}_i} \right\} - \left\{ \frac{\partial T}{\partial g_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial V}{\partial g_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial D}{\partial \dot{g}_i} \right\} = a_i, \quad i=1, \dots, n \quad (4)$$

여기서 T 는 운동에너지를, V 와 D 는 각각 변형에너지와 소산에너지를 의미하고, g_i 는 변위, q_i 는 하중 그리고 n 은 자유도 수를 의미하고 있다.

전방 동력차의 운동에너지와 변형에너지, 소산에너지는 다음 식과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \left\{ M_1 \left(\frac{(L_1 - a_1) \dot{v}_1 + a_1 \dot{v}_2}{L_1} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\dot{v}_1 - \dot{v}_2}{L_1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^2 (m_i \dot{u}_i^2 + i_i \dot{\theta}_i^2) + \sum_{i=1}^4 m_i^u \dot{w}_i^2 \right\} \quad (5)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 k_i^s (y_i^s)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 k_i^l (y_i^l)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 k_i^h (y_i^h)^2 \quad (6)$$

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 c_i^s (\dot{y}_i^s)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 c_i^l (\dot{y}_i^l)^2 \quad (7)$$

동력객차 및 객차의 운동에너지와 변형에너지, 소산에너지는 다음 식과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=2}^{18} \left\{ M_i \left(\frac{(L_i - a_i) \dot{v}_{i+1} + a_i \dot{v}_{i+2}}{L_i} \right)^2 + I_i \left(\frac{\dot{v}_{i+1} - \dot{v}_{i+2}}{L_i} \right)^2 \right\} + \sum_{i=3}^{21} (m_i \dot{u}_i^2 + i_i \dot{\theta}_i^2) + \sum_{i=5}^{42} m_i^u \dot{w}_i^2 \right] \quad (8)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{21} k_i^s (y_i^s)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=5}^{42} k_i^l (y_i^l)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=5}^{42} k_i^h (y_i^h)^2 \quad (9)$$

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{21} c_i^s (\dot{y}_i^s)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=5}^{42} c_i^l (\dot{y}_i^l)^2 \quad (10)$$

후방 동력차의 운동에너지와 변형에너지, 소산에너지는 다음 식과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \left\{ M_{20} \left(\frac{(L_{20} - a_{20}) \dot{v}_{22} + a_{20} \dot{v}_{23}}{L_{20}} \right)^2 + I_{20} \left(\frac{\dot{v}_{22} - \dot{v}_{23}}{L_{20}} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=22}^{23} (m_i \dot{u}_i^2 + i_i \dot{\theta}_i^2) + \sum_{i=43}^{46} m_i^u \dot{w}_i^2 \right\} \quad (11)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=22}^{23} k_i^s (y_i^s)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=43}^{46} k_i^l (y_i^l)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=43}^{46} k_i^h (y_i^h)^2 \quad (12)$$

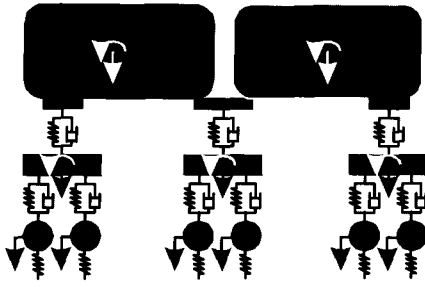


그림 3 차체의 모델링

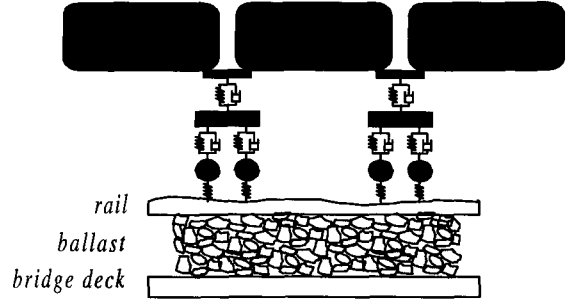


그림 4 궤도 구조

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=22}^{23} c_i^s (\dot{y}_i^s)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=43}^{46} c_i^b (\dot{y}_i^b)^2 \quad (13)$$

여기서, M 과 I 는 차체의 질량과 회전관성, m 과 i 는 대차의 질량과 회전관성을 그리고 m^u 는 윤축 질량을 의미하고 있다. k 와 c 는 각 요소의 스프링과 감쇠를 나타내고, 상첨자 s 는 이차 현가장치, b 는 일차 현가장치를 그리고 h 는 접촉강성을 의미하고 있다.

차체의 수직 및 회전은 대차가 위치한 지점에서의 차체 수직변위 v_i , $i=1, \dots, 23$ 의 함수로 나타냈다. 이것은 그림 3에서처럼 관절식 대차로 연결된 차체에 대해 각각 무게중심에서 수직과 회전변위로 표현하는 경우 4개의 자유도가 필요하게 된다. 그러나 차체의 랭크(rank)는 3으로 따라서, 관절형 대차의 특성을 고려하기 위한 구속조건이 필요하게 되기 때문이다. 따라서, 본 논문에서는 추가적인 구속방정식을 필요로 하는 차체의 무게중심에서 수직과 회전변위를 이용하지 않고 독립변수인 대차위치에서의 수직변위로 모든 차체의 자유도를 정의하였다.

u_i , θ_i , w_{2i-1} 그리고 w_{2i} , $i=1, \dots, 23$ 은 대차의 수직 및 회전변위와 윤축의 수직변위는 각각 나타내고 있다. L_i 와 a_i 는 i 번째 차체의 길이와 각 차체의 첨단에서 무게중심까지의 거리이다.

현가장치 및 접촉스프링의 상대변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y_i^s = v_i - u_i \quad i=1, \dots, 23 \quad (14)$$

$$y_i^b = u_i + (-1)^{(i+1)} l_i \theta_i - w_i \quad i=1, \dots, 46 \quad (15)$$

$$y_i^h = w_i - v^r(x_i) + y^{w/r}(x_i) \quad i=1, \dots, 46 \quad (16)$$

$v^r(x_i)$ 는 i 번째 윤축의 위치 x_i 에서 레일의 변위이고 $y^{w/r}(x_i)$ 는 그 지점에서의 궤도 틀림(rail irregularity)을

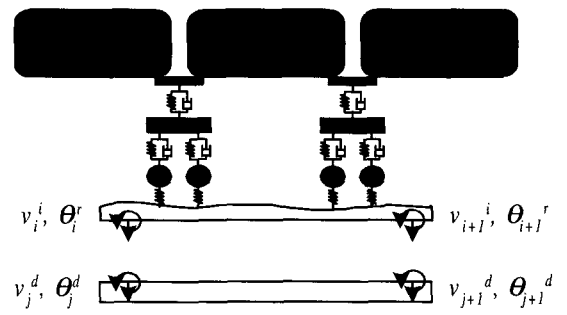


그림 5 원클러 요소에 의한 도상모델링

의미한다. l_i 는 i 번째 대차 중심에서 윤축까지의 거리이다.

차량의 자유도 $g^t = \langle g_1, \dots, g_i, \dots, g_{23} \rangle^T$ 에 대해 식(5)~(16)을 라그랑지안 방정식(4)에 적용하면 차량의 운동 방정식은 다음과 같다. 여기서 $g_i = \langle v_i, u_i, \theta_i, w_{2i-1}, w_{2i} \rangle^T$, $i=1, \dots, 23$ 이다.

$$M^t \ddot{g}^t + C^t \dot{g}^t + K^t g^t = q^t \quad (17)$$

여기서, M^t , C^t , K^t 와 q^t 는 각각 차량의 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬과 차량에 작용하는 하중이다. 식(17)에서 차량에 작용하는 하중 $q^t = \langle q_1 \dots q_i \dots q_{23} \rangle^T$ 는 다음과 같다.

$$q_i = \begin{cases} \frac{M_j(L_i - a_i)g}{L_i} & j=1 \text{ for } i=1 \\ m_j g & j=2 \text{ for } i=3 \\ 0 & j=20 \text{ for } i=22 \\ m_{2i-1}^u g + k_{2i-1}^h \{v^r(x_{2i-1}) - y^{w/r}(x_{2i-1})\} \\ m_{2i}^u g + k_{2i}^h \{v^r(x_{2i}) - y^{w/r}(x_{2i})\} \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} \frac{M_j a_i g}{L_i} & j=1 \text{ for } i=2 \\ m_j g & j=19 \text{ for } i=21 \\ 0 & j=20 \text{ for } i=23 \\ m_{2i-1}^u g + k_{2i-1}^h \{v^r(x_{2i-1}) - y^{w/r}(x_{2i-1})\} \\ m_{2i}^u g + k_{2i}^h \{v^r(x_{2i}) - y^{w/r}(x_{2i})\} \end{cases} \quad (18)$$

$$q_i = \begin{cases} \left\{ \frac{M_{i-2}a_{i-2}}{L_{i-2}} + \frac{M_{i-1}(L_{i-1}-a_{i-1})}{L_{i-1}} \right\} g \\ m_i g \\ 0 \\ m_{2i-1}^u g + k_{2i-1}^h \{ v^r(x_{2i-1}) - y^{w/r}(x_{2i-1}) \} \\ m_{2i}^u g + k_{2i}^h \{ v^r(x_{2i}) - y^{w/r}(x_{2i}) \} \end{cases} \quad i=4, \dots, 20$$

여기서, g 는 중력가속도이며, $v^r(x_i)$ 는 i 번째 윤축의 위치 x_i 에서 레일의 변위로, 미지 값이며, 이를 가정하여 차량의 운동방정식을 해석한다(그림 8).

2.2 궤도의 모델링

궤도(track)는 레일(rail)과 침목(sleeper), 도상(ballast)으로 이루어져 있다. 레일은 보요소(K^r, M^r)를 이용하여 2차원으로 모델링 하였다. 침목 및 도상은 윈클러 기초(Winkler foundation)¹¹⁾에 근거하여 아래와 같은 윈클러 요소 $\overline{K^w}$ (식 29)와 $\overline{M^w}$ (식 30)를 이용하여 모델링 하였다. 자갈 도상(ballast)은 단지 하중이 작용하는 곳에서만 변형이 발생하고 인접지역에서는 전적으로 변형되지 않는다고 가정하면, 자갈도상의 강성 k^w 에 대한 윈클러 요소의 강성행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.

윈클러 요소 내의 임의의 지점에 있어서 변위 v^w 는 레일의 변위 v^r 과 교량 상판의 변위 v^d 의 상대적인 값으로 나타낼 수 있다.

$$v^w = v^r - v^d \tag{19}$$

따라서, 길이가 l_e 인 윈클러 요소의 임의의 지점에 있어서 변위 v^w 에 의한 변형에너지 (V)는 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} u^{w/r} k^w u^w dl \tag{20}$$

레일과 교량은 보요소를 이용하여 모델링 하였으므로, 보요소 형성시 사용했던 형상함수 $N = \langle N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle^T$ 와 절점변위를 식(20)에 대입하고 최소 변형에너지 이론을 적용하면 다음과 같은 윈클러 요소의 강성행렬을 구할 수 있다.

$$K^w = \int_0^{l_e} \begin{Bmatrix} N^T \\ -N^T \end{Bmatrix} k^w \langle N - N \rangle dl \tag{21}$$

$$= \begin{bmatrix} K^w & -K^w \\ -K^w & K^w \end{bmatrix}$$

여기서 K^w 는 다음과 같다.

$$K^w = \frac{k^w l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & -13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & -13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

위와 같은 개념을 이용하면 윈클러 요소로 모델링하는 침목 및 도상의 감쇠 c^w 에 대한 감쇠행렬은 다음과 같다.

$$C^w = \int_0^{l_e} \begin{Bmatrix} N^T \\ -N^T \end{Bmatrix} c^w \langle N - N \rangle dl \tag{23}$$

$$= \begin{bmatrix} C^w & -C^w \\ -C^w & C^w \end{bmatrix}$$

여기서, C^w 는 다음과 같다.

$$C^w = \frac{c^w l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & -13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & -13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

여기서 윈클러 요소는 4개의 절점이 하나의 요소를 이루며 각 절점은 수직 및 회전 자유도를 가지고 있다. 따라서 윈클러 요소의 자유도는 $\langle v_i^d, \theta_i^d, v_{i+1}^d, \theta_{i+1}^d, v_j^d, \theta_j^d, v_{j+1}^d, \theta_{j+1}^d \rangle^T$ 이다. 여기서, 상첨자 r 은 레일, d 는 교량 상판의 자유도를 의미한다. 하첨자는 절점번호를 나타내고 있다.

도상의 질량에 의한 관성 효과는 교량의 모델링에 포함하여 고려하였다(식(36)). 교량상판의 자유도는 교량 중립축의 자유도와 일정한 관계식으로 나타낼 수 있다. 이러한 관계는 2.3장에서 설명하였다.

2.3 교량의 모델링

교량은 보요소(K^b, M^b)를 이용하여 2차원으로 모델링 하였다. 기존의 2차원 상호작용해석에서는 차량의 윤축이 교량의 도심에 작용한다고 가정하여 해석하였다. 그러나, 그림 6과 같이 철도교량의 상판에 궤도가 복선으로 건설된 경우에는 궤도를 통과하는 차량에 의한 축하중의 편심을 고려하여 해석하는 것이 타당하다. 따라서, 본 프로그램에서는 2차원 보요소의 도심에서의 절점변위인 연직(v^b)과 회전(θ^b)에 비틀림변위(ψ^b)를 추가하여 차량이 편심을 가지고 교량상을 주행하는 것을 고려할 수 있도록 하였다.

도상을 모델링한 윈클러 요소의 임의의 위치에서의 변위는 레일의 변위 v^r 과 차량이 주행하는 궤도위치의 교량 상판 변위 v^d 의 상대값으로 나타내었다. v^d 는 교량의 도심에서의 연직변위(v^b)와 교량의 비틀림에 의한 추가적인 변

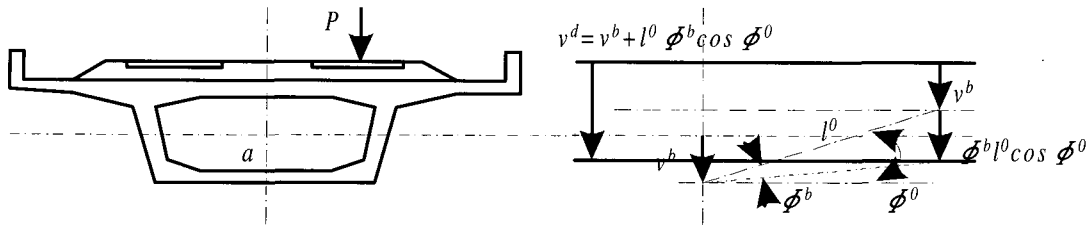


그림 6 교량의 축하중 편심 모델

위(v^d)의 합으로 나타낼 수 있다. 교량의 비틀림이 강제 운동을 하고, 그 양이 미소하다고 가정하면 기하학적인 조건에 의해 v^d 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v^d &= l^0 \sin \psi^0 - l^0 \sin(\psi^0 - \phi^b) \\ &= \phi^b l^0 \sin \psi^0 \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 a 는 도심, l^0 는 도심 a 에서 하중 P 가 작용하는 지점까지의 거리이고 ψ^0 는 중립축과 도심 a 에서 하중 P 가 작용하는 지점까지의 선이 이루는 각이다. 따라서, 임의의 위치 x_i 에서 차량이 주행하는 궤도위치의 교량 상판 변위 v^d 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v^d(x_i) = v^b(x_i) + \phi^b(x_i) l^0 \cos \psi^0 \quad (26)$$

이러한 관계식은 아래와 같은 제약조건식(27, 28)에 의해 교량 상판 변위를 교량 도심에서의 변위로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} v_i^d \\ \theta_i^d \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} v_i^b \\ \theta_i^b \\ \psi_i^b \end{Bmatrix} \quad (27)$$

$$T = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & l^0 \cos \psi_0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

원클러 요소의 시스템 행렬 구성 후 요소단위에서 제약 조건식(27, 28)을 다음 식과 같이 적용하므로써 $\langle v_j^d, \theta_j^d, v_{j+1}^d, \theta_{j+1}^d \rangle^T$ 를 $\langle v_j^b, \theta_j^b, \psi_j^b, v_{j+1}^b, \theta_{j+1}^b, \psi_{j+1}^b \rangle^T$ 로 전환한 궤도/교량 구조물의 시스템 행렬을 완성하였다.

$$\overline{K}^w = \begin{bmatrix} I & & & & & \\ & I & & & & \\ & & T & & & \\ & & & T & & \\ & & & & K^w & \\ & & & & & I \\ & & & & & & T \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\overline{C}^w = \begin{bmatrix} I & & & & & \\ & I & & & & \\ & & T & & & \\ & & & T & & \\ & & & & C^w & \\ & & & & & I \\ & & & & & & T \end{bmatrix} \quad (30)$$

여기서 T 는 단위행렬로 차수는 2이다. 교량의 감쇠행렬은 Rayleigh 감쇠를 이용하여 구성하였다.

$$C^b = \alpha M^b + \beta K^b \quad (31)$$

여기서 C^b , M^b 와 K^b 는 각각 교량의 감쇠, 질량 및 강성행렬을 의미하고, α 와 β 는 Rayleigh 계수로 각각의 모드 감쇠비와 식(32)와 같은 관계에 있다. 따라서 α 와 β 를 구하기 위해서는 교량의 고유치해석이 필요하며, 이를 위해서 Subspace Iteration Method¹²⁾을 이용하였다.

$$\xi_i = \frac{\alpha + \beta \omega_i^2}{2\omega_i} \quad (32)$$

2.4 차량/궤도 상호작용력

차량과 궤도와의 상호작용에 의해 i 번째 윤축에서 레일에 작용하는 하중 P_i 는 다음과 같이 동하중으로 고려할 수 있다.

$$P_i = k_i^b \{w_i - v^r(x_i) + y^{w/r}(x_i)\} \quad (33)$$

상호작용력 P_i 는 다음과 같은 관계식에 의해 레일의 보 요소에 대한 절점하중으로 나타낼 수 있다.

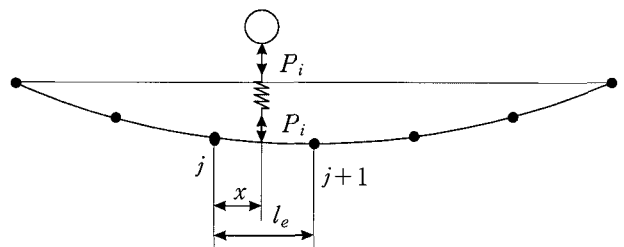


그림 7 차량/궤도 상호작용력

$$\begin{Bmatrix} F_k \\ M_k \\ F_{k+1} \\ M_{k+1} \end{Bmatrix} = P_i \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

여기서 $N_1 = 1 + 2\xi^3 - 3\xi^2$, $N_2 = \xi l_e (\xi - 1)^2$, $N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3$, $N_4 = \xi^2 l_e (\xi - 1)$, $\xi_i = x/l_e$ 이다. 식(33)에서 상호작용력 P_i 는 미지 값인 레일 변위 $v^r(x_i)$ 의 함수이다. $v^r(x_i)$ 는 식(18)에서 차량에 작용하는 하중을 구하기 위해 가정한 값을 사용한다. 이 값은 상호작용력 P_i 가 작용하는 궤도/교량 시스템의 운동방정식을 해석하여 계산된 레일의 절점변위를 식(35)에서와 같이 윤축이 위치하고 있는 곳에서의 변위로 나타내어, 비교하므로써 검증할 수 있다.

$$v_r(x_i) = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle \begin{Bmatrix} v_i^r \\ \theta_i^r \\ v_{i+1}^r \\ \theta_{i+1}^r \end{Bmatrix} \quad (35)$$

여기서 상첨자는 레일, 하첨자는 절점번호, v 는 수직변위, θ 는 회전변위를 의미한다.

2.5 해석알고리즘

본 연구에서 사용한 차량/궤도/교량 상호작용해석 프로그램의 알고리즘은 그림 8과 같다. 개발 프로그램 알고리즘의 특징은 최장근 등⁷⁾이 사용한 차량의 주행에 따른 차량과 교량을 포함한 하나의 운동방정식을 해석 단계마다 재구성한 후 유효강성행렬을 행렬분해하여 수치적분 하는 것과는 달리 차량과 구조물의 운동방정식을 독립적으로 구성하여 해석한다는 것이다. 행렬분해에 필요한 연산횟수는 $\frac{1}{2}nm^2 + \frac{3}{2}nm^{12}$ 이다. 여기서, n 과 m 은 시스템의 차수와 띠폭이다. 즉, 기존 방법⁷⁾의 알고리즘은 매순간마다 위와 같은 양의 해석시간을 필요로 하다. 그러나, 개발 방법은 차량과 교량의 운동방정식을 독립적으로 구성하고, 각 해석단계마다 차량이 이동하는 것을 시스템 행렬의 변화로 고려하는 것이 아니라 각각 차량과 교량에 작용하는 하중항으로 고려하기 때문에, 유효강성행렬에 대한 행렬분해를 차량 및 구조시스템의 운동방정식에 대해 각각 한번씩만 수행하면 된다. 그러나 개발 방법에서는 가정한 레일 변위 $v^r(x_i)$ 에 대한 수렴성을 확보하기 위해서는 해석 시간간격 (Δt)이 기존 방법에 비해 상대적으로 적어야만 한다.

본 개발 프로그램에서는 2차원 차량모델에 의한 상호작용 해석뿐만 아니라 이의 모델을 이용하여 정적으로 차량 축하중을 계산한 후 이를 이용하는 연행하중에 의한 동적

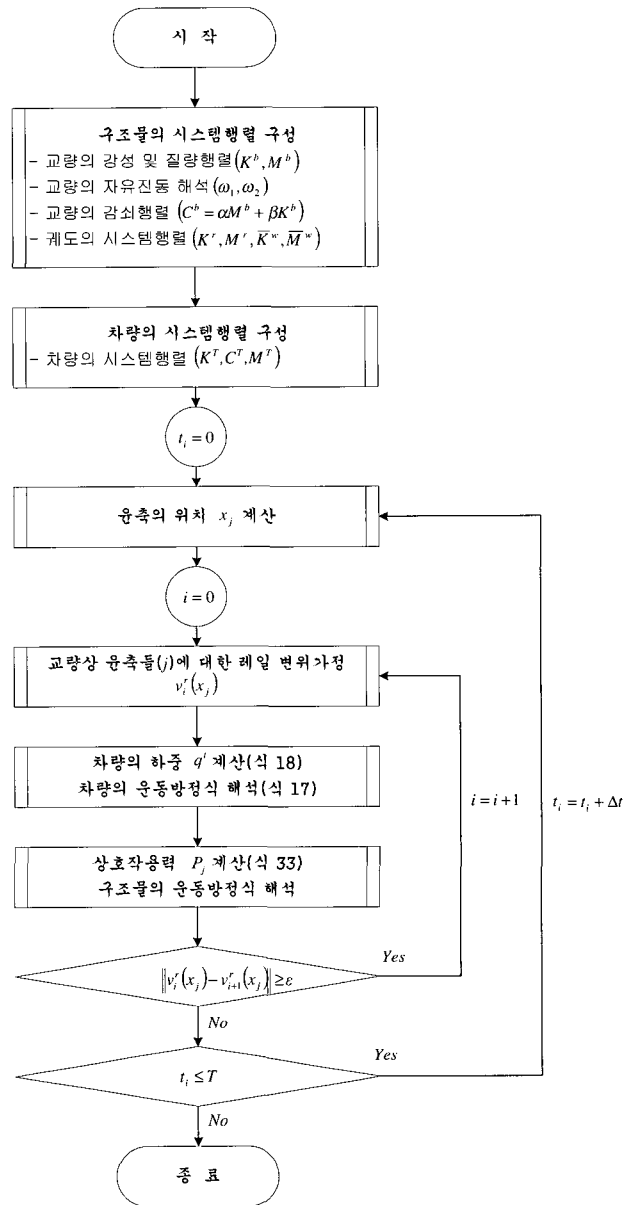


그림 8 차량/궤도/교량의 상호작용해석 프로그램의 알고리즘

해석과 정적해석이 가능하도록 하였다.

3. 해석프로그램의 검증

본 해석프로그램을 검증하기 위하여 고속철도 교량의 대표적인 상부형식인 PC 박스 교량을 대상구조물로 하여 본 해석프로그램의 수치해석결과와 계측결과를 비교하였다. 대상 교량은 2경간 연속교로 각 경간 길이는 40m이고, 총 교량길이는 80m이다. 표 1에 대상교량에 대한 단면특성치를 나타내었다. 교량의 탄성계수(E) 값은 교량 상판의 프리스트레싱을 고려하여 $3.52 \times 10^6 \text{ ton/m}^2$ 을 사용하였다. 교량의 감쇠비(ξ)는 한국건설기술연구원이 대상교량과 같

표 1 대상교량(2@40m=80m)의 단면 및 물성치(단위: tonf, m)

단 면	1	2	3	4	5	6	7
단면적(A)	12.26	13.33	15.99	15.73	24.10	13.99	14.53
단면2차모멘트(I ₃₃)	20.40	21.23	23.26	24.38	28.76	22.39	22.80
단면 등가단위중량(ρ _{eqi})	0.342	0.335	0.322	0.323	0.299	0.331	0.329
기 타	ρ _b =0.1939tonf/m ³ /m/sec ² , A _b =5.5m ² , ρ=0.2551tonf/m ³ /m/sec ² E=3.52×106ton/m2, ξ=0.024, ν=0.2						

은 형식인 갑천교(2@40m=80m)에서 실시한 감쇠시험 결과 0.024를 이용하였다.¹⁴⁾ 프아송비(ν)는 0.2이다. 각 교량 단면의 단위중량(ρ_{eqi})은 도상을 포함한 등가의 값으로 다음과 같이 계산한 결과를 이용하여 모델링하였다.

$$\rho_{eqi} = \frac{\rho_b A_b + \rho A}{A} \quad (36)$$

여기서 ρ_b와 A_b는 도상의 단위중량과 도상의 단면적이 고 ρ와 A는 교량의 단위중량과 단면적이다. 교량의 상부

구조는 지점당 2개의 탄성받침으로 지지되어 있어 본 해석에서는 이를 표 2와 같은 물성치를 갖는 지점 스프링으로 모델링하였다. 또한, 표 2에 원클러 요소로 모델링한 도상 및 레일의 물성치를 정리하였다. 2개의 레일이 궤도를 구성하고 있으므로, 2차원 모델을 고려하여 아래의 값에서 단면적(A)과 단면2차모멘트(I₃₃)를 2배하여 모델링에 사용하였다. 표 3은 KTX 및 궤도의 물성치를 정리한 것이다.

표 4와 그림 9에는 수치해석결과와 한국철도기술연구원이 수행한 계측결과¹⁵⁾에 대해 대상교량에 대한 첫 번째 고유치를 비교한 것이다. 계측결과는 KTX가 290km/h로 주행하였을 때 측정된 가속도를 FFT(Fast Fourier Transform) 한 것으로 4.272Hz로 나타났다. 개발프로그램을 이용한 자유진동해석결과에서는 4.185Hz로 계측결과와는 2.04%의 오차를 보여주고 있다. 한국건설기술연구원에서 갑천교의 감쇠시험에서는 첫 번째 고유치가 4.75Hz로 나타났으나, 이는 도상궤도가 부설되기 전에 계측된 값이다. 따라서, 교량의 첫 번째 고유치는 도상궤도가 부설되면 질량의 증가로 약 0.5Hz정도 감소하는 것을 알 수 있다.

교량의 임의의 지점에 대해 차량이 일정한 속도로 주행하는 경우 유효타격거리와 속도의 함수인 일정한 타격주기로 교량을 가진하는데, 이러한 가진주파수와 교량의 고유진동수가 일치하는 경우 공진현상이 나타나 교량에 불안정한 동적 거동을 유발한다. 이러한 현상을 나타내는 속도를 임계속도라 한다. KTX의 유효타격거리(d_{eff})는 18.7m이며, 임계속도는 다음과 같다.¹⁶⁾

$$V_{cr} = \omega_1(\text{Hz}) \times d_{eff} \times 3.6$$

표 2 탄성받침 및 도상 물성치(단위: tonf, m)

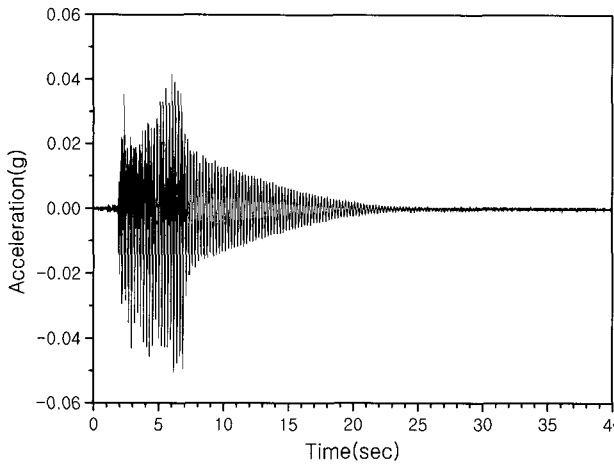
탄성받침	스프링(k)	4.158×10 ⁶
도 상	스프링(k ^w)	8,163.27
	감쇠(c ^w)	24.49
레 일 (UIC60)	탄성계수(E)	21.0×10 ⁶
	단위중량(ρ)	0.801
	단면적(A)	7.686×10 ⁻³
	단면2차모멘트(I ₃₃)	30.55×10 ⁻⁶

표 3 KTX의 제원 및 물성치(단위: tonf, m)

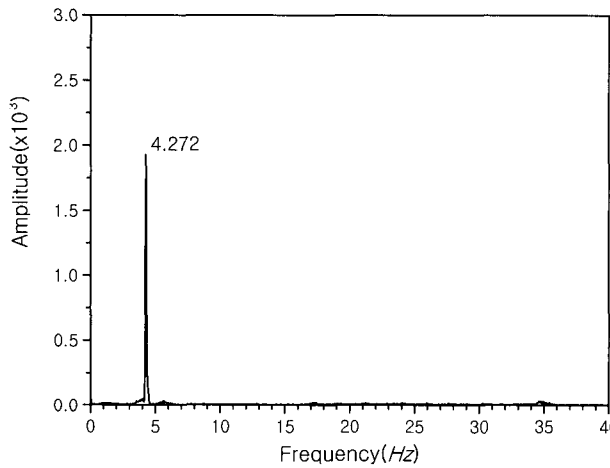
세부항목	동력차	동력객차	객차	
차체질량(M)	5.604	4.363	2.691	
차체길이(L)	14.0	18.7	18.7	
차체 무게중심까지 거리(a)	7.0	a ₂ =6.73, a ₁₉ =11.97	9.35	
대차질량(m)	0.250	0.314	0.308	
윤축질량(m ^w)	0.210	0.210	0.210	
윤축거리(l)	1.5	1.5	1.5	
차체관성모멘트(I)	115.50	167.72	100.14	
대차관성모멘트(i)	0.265	0.333	0.327	
이차원가 장치	스프링(k ^s)	258.78	75.71	61.22
	감쇠기(c ^s)	4.08	4.08	4.08
일차원가 장치	스프링(k ^p)	250.0	250.0	168.4
	감쇠기(c ^p)	4.08	4.08	4.08
접촉스프링(k ^h)	285714.29	285714.29	285714.29	

표 4 첫 번째 고유치 비교

고유치 번호	진 동 수(Hz)		오차(%)
	수치해석결과	계측결과 (v=290km/h)	
1	4.185	4.272	2.04
임계속도(km/h)	281.7	287.6	

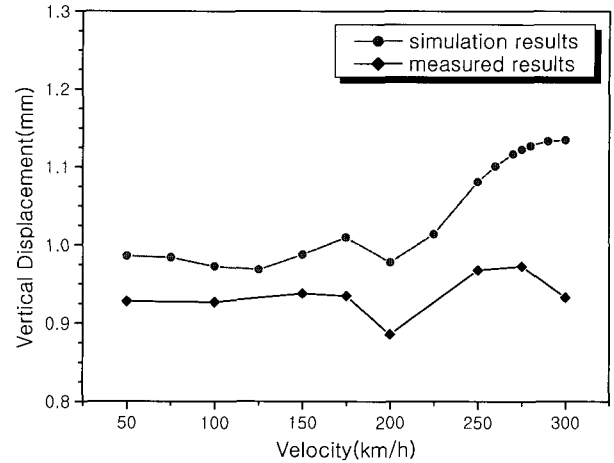


(a) 시간이력곡선

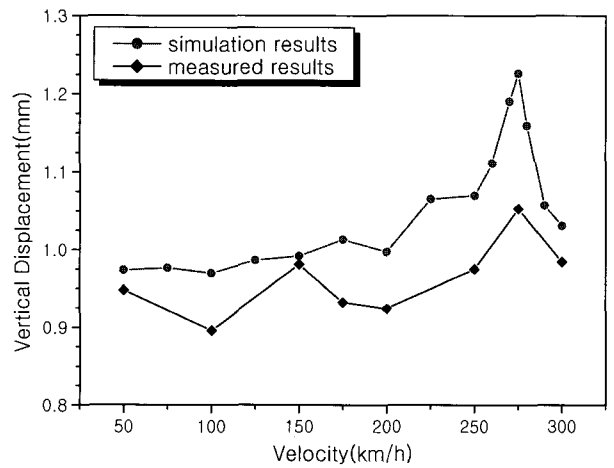


(b) FFT 결과

그림 9 첫 번째 구간 중앙지점 수직가속도(v=290km/h)



(a) 첫 번째 구간 중앙점



(b) 두 번째 구간 중앙점

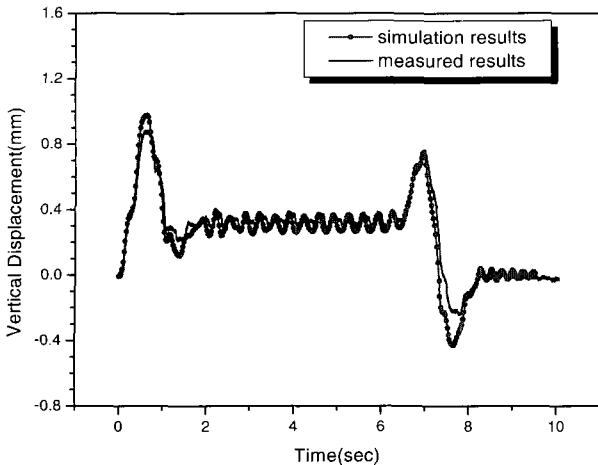
그림 10 각 구간 중앙점에서의 최대 수직변위 비교

그림 10과 표 5에 각 구간 중앙점에서의 최대 수직변위에 대해 수치해석결과와 계측결과를 비교한 것이다. 또한, 그림 11은 KTX 주행속도 200km/h와 300km/h에 대해 첫 번째 구간 중앙점에서 시간에 따른 수직변위를 비교한 것이다. 시험시 발생하는 오차를 최소화하고 신뢰성 있는 계측데이터를 확보하기 위해서는 충분한 시험이 이루어져야 하나 현장여건의 어려움으로 한번의 주행시험을 통하여 확보된 데이터를 본 논문에서 참조하였다. 표 5에서처럼 수치해석결과와 계측결과가 최소 1.12%에서 최대 21.65%까지의 차이가 있음을 보여주고 있다. 이러한 오차는 전술한바와 같이 계측데이터의 신뢰성 측면이나 또는 해석시 시스템의 단순화와 실제 궤도틀림의 미고려 등에 기인하는 것으로 판단된다. 따라서 이러한 것을 고려할 경우 그림 10에서처럼 수치해석결과와 계측결과가 속도 증가에 따른 최대 수직변위 특히, 임계속도 280km/h 부근에서 수직변위의 변화 경향을 잘 나타내 주고 있음을 알 수 있다.

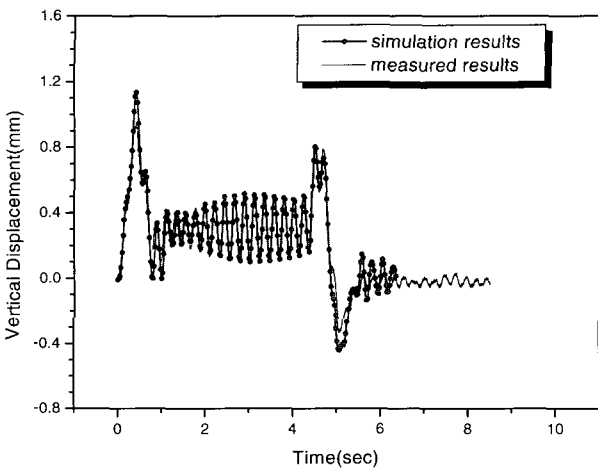
표 3 각 구간 중앙점의 수직변위 비교(단위:mm)

속도 (km/h)	첫 번째 구간 중앙점			두 번째 구간 중앙점		
	수치해석 결과	계측결과	오차 (%)	수치해석 결과	계측결과	오차 (%)
50	0.986	0.928	6.25	0.974	0.948	2.74
100	0.973	0.927	4.96	0.970	0.896	8.26
150	0.988	0.938	5.33	0.992	0.981	1.12
175	1.010	0.935	8.02	1.013	0.932	8.69
200	0.978	0.886	10.38	0.997	0.924	7.90
250	1.081	0.968	11.67	1.070	0.975	9.74
275	1.123	0.973	14.42	1.227	1.053	16.52
300	1.135	0.933	21.65	1.031	0.984	4.78

KTX 차량의 교량상 주행시 상호작용에 의해 발생하는 수직변위는 일반적으로 동력차대차(PMB)와 동력객차대차(MTB)에 의해 윤축이 집중될 때 최대값이 발생한다. 그림 11에서처럼 수치해석결과가 최대값이 발생하는 부분에



(a) 주행속도(v):200km/h



(b) 주행속도(v):300km/h

그림 11 첫 번째 경간 중앙점에서 속도별 수치해석결과와 계측 결과의 수직변위 비교

서 계측결과에 비해 크게 나타났다. 그러나, 전체적으로 수치해석결과가 계측결과에 의한 시간이력을 잘 묘사하고 있으며, 주행속도 300km/h인 경우 객차부분이 통과할 때 발생하는 약간의 공진현상을 수치해석결과가 잘 추적하고 있는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 KTX 차량의 주행에 따른 교량의 동적 특성을 평가할 수 있는 준3차원 차량/궤도/교량 상호작용 해석프로그램을 개발하고, 이를 이용한 수치해석결과를 계측결과와 비교하여 개발프로그램의 정확성을 검증하였다.

① 차량의 복선궤도 주행에 따른 편심 효과를 고려하기 위해 비틀 자유도 및 기하학적인 관계에 따른 제약조건식을 사용하므로써 2차원 해석으로 3차원 효과를 고려할 수 있도록 하였음

- ② 헤르짜안 스프링을 차량모델에 포함시킴으로써 축중변 동량을 분석할 수 있도록 하였음
- ③ 도상을 모델링할 수 있는 원클러 요소를 개발, 적용하므로써 무도상 교량뿐만 아니라, 현재 고속철도교량에 적용하고 있는 유도상 교량의 동적해석을 좀 더 정밀하게 수행할 수 있도록 하였음
- ④ 차량의 관성 효과를 고려하여 좀 더 정확한 동적해석을 수행할 수 있도록 하였으며, 차체의 가속도를 분석하므로써 승객이 느끼는 승차감을 추정할 수 있도록 하였음
- ⑤ 수치해석결과와 계측결과를 대상교량에 대해 비교한 결과 최소 1.12%에서 최대 21.65%의 오차를 그리고 고유치에 대해서는 2.04%의 오차가 있으나, 임계속도 부근에서 최대 수직변위에 대한 경향이 잘 일치하고 있는 것으로 나타났다음

참 고 문 헌

1. S.K. Chauduri, "Dynamic Response of Horizontally Curved I-Girder Highway Bridges Due to a Moving Vehicle", The University of Pennsylvania, Dissertation, 1975
2. K.H. Chu, and V.K. Garg, "Impact in Railway Prestressed Concrete Bridges", *Journal of Structural Engineering(ASCE)*, Vol.112, No.5, 1986, pp.1036~1051
3. A. Wiriyachai, K.H. Chu, and V.K. Garg, "Bridge Impact Due to Wheel and Track Irregularities", *Journal of Engineering Mechanics Division(ASCE)*, Vol.108, 1982, pp.648~666
4. 김성일, 광종원, 장승필, "3차원 관절형 고속열차 모델을 이용한 교량/열차 상호작용해석", 대한토목학회 논문집, 제19권, 제1-4호, 1999, pp.505~516
5. 유철수, 강영중, 김종현, 권재현, "고속철도 차량의 주행이 교량에 미치는 충격효과", 한국강구조학회 논문집, 제10권, 제2호, 1998, pp.187~199
6. 박홍석, "개선된 고속철도열차모형을 사용한 교량의 동적해석에 관한 연구", 연세대학교, 박사논문, 1998, 132
7. 최창근, 송명관, 양신추, "고속철도차량(TGV)-교량 상호작용의 단순화된 3차원 해석모델", 한국전산구조공학회논문집, 제13권 제2호, pp.165~178
8. F. Yang, and G.A. Fonder, "An Iterative Solution Method for Dynamic Response of Bridge-Vehicles Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.25, 1996, pp.195~215

9. Y.B. Yang, J.D. Yau, and L.C. Hsu, "Vibration of Simple Beams due to Trains Moving at High Speeds", *Engineering Structures*, Vol.19, No.11, 1997, pp.936~944
10. C. Esveld, *Modern Railway Track*, MRT-Productions, pp.24, 121~122
11. R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Wiley, p.251
12. K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1996, p.797
13. *ADINA System Verification Manual*, ADINA Engineering, Inc. 1983
14. 고속전철 구조물 안전성 기술 개발(2단계1차년도 연구보고서), 한국건설기술연구원, 2000
15. 수동계측·계측센서 및 설비점검 보고서, 한국철도기술연구원, 2002
16. 고속전철 강합성형교량의 차량하중 동적해석을 통한 최적구조시스템의 결정에 관한 연구(2차년도 보고서), 서울대학교공학연구소, 1998