

볼 베어링에서 발생하는 가진 베어링주파수 및 특성

정 성 원*

(스페이스솔루션 컨설팅팀)

1. 머리말

볼 베어링은 그림 1과 같이 내륜, 외륜, 볼, 케이지(cage) 및 실(seal) 등으로 구성되어 있고, 각 구름요소들이 서로 접촉하여 강성을 발생하고 회전체를 지지하는 구조를 이룬다. 이러한 볼 베어링의 각 구성요소는 다양한 원인에 의한 기하학적 불완전성을 내포하고 있는데, 이는 볼 베어링의 회전에 따라 접촉력, 접촉각 및 강성을 변화시키는 역할을 하게 된다. 따라서 볼 베어링은 회전체의 지지요소로서 뿐만 아니라, 가진원으로써 작용하게 되어 다양한 형태의 진동 및 소음문제를 유발하게 된다. 이러한 가진원의 영향은 최근 복잡하고 정교한 회전기기의 성능을 저해하는 주요한 원인이 되고 있는데, 절삭기기의 가공정밀도를 저해하는 베어링 진동과 하드디스크 드라이브(HDD)와 같은 정보저장기기의 저장밀도를 저해하는 비반복적 진동 등이 그 대표적인 예이다.

이러한 이상소음과 진동에 대한 원인을 규명하고 이를 회피하는 설계를 위하여 볼 베어링 단품과 회전체 진동에 미치는 영향에 대한 많은 실험적 연구와 이론적 연구가 이루어져 왔다. 이 글에서는 이러한 연구결과들을 바탕으로 볼 베어링

에 의해 발생하는 이상소음과 진동의 종류를 분류하고 각 소음진동의 종류별 특성과 원인에 대하여 간략히 소개하고자 한다. 그리고 이상소음 및 진동을 유발하는 대표적인 볼 베어링 가진원이라고 할 수 있는 waviness에 의한 가진주파수 특성을 해석하기 위한 해석적 모델과 이에 따른 회전체의 안정성 해석기법에 대하여 소개하고자 한다.

2. 볼 베어링에 의한 소음진동의 분류⁽¹⁾

볼 베어링에 의한 소음진동은 그 원인에 따라 크게 네가지로 분류되는데, 볼 베어링 구성요소의 재료적 강성과 그 형태에 기인하는 구조적 원인에 의한 소음진동, 생산공정상에서 발생하는 기하학적 불완전성에 의한 소음진동, 부적절한 사용환경에 의해 발생하는 소음진동 그리고 그밖의 원인에 의한 소음진동이 그것이다. 각각의 원인에 대한 소음진동의 형태와 발생주파수를 표 1에 정리하였으며, 각 소음진동의 발생원인 및 특징 그리고 저감을 위한 방안 등을 아래에 설명하였다.

2.1 구조적원인에 의한 소음진동

볼 베어링 구성요소의 재료적 특성과 구조적 형상에 기인한 소음진동은 진동보다는 소음에 의해 그 특성이 판가름 나는 경우가 많으며, 이러한 이상소음 및 진동은 레도륜소음(race noise), 클

* E-mail : swjeong@engspace.com

베어링 (특집)

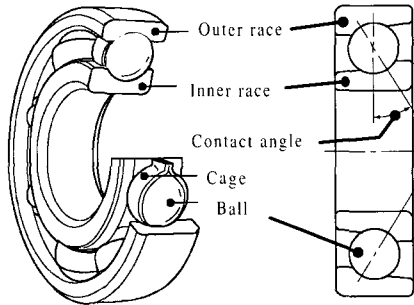


그림 1 볼 베어링의 구조

릭소음(click noise), 마찰소음(squeal noise), 케이지소음(cage noise) 그리고 볼 통과진동(ball passage vibration)으로 크게 구분한다.

케도륜 소음은 가장 기본적인 소음진동으로서, 케도륜의 기하학적 결함이 볼과의 구름마찰에 의해 힘을 발생하고 이러한 마찰력이 선택적으로 케도륜의 고유진동수를 가진하여 발생하는 것으로 부드럽고 연속적인 소음이며 모든 베어링에서 발

표 1 볼 베어링에 의한 소음진동의 주파수별 분류⁽¹⁾

	Sound	Vibration	Frequencies			
			FFT of original wave		FFT after envelope (Basic No.)	
			Radial	Axial		
Structural	Race noise	Free vibration of raceway	f_{RiN}, f_{MI}	f_{AiN}, f_{AM}	-	
	Click noise	Free vibration of raceway and cage	f_{RiN}, f_{MI}	f_{AiN}, f_{AM}	Zf_c	
	Squeal noise	Free vibration of raceway	$\approx f_{R2N}, f_{R3N}$	-	?	
	Cage noise	Collision	Free vibration of cage	Natural freq. of cage		f_c
		Friction	Vibration of cage	Natural freq. of cage		?
		Tapping	Free vibration of cage	Natural freq. of cage		Zf_c
		Ball passage vibration	Zf_c	-	-	
Manufacturing	Waviness noise	Vibration due to waviness	Inner race	$nZf_i \pm f_r$ ($nZ \pm 1$ peaks)	nZf_i (nZ peaks)	-
			Outer race	nZf_i ($nZ \pm 1$ peaks)	nZf_c ($2n$ peaks)	-
			Ball	$2nf_b \pm f_c$ ($2n$ peaks)	$2nf_b$ ($2n$ peaks)	-
Handling	Flaw noise	Vibration due to flaw	Inner race	f_{RiN}, f_{MI}	f_{AiN}, f_{AM}	Zf_i
			Outer race			Zf_c
			Ball			$2f_b$
	Contamination noise	Vibration due to contamination	f_{RiN}, f_{MI}	f_{AiN}, f_{AM}	Irregular	
Others	Seal noise	Free vibration of seal	Natural freq. of cage		(f_r)	
	Lubricant noise	-	?	?	Irregular	

n : Positive integer (=1,2,3)

f_c : Cage rotating frequency

f_r : Inner race rotating frequency

f_{RiN} : Ring natural frequency in radial bending mode

f_{AiN} : Ring natural frequency in axial bending mode

f_{MI} : Natural frequency in the mode of angular vibration in inertia of outer ring-spring system

f_{AM} : Natural frequency in the mode of axial vibration in inertia of outer ring-spring system

Z : Number of ball

f_b : Ball spinning frequency

f_i : $f_i = f_r - f_c$

특집 베어링

생하는 소음이다. 이 소음은 회전속도에 의해 그 주파수 성분이 변화하지 않으며, 회전속도의 증가할수록, 그리고 반경방향 간극이 감소할 수록 그 소음의 크기만 증가하는 경향을 보인다. 그리고 윤활유의 점성과 하우징 강성이 증가할수록 소음은 감소하는 경향을 보이는 특징을 가진다. 따라서 이 소음을 줄이기 위한 방안으로는 베어링 궤도륜의 강성을 증가시키거나 반경방향 간극을 적절히 조절하고, 구름요소간에 작용하는 윤활유의 점성을 증가시키는 방법 등이 있다.

클리소음은 반경방향 하중을 받는 비교적 큰 볼 베어링에서 주로 발생하는 현상으로써, 일정한 크기의 주기적인 소음으로 나타나는데, 볼과 궤도륜 및 볼과 케이지간의 충돌이 주요 원인이다. 즉, 반경방향으로 큰 하중이 작용하는 경우, 베어링 내에는 하중이 작용하여 접촉면적이 넓어지는 부분과 아예 하중이 작용하지 않게 되어 구름요소간에 접촉하지 않는 부분이 발생하게 되는데, 볼 베어링의 회전에 따라 접촉과 비접촉이 주기적으로 반복되는 것이다. 따라서 이 현상은 지속적으로 회전하는 경우에 발생하였다가 고속 회전시에 볼의 원심력이 증가하여 비 접촉영역이 사라지게 되면 자연 소멸되는 특징을 가진다. 이 현상을 저감하기 위해서는 반경방향 간극을 감소시키고, 고점성의 윤활유를 사용하며 예압을 증가시키는 등의 방법이 사용될 수 있다.

마찰소음은 찢어지는 듯한 금속성의 소음을 일컫는 것으로서 연속적으로 발생하는 경우뿐만 아니라 간헐적으로 발생하기도 하는데, 이 현상은 구름요소간 접촉면에서의 마찰에 의한 자려진동이 주요 원인이며 클리소음 같이 반경방향 하중이 크게 작용하는 비교적 큰 지름의 볼 베어링에서 주로 발생하며, 실린더형 롤러 베어링에서도 가끔 발생한다. 그리고 이 현상은 반경방향의 간극이 큰 경우 자주 발생하는 경향이 있고, 겨울철에 주로 발생한다. 그리고 베어링의 크기가 클수록 낮

은 주파수대역에서 발생하며, 특정 회전속도에서만 발생하게 된다. 또한 이 현상은 베어링의 운전 조건 뿐만 아니라 윤활유의 양과 종류 등에 영향을 받는데 특정한 경향을 따르기보다는 예측이 불가능한 경우가 많다. 이 현상에 대한 효과적인 대응방법으로는 반경방향 간극을 줄이고 예압을 높이거나 윤활유의 종류를 바꾸는 등의 방법 등이 있다.

케이지소음은 케이지와 볼 그리고 궤도륜의 충돌에 의해 발생하는 케이지 충돌소음(cage collision noise), 케이지 가이드표면의 마찰력에 의한 자려진동으로 발생하는 케이지 마찰소음(cage friction noise) 그리고 윤활유의 저항에 의해 볼과 케이지의 충돌이 유발되어 발생하는 태핑소음(tapping noise)으로 나뉘어 진다. 케이지 충돌소음은 모든 베어링에서 발생하는 현상으로서 일정한 크기를 가지며 규칙적인 형태를 가지는데, 이를 저감하기 위해서는 예압을 증가시키고 점성이 높은 윤활유를 사용해야 하며, 베어링의 장착조건을 개선해야 한다. 그리고 케이지 마찰소음은 특정한 그리스를 사용한 경우의 윤활조건에서 발생하며 연속적이고 간헐적으로 발생하는 특징을 모두 가진다. 이를 저감하는 방법으로는 그리스의 종류와 케이지의 재질을 변경해야 한다. 태핑소음은 대체로 특정한 간격을 가지며 일정하게 발생하지만, 반경방향 하중이 있는 운전조건에서 구동초기에 다소 불규칙한 특성을 보이게 되는데, 반경방향의 간극을 줄이고 예압을 증가시켜 저감할 수 있다.

볼 통과진동은 반경방향 하중을 받는 볼 베어링에서 발생하는 진동문제의 대부분을 차지한다. 이런 형태의 진동은 볼이 궤도륜 사이를 통과하는 동안에 회전축에서 발생하는 변위가 주요 원인이며, 반경방향의 하중을 받는 모든 형태의 볼 베어링에서 발생하며 연속적으로 발생하는 특징을 가진다. 그림 2는 반경방향 하중(Fr)이 작용하는 볼 베어링에서 볼 통과진동이 발생하게 되는 과정을

도시한 것으로서, 궤도륜의 회전에 따라 하중이 작용하는 작용선에 볼이 위치하는 상태와 그렇지 않은 상태가 반복되면서 발생하는 것이다. 이 현상도 반경방향의 간극을 줄이고 예압을 증가시킴으로서 다소 줄일 수 있다.

2.2 부적절한 취급에 의한 소음진동

부적절한 취급에 의해 발생하는 소음진동은 그 발생원인과 특성에 따라 결함소음(flaw noise)과 오염소음(contamination noise)으로 크게 나뉘어진다. 결함소음은 궤도륜 또는 볼 표면의 일부가 부식되거나 물리적 요인에 의한 국소 결함이 존재하는 경우 발생하는 소음진동이다. 이는 볼이 회전하며 궤도륜의 손상된 부위와 충돌하거나, 회전하는 볼의 손상부위가 궤도륜에 충돌하기 때문에 발생하게 되므로 구조적 원인에 의한 소음진동과 달리 회전속도에 의해 발생주파수가 결정된다. 표 1에 나타난 바와 같이 일정한 회전속도에서는 일정한 주파수를 가지고 발생하게 되고 가속 및 감속되는 경우는 속도 변화에 따라 소음진동의 주파수도 변화하게 된다. 결함이 궤도륜에 존재하는 경우는 높은 점성의 윤활유를 사용하여 전체적인 소음진동의 크기를 다소 줄일 수 있지만, 결함이 볼에 존재하는 경우는 소음진동의 저감효과가 미미하다고 알려져 있다. 따라서 이와 같은 문제를 해결하기 위해서는 표 1의 결과에 따라 소음진동의 주파수 성분을 해석하여 결함이 존재하는 베어링 구성요소를 파악하고 이를 교체하는 것이 가장 보편적인 방법이라고 할 수 있다. 한편 오염소음

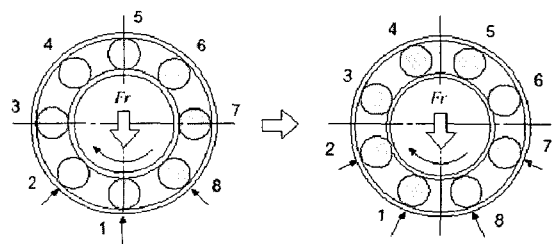


그림 2 볼 통과주파수의 발생 경로

은 부적절한 베어링의 취급 또는 가혹한 운전조건 등에 의해 베어링 내부에 이물질이 침투하여 발생하게 되며, 소형 베어링일수록 작은 외부 이물질에 의한 영향을 크게 받게 된다. 침투된 이물질이 베어링 내부를 이동하며 베어링 구성요소와 충돌하기 때문에 결함소음과는 달리 특정한 주기를 가지지 않는 특징을 가지며, 세척과 더불어 실(seal)을 개선함으로써 이러한 문제를 해결할 수 있다. 그림 3은 정상적인 베어링의 소음진동 시간응답과 대표적인 결함 및 오염소음의 시간응답을 나타낸 것으로서 그 특성을 차이를 확인할 수 있다.

2.3 불완전한 생산공정에 의한 소음진동

볼 베어링의 생산공정과 관련하여 발생하는 대부분의 소음진동은 그 원인이 waviness에 있다고 알려져 있으며 이는 완전히 제거할 수 없다. Waviness란 볼 베어링의 생산과정에서 각 궤도륜과 볼의 표면에 발생하는 굴곡을 의미하는 것으로서 가공기계의 오차, 조립방법 그리고 중력 등 다양한 원인에 의해 발생하게 된다. 이는 결함소음

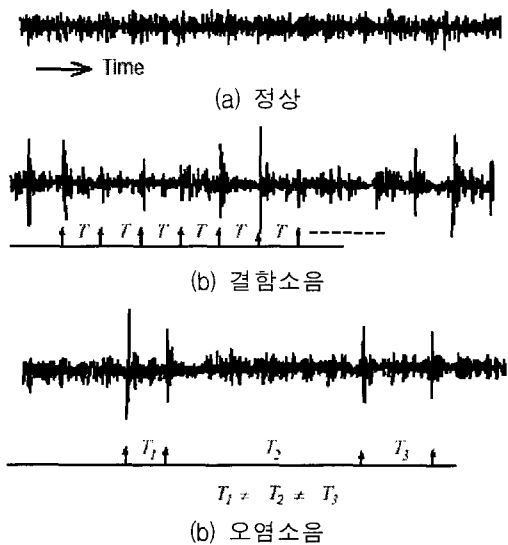


그림 3 결함 및 오염에 의한 소음파형

특집 베어링

과 같이 회전속도의 변화에 따라 발생 주파수 또한 변하는 특성을 가진다. 그림 4는 내륜에 존재하는 waviness가 회전함에 따라 볼과 접촉하여 소음진동을 유발하는 과정을 나타낸 것이다. 각각의 볼과 궤도륜의 접촉에 의해 발생하는 접촉력이 평형을 이루게 되는 위치로 회전하는 궤도륜의 중심이 이동하게 되고, 연속적으로 회전이 이루어짐에 따라 소음을 수반하는 진동이 동시에 발생하게 되는 것이다. 이와 같이 waviness에 의한 소음진동은 waviness의 차수(waviness돌기의 개수)와 볼의 개수에 따라 표 1에 나타난 바와 같이 반경방향 또는 축방향으로 발생하게 된다. Waviness에 의한 소음진동은 앞절의 결함소음과 더불어 회전속도에 의해 발생주파수가 결정되고, 접촉력의 비선형성에 의한 조화성분 및 사이드밴드(sideband)성분이 많이 발생하기 때문에 많은 주파수 성분을 가지는 가진력으로 작용하게 된다. 따라서 볼 베어링이 지지하는 회전기기의 고유진동수와 가진주파수와의 공진을 회피하기 어렵기 때문에, 정밀하고 소형 박형의 회전기기에 있어서는 특히 심각한 문제를 일으키기도 한다. 이러한 소음진동을 저감하기 위해서는 베어링 궤도륜의 waviness진폭이 작은 베어링을 선택하고, 베어링이 장착되는 회전축을 진원에 가깝게 가공하여 궤도륜의 waviness에 영향을 작게 미치도록 하는 것이 필요하다.

2.4 기타원인에 의한 소음진동

2.1~2.3절에서 소개한 다양한 원인의 소음진동 이외에도 상대적으로 발생빈도가 낮지만 기타 원인에 의한 소음진동으로써 실소음(seal noise)와 윤활재소음(lubricant noise) 등이 있다. 실소음은 실(seal)과 볼간의 마찰력에 의한 자려진동 때문에 발생하며, 윤활재소음은 회전속도 및 운전온도가 증가함에 따라 발생한 윤활유가 궤도륜과 볼간의 원활한 회전을 방해하여 발생하는 것으로서 두 경우 모두 윤활유를 개선하여 저감할 수 있다.

3. 베어링 결함에 의한 진동 해석모델

2장에서 분류한 바와 같이 볼 베어링 의해 발생하는 소음진동은 각각의 원인에 의한 특성을 가지고 발생한다는 것을 알 수 있다. 따라서 발생원인을 정확히 파악한다면, 그에 따른 소음진동을 제거하거나 저감할 수 있다고 할 수 있다. 그러나 발생한 소음진동에 대한 대책을 세우고 해결방안을 제시하는 것 이전에, 회전기기의 설계단계에서 이러한 진동 및 소음발생의 가능성을 예측하고 회피할 수 있도록 해석적 모델을 정립하는 것 또한 매우 중요하다고 할 수 있다. 소음진동을 유발하는 다양한 원인중에서 볼 베어링의 볼과 궤도륜에 존재하는 기하학적 결함은 회전기기의 진동과 소음을 유발하는 가장 큰 원인으로 알려져 있다. 이

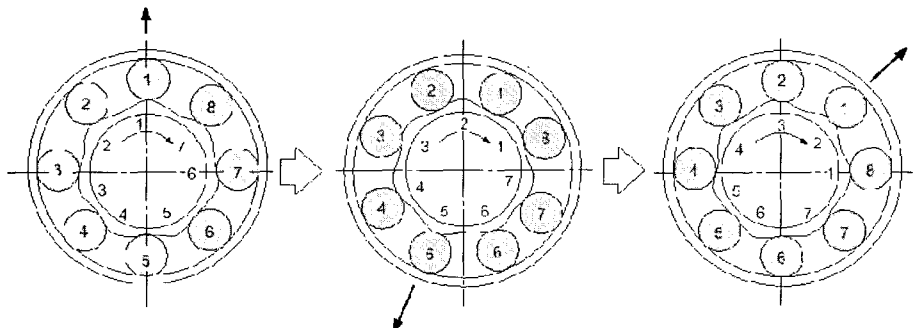


그림 4 내륜 waviness에 의한 진동발생 경로

는 주로 볼 베어링의 생산과정에서 발생하게 되지만, 완벽한 생산공정에 의해 볼 베어링의 각 구성 요소가 진원(perfect circle)을 이루더라도 회전체의 운전 및 하중조건에 의해 결함이 발생하기 때문에 기하학적 결함이 없는 볼 베어링은 실제 존재하지 않는다. 최근의 회전기기가 복잡하고 정교한 구조를 가지고, 볼 베어링에 의해 발생하는 진동 및 소음이 회전계의 성능을 저해하는 경우가 증가함에 따라 이에 대한 관심이 커지고 있다.

3.1 해석방법

볼 베어링의 구름요소 표면에 존재하는 기하학적 불완전성은 주기적인 형상의 waviness와 국소결함(localized defect)으로 나뉘어 진다. Waviness는 정현파함수로, 국소결함은 이 정현파 함수의 조합으로 표현할 수 있다. 그림 5는 곡률반경중심의 궤적을 따라 형성된 내외륜의 waviness를 보여주고 있는데, j번째 볼에 접촉하는 내외륜의 waviness는 다음과 같이 표현된다.^(2, 4)

$$p_{oj} = \sum_{l=1}^O A_{ol} \cos[-l(\omega_o - \omega_c)t + 2\pi l(j-1)/Z + \alpha_{ol}] \tag{1}$$

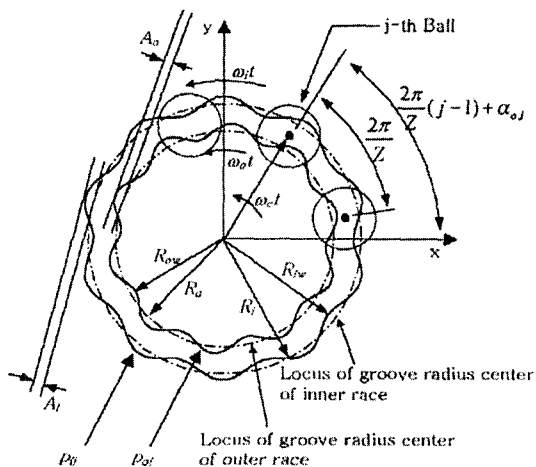


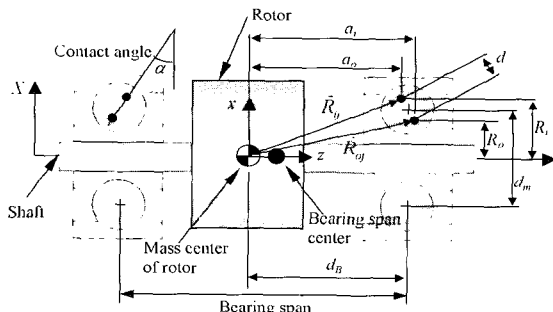
그림 5 레도룬 waviness 모델⁽⁵⁾

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^O A_{il} \cos[-l(\omega_i - \omega_c)t + 2\pi l(j-1)/Z + \alpha_{il}] \tag{2}$$

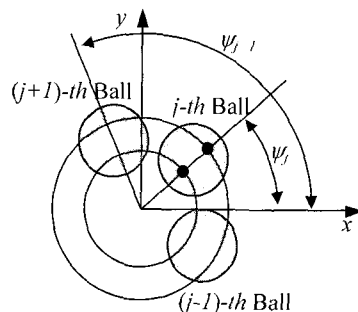
$$q_{oj} = \sum_{l=1}^O B_{ol} \cos[-l(\omega_o - \omega_c)t + 2\pi l(j-1)/Z + \beta_{ol}] \tag{3}$$

$$q_{ij} = \sum_{l=1}^O B_{il} \cos[-l(\omega_i - \omega_c)t + 2\pi l(j-1)/Z + \beta_{il}] \tag{4}$$

여기서 p_{ij} , p_{oj} 는 내외륜의 반경방향 waviness, q_{ij} , q_{oj} 는 내외륜의 축방향 waviness이며 l , Z , ω_c , ω_o 그리고 i 는 각각 waviness의 차수, 볼의 개수, 케이지, 외륜 그리고 내륜의 회전속도이다. 그리고 A_{ol} , A_{il} , B_{ol} , B_{il} 과 α_{ol} , α_{il} , β_{ol} , β_{il} 는 각각 j번째 볼과 접촉하는 내외륜 waviness의 진폭과 위상각이다. 회전체의 운동방



(a)



(b)

그림 6 두 볼 베어링에 의해 지지된 회전계⁽⁵⁾

특집 베어링

정식은 그 질량중심에 관하여 표현할 수 있으므로, 그림 6에서와 같이 케도륜에 대한 j 번째 볼이 위치한 내외륜 곡률반경중심의 위치벡터를 각각 정의할 수 있고, 양 위치벡터의 반경방향 및 축방향 성분에 식 (1)~(4)를 적용할 수 있다.

그림 7은 j 번째 볼의 waviness를 표현한 것으로, 케도륜과 볼에 존재하는 waviness진폭의 차이에 의해 계산되는데, 내륜에 접하는 볼 waviness의 위상이 외륜과 접하는 볼 waviness보다 180° 앞서는 것을 고려하면 볼에 작용하는 waviness는 아래와 같이 정의된다.^(4,5)

$$u_j = \sum_{i=1}^Q C_{ji} [\cos(\omega_b t + \gamma_{ji}) + \cos\{\omega_b(t + \frac{\pi}{\omega_b}) + \gamma_{ji}\}] \quad (5)$$

여기서, γ , ω_b , C_{ji} 는 볼 waviness의 초기위상각, 볼의 자전속도, 그리고 l 차 볼 waviness의 진폭을 각각 의미한다. 그리고 베어링의 회전에 의해 발생하는 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트에 의한 효과를 고려하면 내륜과 외륜에 작용하는 waviness w_{ij} 와 w_{oj} 는 각각 다음과 같이 정

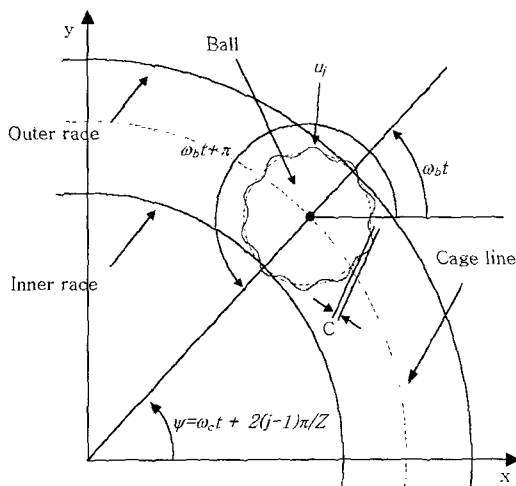


그림 7 볼 waviness 모델⁽⁵⁾

의할 수 있다.⁽⁹⁾

$$w_{ij} = \sum_{i=1}^Q C_{ji} [\cos(l\omega_b t + \gamma_{ji})] \quad (6)$$

$$w_{oj} = \sum_{i=1}^Q C_{ji} [\cos\{\omega_b(t + \frac{\pi}{\omega_b}) + \gamma_{ji}\}] \quad (7)$$

식 (5)와 같이 정의된 볼의 waviness는 볼에서 발생하는 탄성변형과 변형이 발생하기 전의 내외륜 곡률반경중심간의 거리와의 관계식에 적용시킬 수 있다.⁽²⁻⁴⁾ 그리고 식 (6), (7)에 정의된 볼 waviness는 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트가 존재하는 경우, 내외륜과 볼 사이에 존재하는 기하학적 구속조건과 힘평형조건에 의한 비선형 연립방정식에 적용시킬 수 있다.⁽⁶⁾ 이와 같이 케도륜과 볼에 waviness를 적용하여 기존의 볼 베어링 해석이론을 사용하면 기하학적 결함이 존재하는 경우에 대한 각 볼의 탄성변형이 계산되고, 이 값을 Hertz의 접촉이론에 적용하면 각 볼에서 발생한 접촉력이 계산된다.⁽⁷⁾ 각 볼에서 발생하는 접촉력의 합은 waviness가 존재하는 볼 베어링에서 발생하는 접촉력이 되므로, 각 방향성분으로 나누어 나타낼 수 있고, 이는 회전계의 운동방정식에 작용하는 외력항으로서 다음과 같이 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + F_x &= 0 \\ m\ddot{y} + F_y &= 0 \\ m\ddot{z} + F_z &= 0 \\ I_z \ddot{\theta}_x + I_r \Omega \dot{\theta}_y + M_x &= 0 \\ I_z \ddot{\theta}_y - I_r \Omega \dot{\theta}_x + M_y &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 m , I_r , I_z , Ω 는 각각 회전체의 질량, 반경축 질량관성모멘트, 질량 극관성 모멘트, 그리고 회전축의 회전각속도를 각각 의미한다.

3.2 수치해석 과정

그림 8은 waviness에 의한 회전체의 진동을 해석하는 과정을 나타낸 것이다. 예압에 의해 각 볼에서 발생하는 초기 접촉각과 탄성변형을 계산하고, 회전체의 질량중심을 기준으로 정의된 궤도론 곡률반경중심의 위치벡터에 내외륜의 waviness를 적용하였다. 그리고 볼과 궤도론의 기하학적 구속 조건에 볼 waviness를 적용하였다. Waviness의 영향이 고려된 기하학적 구속조건과 힘 평형방정식을 Newton-Raphson반복법에 의해 연립해서 풀면, 회전시 각 볼의 위치와 탄성변형량을 계산할 수 있다. 그리고 각 접촉력의 합을 취하면, 회전체에 작용하는 힘과 모멘트가 계산되고 이를 회전체의 운동방정식에 적용하여 Runge-Kutta방법 등으로 수치적분 할 수 있다.

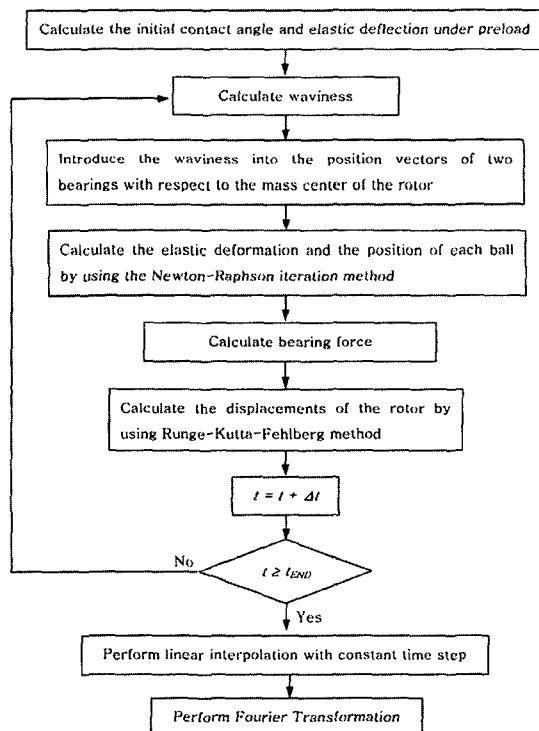


그림 8 Waviness에 의한 회전체 진동해석 흐름도⁽⁹⁾

3.3 Waviness의 형태 및 종류에 따른 진동해석 결과

(1) 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트를 고려한 베어링 진동

볼 베어링의 waviness에 의한 베어링 접촉력은 기본주파수 뿐만 아니라, 하중-변형간의 비선형 특성에 의한 조화성분과 사이드밴드 성분을 가진다.

표 2와 3은 각각 기존의 연구에서 밝혀진 waviness차수에 따른 반경방향 및 축방향 진동변

표 2 Waviness에 의한 주 진동주파수 ($i \geq 1$: 정수, Z : 볼 개수, f : 내륜회전 주파수, f_c : 케이지 회전주파수, f_b : 볼 자전 주파수)⁽⁴⁾

Type of waviness	Waviness order	Principal frequencies[Hz]	Type of motion
Outer race	$l = iZ$	iZf_c	Axial Radial
	$l = iZ \pm 1$	iZf_c	
Inner race	$l = 1$	f	Radial
	$l = iZ$	$iZ(f - f_c)$	Axial
	$l = iZ \pm 1$	$iZ(f - f_c)f$	Radial
Ball	Oversize	f_c	Radial
	$l = 2i$	$2if_b$	Axial
	$l = 2i$	$2if_b \pm f_c$	Radial

표 3 동일 방향 waviness 간의 간섭에 의한 사이드밴드 주파수⁽³⁾

Interacting surfaces	Sideband frequencies[Hz]	
	Axial vibration	Radial vibration
Outer race Ball oversize	$iZf_c \pm if_c$	$iZf_c \pm if_c$
Outer race Ball	$iZf_c \pm j2f_b$	$iZf_c \pm 2f_b$
Outer race Inner race	$iZf_c \pm if$	$iZf_c \pm if$
Inner race Ball oversize	$iZ(f - f_c) + if_c$	$iZ(f - f_c) \pm f \pm if_c$
Inner race Ball	$iZ(f - f_c) \pm 2if_b$	$iZ(f - f_c) \pm f \pm 2if_b$

특집 베어링

위의 기본주파수와 waviness간의 상호작용에 의한 sideband 주파수를 나타낸 것이다. 그리고 표 4는 축방향과 반경방향 waviness의 상호작용에 의해 추가적으로 발생하는 사이드밴드 주파수를 나타낸 것이다. 표 2, 3 그리고 4로부터 베어링 진동의 기본주파수와 사이드밴드 주파수는 볼의 개수, 내륜의 회전주파수, 케이지 회전주파수 그리고 볼의 자전주파수의 선형조합으로 표현되는 것을 알 수 있다.

그림 9는 볼의 원심력(F_{Gj})과 자이로스코픽 효과(M_{Gj})의 영향을 고려한 경우에 대하여 볼의 자전주파수와 케이지의 회전주파수를 회전속도의

표 4 축방향 및 반경방향 waviness의 간섭에 의한 반경방향 사이드 밴드 주파수⁽⁵⁾

Interacting surfaces	Waviness order	Sideband frequencies[Hz]
Outer race Ball	$l = iZ$ $l = 2i$	$iZf_c \pm 2jf_b \pm f_c$
Outer race Inner race	$l = iZ$ $l = iZ \pm 1$	$iZf_c \pm jZ(f - f_c) \pm f$
Outer race Inner race	$l = iZ \pm 1$ $l = iZ$	$iZf_c \pm jZ(f - f_c)$
Inner race Ball oversize	$l = iZ$ 1	$iZ(f - f_c) \pm jf_c$
Inner race Ball	$l = iZ$ $l = 2i$	$iZ(f - f_c) \pm 2jf_b \pm f_c$

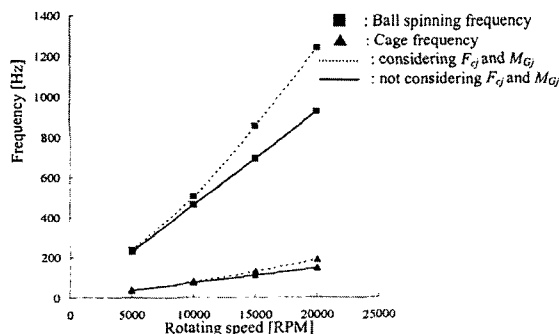
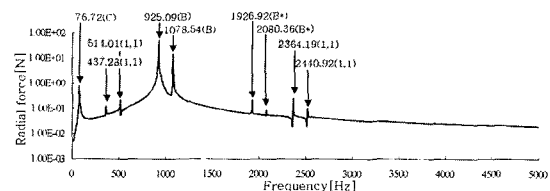


그림 9 회전속도변화에 따른 볼 자전주파수 및 케이지 회전주파수⁽⁹⁾

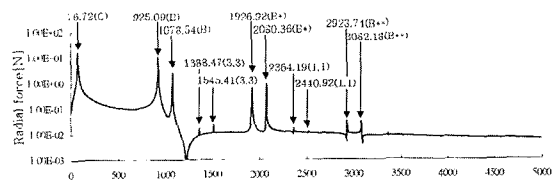
증가에 따라 계산한 결과이다. F_{Gj} 와 M_{Gj} 를 고려하지 않은 경우와 비교하여 그 주파수가 상당히 달라짐을 알 수 있다. 이는 F_{Gj} 와 M_{Gj} 의 영향으로 내륜의 접촉각은 증가하게 되고, 외륜의 접촉각과 볼의 자전축과 베어링 회전축이 이루는 각도는 감소하게 되므로, 케이지 회전주파수 f_c 와 볼의 자전주파수 f_b 가 F_{Gj} 와 M_{Gj} 의 영향을 고려하지 않은 경우에 비하여 증가하기 때문이다. 따라서 f_c 와 f_b 의 함수로 표현되는 표 2, 3의 진동 주파수 또한 변화한다.⁽⁹⁾

(2) 회전체에 의해 구속된 두 볼 베어링 waviness 간의 간섭에 의한 베어링 진동

그림 10은 볼의 개수가 16개인 두개의 볼 베어링으로 지지된 회전계에서 좌측 베어링에 차수가 16인 내륜 waviness가 존재하며, 우측 베어링에는 차수가 2인 볼 waviness가 존재하는 경우에 대하여, 발생하는 접촉력을 계산한 결과로서 반경방향 성분만을 예로서 표시한 것이다. 여기서 C. B. I.



(a) 좌측 베어링



(b) 우측 베어링

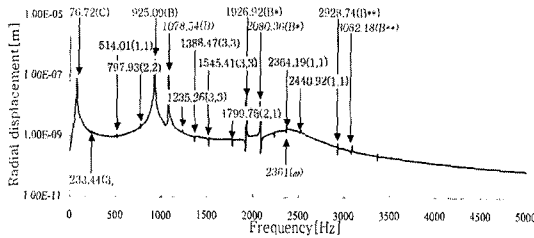
그림 10 두 볼 베어링으로 지지된 회전계에서 좌측 베어링에 차수 2인 볼 waviness가 존재하고 우측 베어링에 차수 16인 내륜 waviness가 존재하는 경우 회전체에 작용하는 반경방향 접촉력⁽¹⁰⁾

*. (i, j) 그리고 (i, j) 는 케이지 회전주파수, 볼 waviness에 의한 기본주파수, 내륜 waviness에 의한 기본주파수, 조화성분 그리고 표 3, 4의 사이드밴드 주파수를 각각 의미한다.

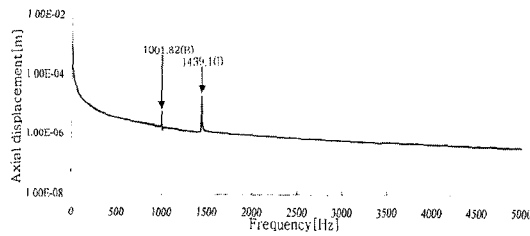
내륜 waviness차수가 볼의 개수와 일치하는 경우⁽¹⁶⁾는 반경방향 진동을 발생하지 않으므로 볼 waviness에 의한 진동만이 발생하게 된다. 따라서 우측베어링에서는 볼 waviness에 의한 반경방향

진동의 기본주파수와 그 조화성분이 크게 나타나며, 반경과 축방향 진동성분의 상호작용에 의한 표 4의 사이드밴드 주파수가 발생하게 된다. 한편 좌측베어링의 경우, 반경방향 진동을 유발하는 waviness가 존재하지 않지만, 우측베어링에 존재하는 볼 waviness의 영향으로 볼 waviness에 의한 반경방향 진동이 발생하는 것을 볼 수 있다. 기존의 연구로부터, 사이드밴드 주파수는 단일 볼 베어링의 구성요소들이 가지는 waviness의 상호작용 때문에 발생하는 것으로 알려져 있으나, 강제 회전체에 의해 구속된 두 베어링의 구성요소 존재하는 waviness 또한 서로 상호작용을 하여 사이드밴드 주파수가 발생함을 알 수 있다.

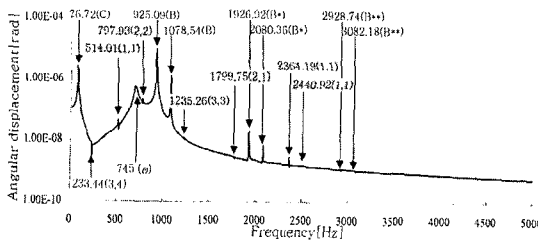
그림 11은 좌측 베어링에 차수가 볼의 개수와 같은 16의 내륜 waviness가 존재하며, 우측 베어링에는 차수가 2인 볼 waviness가 존재하는 경우, 좌우측 베어링의 힘과 모멘트의 합력에 의해 발생하는 회전체의 진동변위를 계산하여 주파수 변환한 결과이다. 그림 11(a)와 (c)의 반경방향과 각운동 방향의 진동변위는 볼 waviness에 의한 진동성분이 발생함을 확인할 수 있지만, 그림 8(c)의 축방향 진동에는 볼과 내륜 waviness에 의한 기본진동 주파수만이 발생함을 볼 수 있다. 이는 두 베어링의 접촉각이 반대방향이므로 축방향 접촉력이 서로 상쇄되기 때문이다. 그리고 반경방향 및 전진 각운동 방향(forward rocking)의 고유진동수와 베어링 가진력과의 공진이 발생하는 것을 확인할 수 있다. (745 Hz and 2361 Hz)



(a)



(b)



(c)

그림 11 두 볼 베어링으로 지지도니 회전계에서 좌측베어링에 차수 2인 볼 waviness가 존재하고 우측 베어링에 차수 16인 내륜 waviness가 존재하는 경우 발생하는 회전체의 진동변위⁽¹⁰⁾

4. 볼 베어링 결함에 따른 안정성 해석

4.1 Waviness에 의한 강성계수 해석방법

그림 5와 같이 강제 회전체를 지지하는 두개의 베어링에 의한 강성계수는 볼 베어링 구름요소간에 발생하는 비선형 접촉력을 회전체의 질량중심으로부터 정의된 위치벡터 $\{u\} = \{x, y, z, \theta_x,$

특집 베어링

$\theta_y\}$ 로 편미분 함으로써 계산할 수 있다. 두 베어링의 반경방향 및 축방향 waviness간 위상차를 각각 0° 와 180° 로 두고, 회전체의 질량중심과 베어링의 스펙중심은 서로 일치한다고 가정하면, 5×5 강성행렬의 비대각성분은 모두 소멸되고 다음과 같이 대각성분만이 남게된다.^(9, 11)

$$\begin{aligned}
 k_{xx} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} = \sum_{h=1}^{N_b} \left[\sum_{j=1}^Z \left(1.5K_j \delta_y^{0.5} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x} \cos \alpha_{ij} + K_j \delta_y^{1.5} \frac{\partial \cos \alpha_{ij}}{\partial x} + \frac{\lambda_y M_{Gj}}{D} \frac{\partial \sin \alpha_{ij}}{\partial x} \right) \cos \psi_j \right] \\
 k_{yy} &= \frac{\partial F_y}{\partial y} = \sum_{h=1}^{N_b} \left[\sum_{j=1}^Z \left(1.5K_j \delta_y^{0.5} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial y} \cos \alpha_{ij} + K_j \delta_y^{1.5} \frac{\partial \cos \alpha_{ij}}{\partial y} + \frac{\lambda_y M_{Gj}}{D} \frac{\partial \sin \alpha_{ij}}{\partial y} \right) \sin \psi_j \right] \\
 k_{zz} &= \frac{\partial F_z}{\partial z} = \sum_{h=1}^{N_b} \left[\sum_{j=1}^Z \left(1.5K_j \delta_y^{0.5} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial z} \sin \alpha_{ij} + K_j \delta_y^{1.5} \frac{\partial \sin \alpha_{ij}}{\partial z} - \frac{\lambda_y M_{Gj}}{D} \frac{\partial \cos \alpha_{ij}}{\partial z} \right) \right] \\
 k_{\theta_x} &= \frac{\partial M_x}{\partial \theta_x} = \sum_{h=1}^{N_b} \left[\sum_{j=1}^Z \left(1.5K_j \delta_y^{0.5} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial \theta_x} \tau_{ij} + K_j \delta_y^{1.5} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \theta_x} - \frac{\lambda_y M_{Gj}}{D} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta_x} \right) \sin \psi_j \right] \\
 k_{\theta_y} &= \frac{\partial M_y}{\partial \theta_y} = - \sum_{h=1}^{N_b} \left[\sum_{j=1}^Z \left(1.5K_j \delta_y^{0.5} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial \theta_y} \tau_{ij} + K_j \delta_y^{1.5} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \theta_y} - \frac{\lambda_y M_{Gj}}{D} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta_y} \right) \cos \psi_j \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

여기서 N_B , Z , ψ_j , δ_{ij} , K_{ij} 그리고 M_{Gj} 는 각각 볼 베어링의 개수, 볼의 개수, j 번째 볼의 편향각, 접촉변형, 하중-변형상수 그리고 볼의 자이로스코픽 모멘트이다.

그림 12는 내륜의 waviness가 존재하는 두개의 베어링으로 지지된 회전체의 경우, 시간에 따른 각 방향 강성계수의 변화를 나타낸 것이다. 강성계수의 변화주파수는 표 2의 주파수와 일치한다.

4.2 Waviness에 의한 계수가진계의 안정성

두 베어링의 반경방향 및 축방향 waviness간 위상차를 각각 0° 와 180° 이며, 회전체의 질량중심과 베어링의 스펙중심은 서로 일치한다고 가정하였으므로 회전체의 병진운동은 서로 연성되지 않으며 각운동은 자이로스코픽 효과에 의해 연성된다. 따라서 회전체의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{x} + k_{xx}(t)x = 0$$

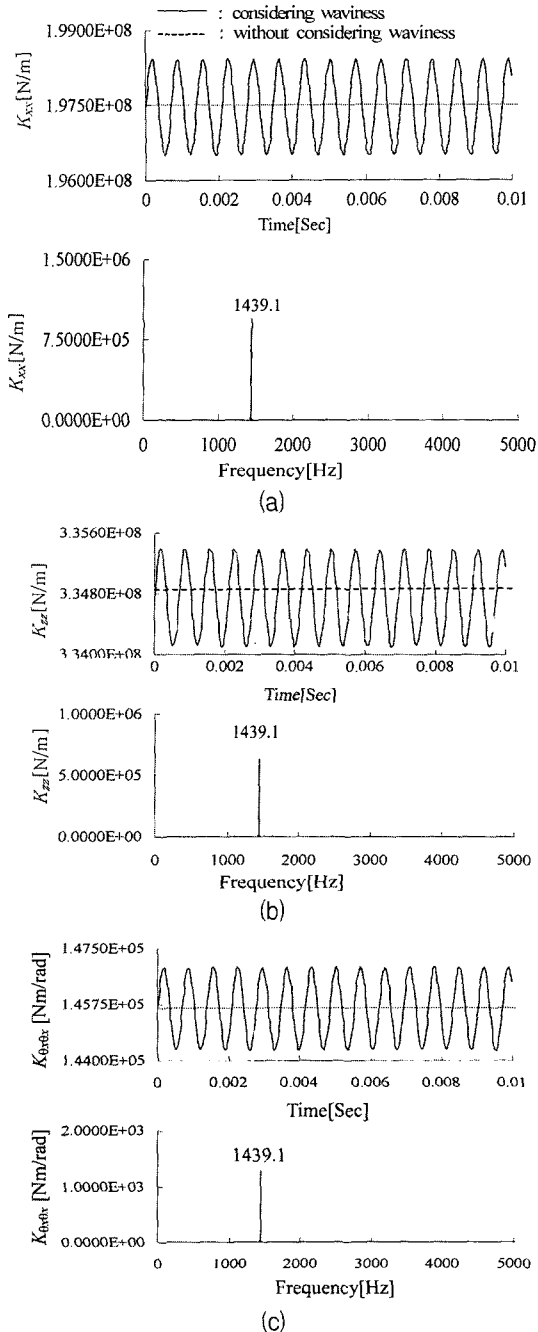


그림 12 좌우 베어링의 내륜에 차수 16인 waviness가 각각 존재하고 그 반경방향 위상차가 180° 인 경우의 회전체 따른 회전체 지지강성의 변화⁽¹¹⁾

$$\begin{aligned}
 m\ddot{y} + k_{yy}(t)y &= 0 \\
 m\ddot{z} + k_{zz}(t)z &= 0 \\
 I_z \ddot{\theta}_x + I_r \Omega \dot{\theta}_y + k_{\theta, \theta_x}(t)\theta_x &= 0 \\
 I_z \ddot{\theta}_y - I_r \Omega \dot{\theta}_x + k_{\theta, \theta_y}(t)\theta_y &= 0
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

이 식으로부터 비연성화된 병진운동과 연성된 작운동에 대한 안정성 해석이 가능하다.

(1) 병진운동에 대한 안정성

비연성화된 병진운동의 운동방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\ddot{p}(t) + \omega_t^2 (1 + \varepsilon \cos \chi t) p(t) = 0 \tag{11}$$

여기서 $p(t)$ 는 병진운동의 일반좌표계를 의미하며, ω_t 와 ε 는 각각 회전계의 병진운동방향 고유진동수, 강성계수의 평균값에 대한 시간변화량의 비율로서 각각 다음 식으로 표현된다.

$$\varepsilon = \frac{k}{K}, \quad \omega_t = \sqrt{\frac{K}{m}} \tag{12}$$

식 (11)의 계수가진주파수는 χ 이므로 방정식의 해는 주기 $T = 2\pi/\chi$ 을 가지는 주기함수라고 할 수 있다. 따라서 $p(t)$ 는 $p(t+T) = \sigma p(t)$ 의 성질을 가진다.⁽¹²⁾

여기서 σ 는 임의의 상수이다. 즉, $|\sigma| > 1$ 인 경우 $p(t)$ 는 시간의 경과에 따라 불안정하게 되고, $|\sigma| < 1$ 인 경우의 $p(t)$ 는 안정하게 되며, $|\sigma| = 1$ 인 경우는 시간의 경과에 따라 동일한 진폭을 유지하므로 임계안정특성을 가지게 된다. 따라서, 안정과 불안정의 경계는 $\sigma = \pm 1$ 인 조건에서 구해지는데, $\sigma = +1$ 인 경우 $p(t)$ 의 주기는 T 가 되고 $\sigma = -1$ 인 경우의 주기는 $2T$ 가 된다. 그런데 $\sigma = -1$ 인 경우의 특성방정식이 가지는 고유치는 $\sigma = +1$ 인 경우의 고유치를 모두 포함하게 된다. $2T$ 의 주기를 가지는 주기해 $p(t)$ 는

$p(t+2T) = p(t)$ 의 특성을 갖는다. 여기서 $p(t)$ 는 푸리에(Fourier) 급수로 다음과 같이 가정한다.

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n \frac{\chi t}{2} + b_n \sin n \frac{\chi t}{2} \right] \tag{13}$$

이 식과 이 식을 미분한 가속도 항을 운동방정식에 대입하고, $\sin n\chi t$ 와 $\cos n\chi t$ 에 관한 성분 그리고 상수에 대하여 정리한 후 각 항을 0으로 두면, 푸리에 계수 a_n 와 b_n 에 대한 선형 대수연립방정식을 얻을 수 있다.⁽¹¹⁾ 이 식을 N 차 항까지 전개하고 푸리에 계수에 대하여 정리하면, 다음과 같은 행렬방정식이 구해진다.

$$[P]\{U\} = 0 \tag{14}$$

여기서 $\{U\} = \{a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_N, \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_N\}^T$ 이며, 행렬 $[P]$ 는 다음 무차원수에 의해 표현할 수 있다.

$$\rho = \frac{\omega_t^2}{\chi^2}, \quad e = \frac{\omega_t^2}{\chi^2} \varepsilon \tag{15}$$

식 (14)가 유리해(non-trivial solution)를 가지기 위해서는 $[P]$ 의 행렬식이 0이 되어야 한다. 그리고 행렬 $[P]$ 는 그 대각성분에만 ρ 를 포함하게 되므로, $[P]$ 는 다음식과 같은 ρ 의 고유치 문제로 표현할 수 있다.^(12, 13)

$$[P]_{\rho=0} + \rho [I] = 0 \tag{16}$$

여기서 $[P]_{\rho=0}$ 는 $[P]$ 에서 ρ 를 제외한 행렬이며, $[I]$ 는 단위행렬이다. 식 (23)이 힐(Hill)의 무한행렬식의 형태가 되므로, 다음의 조건에 의해 불안정 영역이 결정된다.⁽¹³⁾

$$|P| < 0 \tag{17}$$

특집 베어링

그림 13은 그 계산의 예로써, e 의 변화에 대하여 행렬 $[P]$ 의 고유치 ρ 를 계산한 결과이다. 불안정 영역은 x 축상에 존재하는 $\rho = i^2/4$ ($i=1,2,3,\dots$)인 지점으로 부터 발생하는 것을 볼 수 있는데, 이 지점은 e 가 0이 되는 경우, 행렬 $[P]$ 의 고유치가 된다. $\rho=1$ 이고 $e=0$ 인 경우 회전체의 고유진동수와 강성계수의 계수가진 주파수가 일치하게 되므로 공진이 발생하게 되며, 운동방정식의 해를 계수가진 주파수($n\chi/2$, $n=1,2,\dots$)와 푸리에 계수에 의한 다항식으로 가정하였기 때문에 $\rho = i^2/4$ ($i=1,3,4,5,\dots$), $e=0$ 인 경우 또한 공진이 발생한다.⁽¹²⁾

그림 14는 내륜과 볼에 waviness가 존재하는 경우에 대하여 안정성 해석을 수행하고, 회전속도의 변화에 따른 강성계수변화를 계산하여 안정선도와 비교한 결과이다. 여기서 y 축은 대수척도로 표현하였다. 여기서 강성계수가 변화하는 계수가진 주파수는 차수가 15와 16인 내륜 waviness의 경우 각각 $(32(f-f_c)) - 2f$ 와 $(16(f-f_c))$ 이며, 차수가 2인 볼 waviness의 경우는 $(2f_b \pm 2f_c)$ 와 같이 발생하는 것을 확인할 수 있다. 이 경우 모든 특성곡선이 회전계의 안정성 영역내에 존재하므로 waviness의 영향으로 전체 회전계가 불안정해 지지는 않을 것이란 것을 예상할 수 있다.

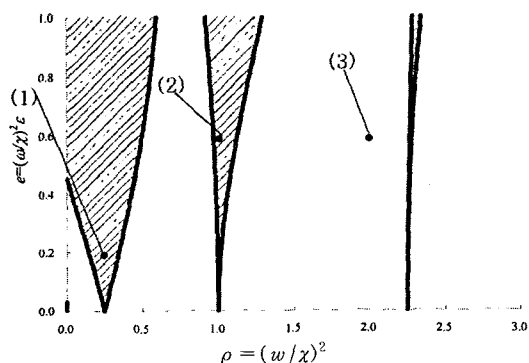


그림 13 반경방향 진동에 대한 안정성 선도
(□: stable region, ▨: unstable region)⁽¹¹⁾

(2) 각운동에 대한 안정성

각운동에 대한 운동방정식은 다음과 같이 회전체의 자이로스코픽 효과에 의해 연성된 방정식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_x + \Omega \xi \dot{\theta}_y + \omega_a^2 (1 + \epsilon \cos \chi t) \theta_x &= 0 \\ \ddot{\theta}_y - \Omega \xi \dot{\theta}_x + \omega_a^2 (1 - \epsilon \cos \chi t) \theta_y &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 ω_a 와 ξ 는 회전체의 각운동 방향 진동의 고유진동수 그리고 극관성 모멘트에 대한 반경방향 관성모멘트의 비율을 의미하며 각각 다음의 식으로 표현된다.

$$\omega_a = \sqrt{\frac{K}{I_x}}, \quad \xi = \frac{I_y}{I_x} \quad (19)$$

식 (18)의 θ_x 와 θ_y 는 다음과 같은 푸리에 급수로 각각 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \theta_x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n \frac{\chi t}{2} + b_n \sin n \frac{\chi t}{2} \right] \\ \theta_y(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos n \frac{\chi t}{2} + d_n \sin n \frac{\chi t}{2} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

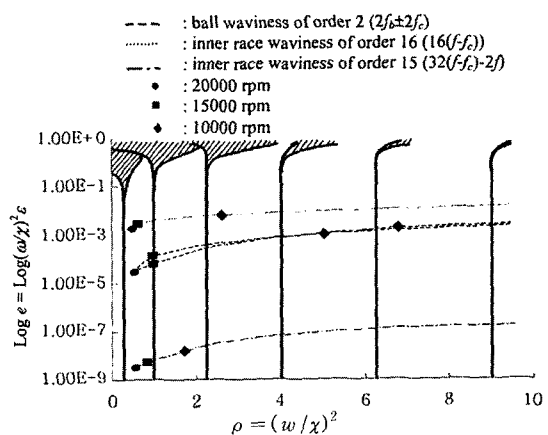


그림 14 반경방향 진동에 대한 안정성곡선과 베어링 특성 곡선의 비교선도(□: stable region, ▨: unstable region)⁽¹¹⁾

식 (20)을 미분하여 식 (18)에 대입하고 푸리에 계수의 항으로 정리하면 병진운동의 경우와 같이 안정성 해석을 수행할 수 있다. 이 과정에서 병진운동과는 달리 회전체의 자이로스코픽 효과에 의한 무차원 수가 추가되는데, 다음과 같다.

$$\mu = \frac{\Omega \xi}{\chi} \quad (21)$$

이 글에서는 해석의 예로서 μ 가 0.05와 0.1인

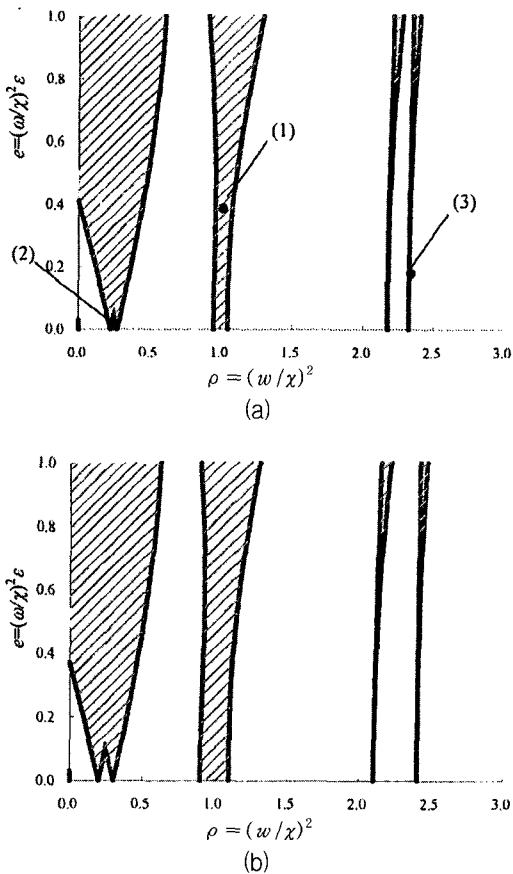


그림 15 변화하는 μ 에 따른 각운동에 대한 안정성 선도 : (a) $\mu=0.05$, (b) $\mu=0.1$
 (□ : stable region, ▨ : unstable region)⁽¹¹⁾

경우에 대하여 그림 15에 나타내었다. 병진운동의 경우와 같이, x 축상의 $\rho = i^2/4$ ($i=1,2,3,\dots$)지점을 기준으로 불안정 영역이 존재함을 확인할 수 있다. 그러나 무차원수 μ 의 영향으로 병진운동의 경우와는 달리 $\rho=1$ 지점을 기준으로 넓은 공진영역이 존재하는 것을 확인할 수 있으며, $\rho=0.25, 2.25$ 에서는 이 지점을 기준으로 두개의 불안정 영역이 나뉘어 지게 된다. 그리고 μ 의 증가에 따라 불안정성이 증가하게 된다.⁽¹³⁾

그림 16은 그림 14와 같이 내륜과 볼에 waviness가 존재하는 경우에 대하여 안정성 해석을 수행하고, 회전속도의 변화에 따른 강성계수변화를 계산하여 안정선도와 비교한 결과이다. 특성선도의 대부분은 안정영역에 존재하지만, 모든 특성선도는 $\rho=1$ 지점의 넓은 불안정 영역을 통과하는 것을 확인할 수 있고, 이 영역에서 회전체는 불안정한 특성을 가질 것이라 예측할 수 있다.

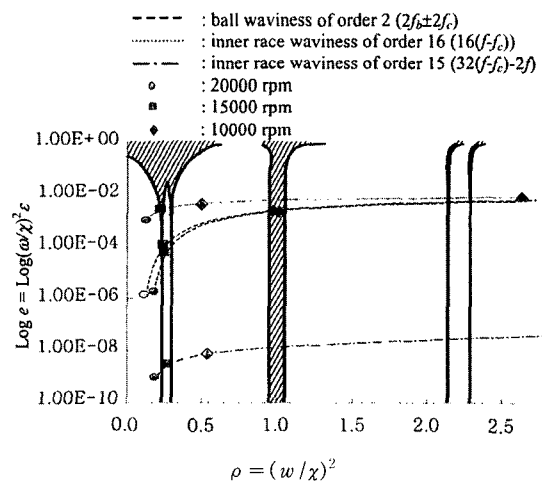


그림 16 각 운동에 대한 안정성 곡선과 베어링 특성곡선의 비교선도 (□ : stable region, ▨ : unstable region)⁽¹¹⁾

5. 맺 음 말

이 글에서는 회전기기를 지지하는 볼 베어링에 의해 발생하는 다양한 진동 및 소음원의 형태 및 특성에 대해서 간략히 살펴보고, 볼 베어링에 존재하는 기하학적 결함에 의한 진동해석을 위한 해석적 모델과 기하학적 결함에 의한 회전체의 안정성해석기법을 간략히 소개하였다. 볼 베어링에 의해 회전체에서 발생하는 소음진동의 저감은 회전체의 정밀도를 높이고 안정성을 보장하기 위해 필수적이라고 할 수 있다. 따라서, 발생하는 소음진동의 주파수와 그 원인을 정확히 파악함과 동시에 회전체의 설계시 이를 고려하는 것은 매우 중요하다고 할 수 있다. 이에 관하여 보다 실질적이고 정확한 설계기술을 확보하기 위해서는 각 베어링 구성요소의 탄성과 윤활유에 의한 효과를 고려한 해석모델을 개발하고, 진동신호를 분석하여 베어링 구성요소의 기하학적 결함 등을 파악할 수 있는 신호처리 기술 등이 시급히 요구된다.

참 고 문 헌

(1) Tatsunobu, M. and Banada, N., 1999, "Sound and Vibration in Rolling Bearings," No. 6, NSK.
 (2) Wardle, F. P., 1988a, "Vibration Forces Produced by Waviness of the Rolling Surfaces of Thrust Loaded Ball Bearing, Part 1 : Theory," Proc. IMechE, Vol. 202, No. C5, pp. 305~312.
 (3) Wardle, F. P., 1988b, "Vibration Forces Produced by Waviness of the Rolling Surfaces of Thrust Loaded Ball Bearing, Part 2 : Experimental Validation," Proc. IMechE, Vol. 202, No. C5, pp. 313~319.
 (4) Yhland, E., 1992, "A Linear Theory of

Vibrations Caused by Ball Bearings with Form Errors Operating at Moderate Speed." ASME, J. of Tribology, Vol. 114, pp. 348~359.

(5) Jang, G. H. and Jeong, S. W., 2002, "Nonlinear Excitation Model of Ball Bearing Waviness in a Rigid Rotor Supported by Two or More Ball Bearings Considering Five Degrees of Freedom," ASME, J. of Tribology, Jan., Vol. 124, pp. 82~90.

(6) Jones, A. B., 1960, "A General Theory of Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings Under Arbitrary Load and Speed Conditions," ASME J. Basic Eng., Vol. 82, pp. 309~320.

(7) Harris, T. A., 1991, Rolling Bearing Analysis, 3rd Ed., John Wiley & Sons, INC.

(8) Jang, G. H. and Jeong, S. W., 2003, "Stability Analysis of a Rotating System Due to the Effect of Ball Bearing Waviness," ASME, J. of Tribology, Jan, Vol. 125, pp. 91~101.

(9) 정성원, 장건희, 2001, "구름요소의 waviness를 고려한 볼 베어링 해석이론," 한국소음진동공학회논문집, 제 11 권, 제 7 호, pp. 275~286.

(10) 정성원, 장건희, 2002, "Waviness가 있는 볼 베어링으로 지지된 회전계의 동특성 해석(1):진동해석," 대한기계학회논문집A, 제 26 권, 제 12 호, pp. 2636~2646.

(11) 정성원, 장건희, 2002, "Waviness가 있는 볼 베어링으로 지지된 회전계의 동특성 해석(2):안정성 해석," 대한기계학회논문집A, 제 26 권, 제 12 호, pp. 2647~2655.

(12) Newland, D. E., 1989, Mechanical Vibration Analysis and Computation, Longman Scientific and Technical.

(13) Hayashi, C., 1985, Nonlinear Oscillations in Physical Systems, Princeton, New Jersey: Princeton University Press.