韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2003, 5. 제 42권, 제 2호, 177-191.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2003, Vol. 42, No. 2, 177-191.

컴퓨터와 수학교육

조 한 혁 (서울대학교)

기술 정보화 사회의 도래와 함께 컴퓨터 등의 기술공학적 도구와 수학교육의 관계에 대한 여러 논의가 있어 왔다. 대체로 기존의 논의는 컴퓨터 등을 수학교육을 위한 멀티미디어 자료 제공자 또는 수단으로 부각시켜 왔으나, 수학 마이크로월드(MicroWorld) 등의 연구는 웹과 컴퓨터가 수학교육의 동반자로 성장할 수도 있음을 보여주고 있다. 이와 같은 동반자의 입장에서 보면 '수학교육과 컴퓨터' 또는 '수학교육공학' 이라는 호칭보다는 외국에서와 같이 컴퓨터와 수학교육(Computers and Mathematics Education)이라는 호칭이 이 분야의 연구에 더 어울릴 듯 하다.

종이가 없었던 시대의 수학교육과 종이가 있는 환경의 수학교육을 비교할 수 있듯이, 정적인 지필 환경에서의 지금까지의 수학교육을 컴퓨터의 동적인 환경에서 새롭게 이해할 필요가 있다. 이러한 이해를 위해서 수학 마이크로월드와 수학교육과정, 동적 환경을 통한 수학 교수-학습, 동적인 함수적 사고를 통한 문제중심 학습, 그리고 역동적 interactive한 환경을 통한 진단처방 학습 등을 살펴볼 필요가 있다. 이제 한국수학교육학회지 등에 발표된 국내 연구를 바탕으로, 혁명적이라고도 할 수 있는 동적인 마이크로월드 환경을 중심으로 컴퓨터와 수학교육을 살펴보기로 한다.

1. 컴퓨터와 수학교육 새천년운동

1901년 영국의 페리(Perry)는 소수의 엘리트들에게 유클리드 원론과 같은 학문적 수학을 전수시키려는 당시의 수학교육을 비판하면서, 산업혁명의 발전으로 나타난 시대적 사회적 상황에 맞게 일반인을 위한 실용적이고 실험을 중시하는 수학교육으로의 개혁을 주장하였다. 미국에서도 1902년 무어(Moore)는 학교수학에서 수학을 구체적인 사실과 관련지을 수 있도록 수학 교수학습의 방법으로 수학실험을 주장하였고, 독일의 클라인(Klein)은 수학교육의 개혁을 위해 1905년 새로운 메란(Meran) 교육과정을 제정하며 20세기 초의 수학교육 근대화 운동을 주도하였다.

이 후, 미국은 소련의 1957년 인공위성 발사에 자극받아 세계대전 후의 수학과 과학기술의 급격한 발전에 대응하기 위한 수학현대화 운동을 주도하게 된다. 수학현대화 운동에서는 현대수학의 내용과 방법을 조기에 도입시키고, 대수적 구조와 논리적 엄밀성을 강조하고, 현대수학을 전할 수 있는 새로운 교재를 강조하였다.

그러나 무리하게 시도된 수학교육 현대화 운동의 부작용이 나타나면서 Back to Basics 운동이 일어나게 되었고, 미국의 NCTM은 1980년에 문제해결과 수학교육에서의 컴퓨터와 계산기의 도입을 강조하는 수학교육 스탠다드(Standard)의 기본 정신을 제안하기 시작하였다. 이와 같이 수학교육은 시대사회적 상황과 과학기술의 발전에 따라 변화와 적응을 시도하여 왔는데, 이제 급격한 과학기술의 발전과 정보화혁명을 맞아 20세기를 넘긴 새 천년 시대에 어떻게 수학교육 새천년운동을 시작하는지 알아보기로 한다.

새천년 정보화 시대의 도래와 함께 컴퓨터는 수학교육의 내용과 방법 등에 새로운 변화를 주고 있으며, 또한 인간이 문자와 아라비아 숫자로 수를 표현하기 시작했을 때와 같은 혁명적인 수학 표현 양식의 변화가 일어나고 있다. 한편 컴퓨터와 인터넷, 휴대폰 등의 발달로 인간은 표현과 전달을 위한 더 많은 도구를 갖게 되었고, 무엇보다도 지식을 표현하고 전달하기 위한 기술공학적 도구와 인터넷을 통해 수학을 표현하고 전달하는 새로운 시도들이 나타나고 있다.

영화 인디애나 존스에서 칼솜씨를 자랑하던 칼잡이

* 2003년 5월 투고, 2003년 5월 심사 완료
* ZDM분류 : D13, U13
* MSC2000분류 : 97C80
* 주제어 : 컴퓨터, 마이크로월드, 교육과정, 교수-학습.

가 현대의 총잡이에게 어이없이 당하는 장면을 볼 수 있다. 이 장면으로부터 고등학교 미적분에 숙달한 칼잡이 수학선생님과 미적분용 그래픽 계산기를 가진 컴퓨터 총잡이 학생의 대결을 상상할 수도 있다. 이러한 비유를 통해 컴퓨터라는 총 앞에 있는 계산 위주의 미적분 교육의 위상을 볼 수도 있을 것이다. 그렇다고 컴퓨터가 수학과 수학교육의 많은 부분을 잠식한다고 말할 수는 없다. 오히려 컴퓨터는 계산 위주의 수학교육에서 개념과 원리의 탐구와 발견 그리고 문제해결을 강조하는 바람직한 수학교육으로의 강력한 후원자가 되고 있다. 이제 이러한 배경에서 컴퓨터와 수학교육의 만남을 수학교육 과정, 수학교수학습, 문제중심 및 진단처방 수학교육의 측면에서 살펴보기로 한다.

2. 컴퓨터와 마이크로월드 수학 교육과정

기술 정보화 시대에서의 폭발적인 지식의 증가와 지식 수명의 단축, 그리고 컴퓨터의 등장은 교육이 추구하는 목표로 know what보다는 know how를 그리고 무엇보다도 정보화 tool을 통한 know with를 강조하고 있다. 이에 따라, know with의 핵심적인 정보화 도구인 컴퓨터에 대한, 컴퓨터를 위한, 그리고 컴퓨터를 통한 수학교육을 생각하지 않을 수 없다.

컴퓨터가 보편적인 도구가 아니었던 20세기의 수학 교육과정에서 흔히 로그자와 주판, 그리고 제곱근 계산 등을 볼 수 있었으나 현재에는 그렇지 않다. 컴퓨터와 계산기의 확산은 학교 수학교육과정에도 영향을 주어, 수학교육과정에서 약화시킬 내용에 대한 여러 논의를 촉발시키고 있으며, 반대로 확률과 통계 그리고 이산수학 등과 같은 내용들은 오히려 새롭게 강조되고 있다. 그 결과 우리나라의 고등학교 수학의 제7차 교육과정에 새로운 과목들이 도입되게 되었다. 이와 같이 컴퓨터의 영향으로 기존의 수학 내용이 수학교육과정에 더해지고 빼지는 일이 일어나기도 하였다. 이러한 변화에서 가장 눈에 띄는 것은 know with를 강조하는 정보화 시대에 맞는 새로운 마이크로월드 수학교육과정을 등장일 것이다.

지난 2000년간의 학교 기하교육과정은 2000년 전에 유클리드가 저술한 수학교과서 <The Elemen>의 내용과 전개방식에 바탕을 두고 있었으며, 교육방법은 유클리드가 정리한 논리적 기하 지식시스템을 전달하는 교수주의(instructionism)에 바탕을 둔 기하교육이었다. 그러나 폭발적인 지식의 증가와 지식 수명의 단축은 지식의 소유(to have) 보다 지식 만듦(to make)을 강조하게 되었고, 이는 지식 전달에 중점을 둔 종래의 가르치는 주의인 교수주의 대신에 다양한 문제를 해결하며 이를 바탕으로 새로운 지식을 구성하는 구성주의(contructionism) 학습관이 강조되게 되었고 이에 따라 수학교육과정에도 변화가 주어졌다.

이러한 배경 속에서 학습자를 백지 상태로 보고 학습자가 지식을 수동적으로 수용하는 것이라는 종래의 통념을 부정하고, 학습자의 활동으로부터 능동적인 구성활동을 통해 학습자에게 의미있도록 지식을 조직하고 구성해 나간다는 Constructivism 주의 학습관은 수학교육과정과 학습관에 시사하는 바가 매우 크다. 구성주의 학습관에서는 학습이 학습 환경 및 학습자의 선행 지식에도 의존한다는 것, 학생이 구성한 의미는 교사가 원래 의도한 것이 아닐 수도 있다는 것, 학습이 학습 환경은 물론 학습자간의 사회적인 상호작용을 통해서도 구성된다는 것 등을 강조하고 있다.

수학 학습자가 수학적 개념과 구조를 능동적으로 구성하도록 유도하기 위해 프로이덴탈(Freudental)은 수학 활동의 결과인 기성수학(ready-made mathematics)이 아닌 수학 활동이 강조되는 실행수학(acted-out mathematics) 수학교육과정을 강조하며, 이러한 입장은 그의 현실주의 수학교육 (RME: realistic mathematics education)과 수학화 경험을 제공해야 한다는 수학화 교수학습 방법론에 잘 나타나 있다. 그는 현상에서 본질에 이르도록 하는 방향을 주장하며 반대로 본질을 먼저 학습자에게 부과하는 접근방식을 반교수학적 전도라고 비판한다. 그는 원재료로서의 원초적인 현실, 즉 여러 잡음이 끼어있는 현실상황에서 비본질적인 것을 제거하면서 수학적인 본질을 찾고 조직화하는 과정을 중시하였고, 이런 그의 생각을 따른 RME 수학교육과정에 따라 수학 교과서도 만들어지게 되었다.

컴퓨터의 등장과 함께 Reality의 개념도 크게 변하고 있으며, 특별히 인공지능(AI) 연구에서 시작한 수학적 마이크로월드(MicroWorld)는 실세계의 단순화된 모형으로 거기서 학생들은 자기 수준에 맞춰 조작하고 탐구

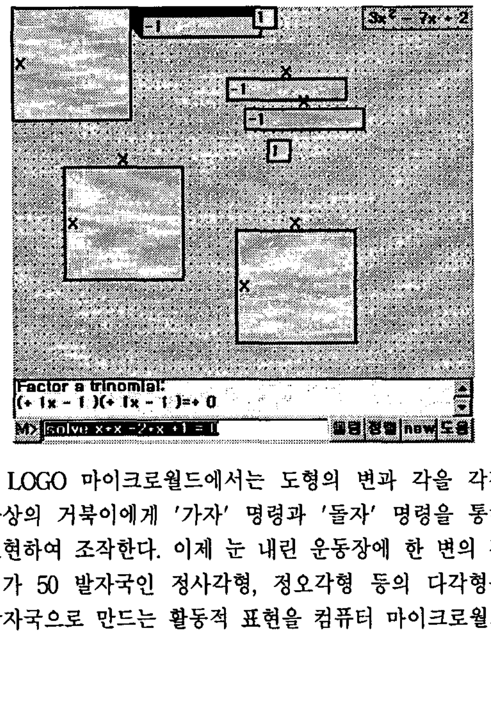
하며 그들에게 의미 있는 개념과 원리들을 이끌어낼 수 있는 수학적 가상현실(Virtual Reality) 세계를 제공하고 있으며, 인터넷의 등장으로 학습자는 웹 기반의 수학 마이크로월드를 시간적 공간적 제약을 벗어나 만날 수도 있다. 앞으로 이러한 다양한 MicroWorld의 현실까지 고려된 폭넓은 RME 연구와 구현이 필수적으로 요청되고 있다.

수학 마이크로월드가 제공하는 교수-학습 환경에는 수학적 대상물들(objects)과 대상물들의 수학적 조작(operations)의 법칙이 있는 마이크로 공간인데, 마이크로월드를 두 가지 교육적 측면에서 정의를 내릴 수 있다. 하나는 디자인적인 면에 초점을 맞춘 structural 정의이고, 다른 하나는 학생들이 어떻게 마이크로월드에서 배우게 되는가에 초점을 맞춘 functional 정의이다.

디자인적인 면에 초점을 맞춘 structural 정의에 의하면 수학 마이크로월드는 수학적 구조를 반영하기 위해 창조된 일련의 수학적 대상물을 가지고 있다. 마이크로월드의 수학적 대상물들은 하나 이상의 표현을 통해 구현되어 있는데, 이러한 표현은 상징적이고 시각적이거나 그래픽적 요소를 가지고 있다. 다음으로, 학생들이 어떻게 마이크로월드에서 배우게 되는가에 중점을 둔 functional 정의에 의하면 마이크로월드에서 예시된 대상의 성질과 작용을 이끌어 내거나 발견하려는 목적으로 대상을 다루고 조작하며 실험, 가정과 검증, 탐구가 장려된다. 마이크로월드에서 대상물과 조작은 자주 조합되어 보다 복잡한 대상이나 조작으로 된다. 이것은 LOGO 마이크로월드에서와 같이 조작의 '언어'로 구성될 때인데, 이러한 언어를 통해 조작으로부터의 에러 정정도 가능하다.

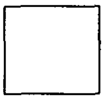
RME 교육과정을 컴퓨터 환경의 입장에서 볼 때, 마이크로월드 reality에 기반을 둔 수학교육과정도 제안할 수 있을 것이다. 구체적으로 컴퓨터를 통해 실현된 LOGO 마이크로월드나 동적기하(Dynamic Geometry) 마이크로월드 등도 RME와 같이 새로운 수학교육과정으로 제안될 수 있다는 것이다. Balacheff와 Kaput (1993)도 수학의 내용과 교육과정에 대한 기술공학의 영향은 다루어지는 주제의 특성과 그것이 활용되어지는 방법을 변화시키면서 계속해서 깊어지고 있음을 지적하면서, 이러한 영향으로 인해 교육과정의 내용뿐 아니라 전반적인 조직 또한 변화하고 있다고 주장한다.

수학교육과정으로의 수학 마이크로월드에서는 이를 구성하고 있는 수학적 object와 operation을 학습자의 탐구 능력에 맞도록 고안되고 표현되어 제시되어야 한다. 수학 내용의 교수학적 변환과 해석을 통해 이러한 수학 마이크로월드를 구현하기 위해 Bruner가 주장한 활동적(Enactive), 영상적(Iconic), 그리고 상징적(Symbolic)인 세 가지의 표상을 생각할 수 있다. Bruner는 이러한 표상을 바탕으로 "어떤 교과든지 그 지적 성격에 충실한 형태로 어떤 발달단계에 있는 어떤 아동에게도 효과적으로 가르칠 수 있다(Any subject can be taught effectively in an intellectually honest form at any child at any stage of development)."는 주장을 하게 된다. 실제로 Bruner는 이러한 그의 주장과 함께, 수학교과에서 딘즈 막대를 사용하여 8세의 아동에게 이차다항식의 인수분해를 가르치는 예를 든다. 다음은 이러한 표상과 조작을 통한 화면 구성의 예로서, 왼쪽의 것은 Bruner도 예를 들었던 인수분해 학습을 초등학생의 눈높이에서도 이해되도록 표현을 하고 또한 마우스로 표상된 것을 조작할 수도 있도록 한 것이다.



LOGO 마이크로월드에서는 도형의 변과 각을 각각 가상의 거북이에게 '가자' 명령과 '돌자' 명령을 통해 표현하여 조작한다. 이제 눈 내린 운동장에 한 변의 길이가 50 발자국인 정사각형, 정오각형 등의 다각형을 발자국으로 만드는 활동적 표현을 컴퓨터 마이크로월드

공간에서 거북이를 통해 구현하는 LOGO 마이크로월드 수학교육과정을 보자. LOGO 에서는 정사각형이라는 수학적 개념을 학교 수학의 전통적인 개념인 '네 변과 네 각이 같은 사각형'이라는 정의가 아니라 다음 표와 같이 LOGO 환경을 통한 학습 과정에서 세 가지 표현 양식을 적용하여 구현할 수 있다.

Bruner	활동적 표현	영상적 표현	상징적 표현
LOGO	앞으로 간 후에 90도 회전함을 4번 반복		반복 4 { 가자 10 ; 돌자 90 }

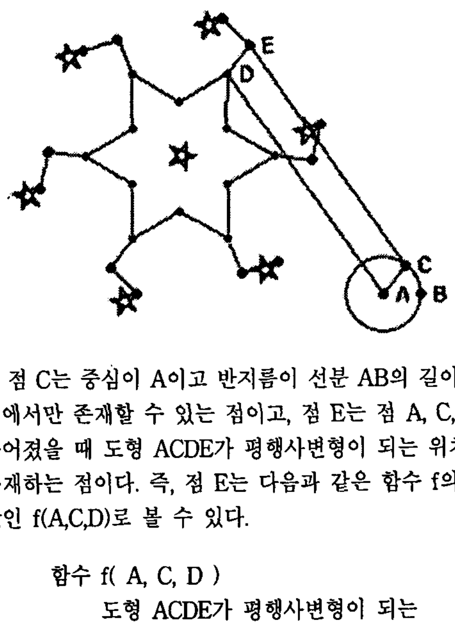
가자 x : 앞으로 x 만큼 가며 선을 긋는다.
돌자 y : 왼쪽으로 y 도 만큼 회전한다.
반복 n { 명령 } : 명령을 n 번 반복한다.

LOGO는 또한 지식의 기본 원리나 구조 자체를 세 가지 표현 양식으로 제시하여 각각의 학습자의 수준에서 학습이 가능하도록 유도하고 있다. 예를 들어, 눈 덮힌 운동장에서 다각형을 발자국으로 그리며 제 자리로 돌아오면 자신의 몸이 한 바퀴 돈다는 것을 발견하게 된다. 이 말은 외각이라는 '개념적 단어'를 사용하지는 않았지만 결국 외각의 합이 360도라는 사실의 다른 표현인 것이다.

많은 연구자들이 컴퓨터 프로그래밍, 특히 LOGO환경이 변수를 지도할 수 있는 자연스럽고 의미있는 환경을 제공해 준다고 보고했다(Hoyles & Sutherland, 1989; Tall, 1994; Sutherland, 1992). 변수는 변하는 수학적 대상의 불변적인 관계를 표현하기 위하여 변하는 양을 심리적으로 고정시키는 측면이 있다. LOGO프로그래밍에서 변수는 하나의 주소로 정의되며 불변적인 관계를 나타낸다. 이것은 한 절차내의 관계를 여전히 불변이게 한다는 것을 의미한다. 이러한 관점에서 프로그래밍에서의 변수는 대수에서의 변수와 동일한 상황에서 사용된다고 볼 수 있다. 그러나, LOGO 프로그래밍에서는 그림을 그리는 간단한 절차에서부터 변수를 사용하게 되므로, 변수사용이 쉽고 의미 있으며, 역동적이고, 동기를 유발한다. 이와 같이 하나의 수학적 내용에 대한 다양한 표현과 변수와 함수적 사고를 통해 사고의 유연성(flexibility)과 문제해결력을 향상시키므로 LOGO 마이크로월드는 수학적 창의력 신장에 좋은 내용전달의 매개체라고 할 수 있다는 것이다.

사용자로 하여금 컴퓨터 스크린 상의 도형을 직접 조작하며 도형의 성질이나 관계들을 탐구하도록 해주는, 다시 말해 동적인 기하환경(dynamic geometry environment)을 제공해 주는 탐구형 소프트웨어는 1980년대 말 등장하였다. 이 같은 동적인 환경을 제공하는 DGS 기반 중 국내에서 쓰이는 것은 Cabri-geometre, The Geometer's Sketchpad(이하 GSP), 그리고 자바말(이하 JavaMAL) 등이다.

이러한 소프트웨어들은 메뉴 옵션이나 아이콘 또는 버튼 등에서 서로 다른 모양을 갖추고 있지만 이들 모두가 결국 유클리드 원론에 규정된 자와 컴퍼스 작도를 흉내내고 있다. 그러나, 이러한 construction의 배경이 되는 구조는 서로 서로 다르다. 예를 들어 JavaMAL로 구현한 애니메이션 화면인 다음을 보자.



점 C는 중심이 A이고 반지름이 선분 AB의 길이인 원위에서만 존재할 수 있는 점이고, 점 E는 점 A, C, D 가 주어졌을 때 도형 ACDE가 평행사변형이 되는 위치에만 존재하는 점이다. 즉, 점 E는 다음과 같은 함수 f의 함수값인 f(A,C,D)로 볼 수 있다.

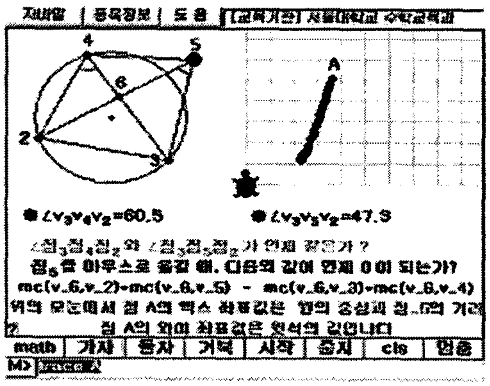
함수 f(A, C, D)
　도형 ACDE가 평행사변형이 되는
　위치에 있는 점 E를 작도한다
함수끝

이 때, 마우스로 점 C를 '끌기(drag)'를 한다면 선분 DE가 선분 CC와 평행을 유지하며 동시에 움직이므로 평행사변형이 만드는 애니메이션이 일어나게 된다. 이와 같

이 주어진 도형을 독립변수와 종속변수의 관계를 통한 함수적 사고로 이해한다는 것은 동적 마이크로월드에서 매우 중요하다.

앞에서 평행사변형을 독립점 3개에 대한 종속점으로 파악하고, 종속점을 작도하는 과정에서 평행사변형의 두 대각선이 서로를 양분한다는 사실을 사용하게 된다. 이와 같이 DGS 환경에서는 독립점을 가지고 종속점이 들어 있는 도형에 대한 정의를 구성적 새로운 방식으로 도입하게 된다. 이는 제시되는 것(instruction)이 아니고 학생들이 실제로 '정의해 보기' 과제를 통하여 스스로 구성하는 방식(construction)을 취하게 된다. 이렇게 DGS의 수학교육과정은 기존의 수학교육과정과 다를 수 있는데, Fou-Lai Lin et.(2002)와 Mariotti. et.(1997)의 학교수학에서 도형의 정의하기에 대한 연구와 Jones(2000)의 연역의 기초로서 사각형의 분류, 그리고 동적 기하 환경과 관련한 De Villier(1998)의 연구들의 연장선에서 DGS 환경의 수학교육과정에서의 정의하기 수업내용을 살펴볼 수 있다.

동적 DGS 환경의 잠재성은 기하학습 내용 각각에 대한 활용가능성보다는 수학 내부에서의 내적 연결성을 강화할 수 있고 또한 브루너의 EIS와 같은 다양한 표현을 통해 Skemp의 관계적 이해를 도모할 수 있다는 것이다. 예를 들어, DGS의 자취 기능은 대수와 기하의 연결성을 돕는다. 이제 점 2, 3, 4, 5 가 동일 원주상에 있을 조건을 탐구하는 다음의 DGS 환경을 살펴 보자. 이 환경에서 마우스로 점 5를 '끌기'를 하면 점 A가 자취를 그리면 움직이는데, 점 A의 x 좌표는 원의 중심에서 점 5까지의 거리이고, y 좌표는 선분 26과 65의 길이의 곱에서 선분 36과 46의 길이의 곱을 뺀 것이다.



이와 같은 기하와 대수가 만나는 DGS 환경에서 점 5가 원의 내부와 외부를 움직임에 따라 점 A의 좌표 변화를 볼 수 있고, 이를 통하여 점 5와 A의 대응관계를 통한 함수적 사고를 통해 이해할 수 있다. 또한 점 5와 A의 함수적 관계를 통해 점 5가 원주상에 있을 조건을 귀납적으로 추측하도록 유도하고, 이를 연역적 추론으로의 연결을 위한 도구가 유도하며 귀납적 추론과 연역적 추론의 만남을 주선할 수도 있다.

이러한 DGS의 잠재성을 활용한 수학교육을 위해 수학교육과정을 이루는 내용구성의 조정이 필요하다. 이러한 DGS 기반 내용구성에서 학습할 기하학적 사실을 탐구활동이 가능한 내용으로 재서술되어 제시하고, 이를 통해 가설이 세워지고, 마우스 끌기 등의 DGS 기능을 활용하여 실험하면서 관찰이 추측이 되도록 한 후, 서로의 추측에 대한 논의의 과정 중에 연역의 필요성이 자연스럽게 유발되도록 하여 궁극적인 개념과 원리에 이를 수 있도록 전개하는 것이 필요하다고 할 수 있다.

새롭게 등장한 마이크로월드를 기존의 수학을 전달하는 도구로서 보다는 새로운 의미있는 수학을 만들게 하는 것이 중요하다는 구성주의 교육관 아래에서 RME와 같이 마이크로월드도 새로운 수학교육과정으로 떠오르고 있다. 이런 주장은 다음과 같은 말 "이제 학생들에게 수학을 배우도록 종용하는 것을 중단하고, 먼저 학생들이 배울 수 있도록 수학을 구성하여보자(Let's stop trying to make kids learn mathematics; let's make mathematics for kids to learn.)." 속에 잘 나타나 있다(Noss & Hoyles, 1996).

3. 컴퓨터와 수학 교수-학습 환경

국내의 컴퓨터와 수학교육에 대한 대다수의 연구는 엑셀, GSP 등과 같은 컴퓨터 소프트웨어의 기능을 활용하여 어떻게 수학을 전달할 수 있을까라는 측면을 다루고 있다. 따라서 논문의 형태가 소프트웨어 사용설명서와 같은 형식이 되기 쉽고, 소프트웨어 구입 등의 문제로 연구된 결과가 가정과 교실에서 이루어지기가 어렵다. 무엇보다도 문제인 것은 연구 중 발견된 소프트웨어의 수학교육적 문제를 극복할 수 없다는 것이다. 이러한 이유로 수학교육자가 직접 프로그램 개발에 참

여하는 경우가 있으나 대부분 flash 동영상이나 특정 단원의 수학 내용을 다루는 교육용 컨텐츠 개발이었다.

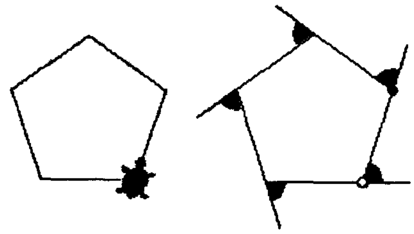
컴퓨터를 통한 수학 교수-학습을 위해서는 수학 내용과 학생 그리고 컴퓨터 환경이 서로 조화로운 통합이 이루어야 한다는 점에서, 소프트웨어 환경에 대해 수학 교육자의 접근이 장려되어야하며 수학교육자와 소프트웨어 개발자의 통합적 만남이 이루어져야 한다.

컴퓨터의 등장과 함께 컴퓨터와 수학교육의 문제는 1980년대부터 연구되기 시작하였다(박배훈 · 이태욱 · 정창현, 1987). 이후 1990년대 이후에 들어와 폭발적으로 연구가 되어왔다(류희찬 · 최경희 · 고상숙, 1999; 박교식, 1998; 황우형, 1999; 김수환 · 이재학, 1992; 강시중, 1990; 전영국 · 주미, 1998; 권오남, 2002; 장경윤, 1996; 박영희, 1997; 노선숙, 1997; 이종영, 1994 등). 이러한 연구에서 컴퓨터나 계산기의 기능을 살려 개념 학습과정에 수반되는 복잡하고 지루한 계산을 컴퓨터와 계산기에 맡김으로써 그렇지 않을 때보다 수월하게 개념 학습과 문제 해결과정에 수반되는 문제 이해와 계획 수립에 더 집중할 수 있다는 연구가 있다. 또한 동적 기하 소프트웨어 (대체로 GSP)의 기능을 활용하여 기하 논증에 관한 개념, 기하도형의 속성과 관계를 발견함으로써 추론 능력을 향상시키는 탐구학습을 연구한 논문들과, 반힐 모델에 따른 교수법을 바탕으로 GSP를 사용해서 학생의 문제해결 학습을 연구한 논문, 문제 해결 과정에서 각 단계 사이의 상호 작용을 용이하게 하여 수학학습 지도에 매우 효과적임을 주장하는 논문 등 여러 편의 연구가 있어왔다. 그런데 수학교육과 테크놀로지와 관련하여 행하여졌던 대부분의 연구는 이미 알려진 현존하는 프로그램의 기능을 활용하여 연구하고 그 효과를 보고하는 연구이었다.

구성주의 수학교육관의 대두와 함께 학습자가 지식을 의미 있게 이끌어내어 구성할 수 있도록 컴퓨터 등의 교수-학습 환경을 제공하여야 한다는 공감대가 형성되어 있다. Piaget는 지각할 수 있는 대상으로부터 그 공통성질을 이끌어 내는 것을 물리적 추상화(physical abstraction)라고 부르고, 행동과 조작의 일반적인 조정으로부터의 추상화를 반영적 추상화(reflexive abstraction)라고 부른다. 반영적 추상화는 논리-수학적 지식 획득의 심적 메커니즘으로, 반영적 추상화에 내재하는 활동의 역동성은 유치원과 초등학교 뿐 아니라 모든 수준에서 수학 학습의 중심이 되어야 한다. 구성주의 수학 교수-학습 모형의 핵심은 구체적인 조작활동을 통한 반영적 추상화를 통해 학생 개개인이 가능한 한 지식을 스스로 구성할 수 있게 하는 것이다.

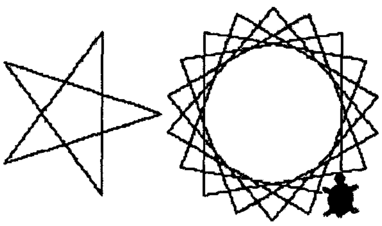
교사와 학생이 수학교육과정에 따른 교수-학습 현장에서 컴퓨터와 같은 역동적인 상호작용을 가능하게 하는 기술공학적 도구의 고유한 교육적 역할을 알아보기로 한다. 비디오 자료나 챠트 자료 또는 OHP 등과 같은 멀티미디어 자료가 할 수 없는 것을 생각할 때 컴퓨터의 역할이 분명해질 수 있다. 수학교육에 기술공학적 도구를 도입하는 입장으로 LOGO 마이크로월드를 구상한 패펄트(Papert)는 교수주의(instructionism)와 구성주의(constructionism)를 구분한다. 그에 의하면 교수주의는 지식 전달에 중점을 둔 가르치기 위한 새로운 길을 추구하는 입장이다(Instructionism focuses on new way for TEACHER to INSTRUCT.). 한편, 구성주의는 관계 발견 및 창의적 문제해결력을 통한 지식 창조에 중점을 두며 학습자의 구성을 위한 새로운 길을 추구하는 입장이다 (Constructionism focuses on new way for LEARNERS to CONSTRUCT.). 이러한 관점에서는 최근의 수학교육용 소프트웨어를 기존 교육과정의 전달을 위한 보조 도구보다는 새로운 교육과정을 위한 컴퓨터 수학 환경(Computer Mathematics Environment)으로 본다.

Piaget 심리학에 이론적 근거로 두고 있다는 활동주의 교수 학습 이론에서도 활동의 의미와 관련된 학습의 메커니즘에 대한 충분한 이해가 결여되어 있다면 단순한 경험론에 빠지기 쉽다. 이런 문제점이 컴퓨터 수학 환경에서도 나타날 수 있다. 즉, 컴퓨터를 통해 제시되는 수학적 대상(object)에 대한 구체적 활동만을 강조하고, 그것의 내적 재구성 그리고 그 결과에 대한 반성이 없다면, 반영적 추상화가 아니라 물리적 추상화가 일어날 가능성이 있다. 다음 그림의 왼쪽의 거북 마이크로월드와 오른쪽의 움직이는 기하 환경을 살펴보자.



까만점을 하얀점으로 끌어보세요

위의 오른쪽 그림에서는 학습자가 거북이와 자신을 일치시킨 후 다각형을 따라 돌 때 자신의 몸이 한바퀴 회전함을 발견할 수 있다. 이러한 발견은 아래 그림에 제시된 도형의 외각을 계산할 때에도 응용될 수 있는 반영적 추상화이다. 그러나 위의 오른쪽 그림에서 마우스로 까만점을 끌어 하얀점으로 모아서 외각의 합이 360도라는 것을 보는 것은 아래에 제시된 도형의 외각 계산에는 쓸 수도 없는 물리적 추상화라고 볼 수 있다.



구성주의적 교수-학습 모형에서는 학생 중심의 개별화 학습과 발문 중심의 상호작용 학습 그리고 의미 지향적 활동을 통한 반영적 추상화 학습 등의 방법론이 강조된다. 이러한 구성주의적 교수-학습 모형을 위해 제시되는 환경으로 Wheatley(1992)가 제안한 문제중심 교수-학습이 있는데, 이러한 학습은 과제와 소집단 협력, 전체 토의와 공유, 그리고 역동적인 상호작용을 통한 반영적 추상화 유도 등으로 이루어진다.

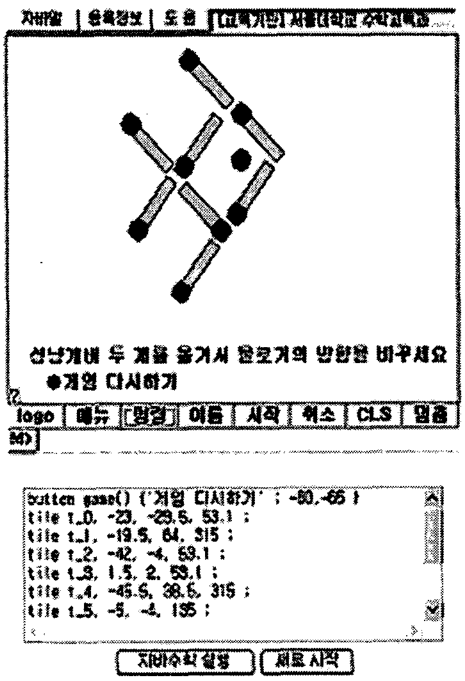
피아제는 "To understand is to invent"라고 말한다. 이제 학생에게 수학을 제시할 때에는 탐구 활동으로부터 반성에 의해 수학적 개념과 원리를 추상화할 수 있도록 문제 상황을 표현하고 구성하여야 할 것이다. 특히 마이크로월드에서 학습자의 조작과 반영적 추상화를 기대하기 위해서는 학생 스스로의 구성(construction)이 용이하도록, 자신의 활동을 반성할 수 있는 history를 볼 수 있도록, 갈등 상황에 대한 feedback과 debug가 용이하도록, 수학적 개념과 구조가 풍부하도록 마이크로월드 환경이 디자인되어야 할 것이며, 바로 이 것이 마이크로월드(discovery learning environments)의 핵심이다(Abelson & diSessa, 1980; Edwards, 1995; Noss & Hoyles, 1996; Willensky 1993).

컴퓨터와 학생의 인터페이스가 너무 매끄러우면 학생들은 자신의 조작 활동에 대한 명확한 인식 없이 학습이 이루어질 수 있어 단순한 시행착오를 통한 학습이 될 수 있다. 예를 들어, GSP 등에서 메뉴를 사용하는 방식과 완성된 그림의 탐구만을 통한 학습에 학생 스스로의 구성(construction)적 요소를 첨가하고 더 나아가 도형을 구성하고 탐구하는 역전된 방식으로 동적 기하가 디자인되어야 한다는 주장이 있다. 또한 컴퓨터를 매개로하는 수학 교수-학습 환경에서는 학생들이 자신의 이전 행동을 분명하게 인식할 수 있는 장치가 필요하며, 이러한 장치의 예가 LOGO 마이크로월드에서 택한 언어적 표현 시스템이다. 언어적 표현 시스템에서는 학생들의 행동이 프로그램이라는 언어의 형태로 저장되고, 이를 수시로 살펴볼 수 있기 때문에 자신의 이전 사고와 행동을 반성하고 명확하게 인식할 수 있다.

Sherin(2002)은 움직이는 기하 환경 DGS에서도 로고 마이크로월드 등에서 강조하는 스스로 만들어보는 개념(making)과 언어적 표현의 필요성을 제기하였다. 이는 스스로 대상을 만들어가고 오류 수정을 하는 로고 마이크로월드의 장점과 DGS의 장점인 동적 기능을 결합시키려는 시도에서 비롯되었다. 즉, 생성자를 정하고 이를 이용하여 도형을 생성하고 함수를 사용하여 절차를 간소화하는 방식이다. 이는 브루너의 EIS 이론에 근거하여 instruction보다는 construction을 강조하려는 마이크로월드의 절차적 특성을 DGS의 근간으로 삼으려는 시도로 의미가 있다.

예를 들어, 다음과 같이 LOGO와 동적 작도 기능이 합해져 있는 JavaMAL DGS 환경에서 타일 명령을 사용하여 성냥개비 게임을 만든 화면을 보자. 이 화면의 아래에 있는 편집기의 명령은 화면에 작도된 내용에 대응하는 언어적 명령을 [명령] 단추를 눌러 편집기에 나

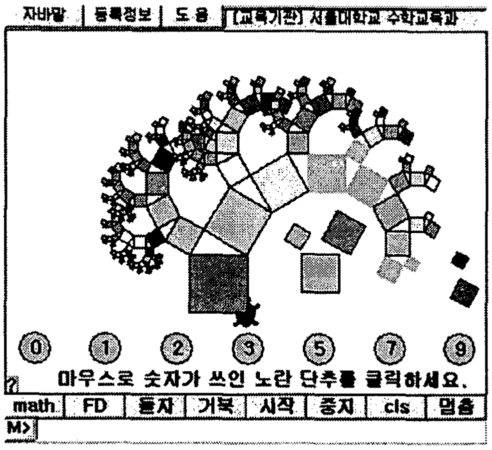
타나게 한 것이다. 이와 같이 나타난 언어적 명령은 게시판에 담아 화면을 명령문으로 저장하고, 다른 사람은 명령문을 실행시킴으로써 원하는 화면을 만들게 할 수도 있다. 또한 마우스에 의한 명령, 메뉴에 의한 명령, 알고리즘 언어에 의한 명령을 서로 연계시켜 자신의 조작활동에 대한 언어적 기록을 통한 수학적 개념과 사고를 의식화시키려는 것, error의 원류를 찾아 치료하는 debugging 기능을 위한 history 기능, 그리고 서로 서로에게 자신의 알고리즘을 분명하게 전달하고 feedback을 얻는 협동학습을 가능하게 하려는 구성주의 교육관이 구현된 수학 교수-학습 환경을 위한 소프트웨어 디자인을 볼 수 있다.



로고 마이크로월드에서는 명령어를 학습하여 직접 프로그래밍을 경험하거나 직접적인 마우스 조작을 통해 작도를 한 뒤, history 기능을 통해 이를 프로그래밍 언어로 해석하는 활동을 통해 기호화 활동을 자연스럽게 학습할 수 있다. 이는 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 증명 활동이 전통적인 증명수업에서 나타나는 학생들의 증명쓰기 능력의 부족 문제를 해결하는데 대안이 될 수 있음을 시사해 준다. 탐구형 기하 소프트웨어의 활용은 학생들이 증명의 필요성을 이해하고 추측한 것을 정당화 활동으로 연결시키며 기호화 활동에 익숙해지도록 하는데 도움이 되며, 이로 인해 학생들의 증명쓰기 능력이 향상될 수 있을 것이다. 또한 탐구형 기하 소프트웨어는 학생들에게 역동성과 참여의 기회를 제공함으로써 학생들의 증명에 대한 태도의 변화에도 긍정적인 영향을 미칠 수 있을 것이다. 요사이 유행하는 동적 기하 환경에서의 수학 교수-학습에서 마우스 끄는 활동만이 아니라 기호적 언어적 명령을 통한 활동과 그 결과에 대한 언어적인 정리가 필요하다는 것을 강조하지 않을 수 없다.

동적 DGS 환경의 측정 및 끌기 기능 등을 이용한 추측, 탐구 등을 위해 DGS 환경에서는 측정을 위한 교육적인 기능이 있어야 한다. 예를 들어, 두 점의 거리나 각도 면적 등의 측정을 위한 함수가 있어야 한다. 이러한 수량적인 측정 뿐만 아니라 기하적인 측정도 가능하여야 한다. 예를 들어, 주어진 두 개의 도형이 합동인가를 탐구할 때, 서로의 각도나 변의 길이만 비교하는 것이 아니라 먼저 뒤집기, 돌리기, 옮기기 등의 변환에 의한 기하적 조작을 해 보아야 할 것이다.

이러한 기하적 조작 활동은 종이접기와 성냥개비와 타일 그리고 칠교판 활동 등을 통해 학습자가 하던 것으로, DGS 환경에서는 이러한 원초적인 조작을 바탕으로 명령에 의한 조작을 이해시켜야 할 것이다. 이러한 활동의 기저에는 주어진 정보로부터 새로운 정보를 찾는 함수적 사고가 깔려 있다. 따라서 예를 들어 두 점의 중점을 찍는 명령을 활용한 탐구 이전에 두 점의 중점을 자와 콤파스 그리고 종이 접기 등에 의해 찾아보는 의미 있는 활동을 하여 중점에 대한 감(feeling)이 잇어야 의미있는 탐구를 유도할 수 있을 것이고, 또한 이를 바탕으로 명령을 도입하여야 할 것이다. 다음 그림은 중3의 피타고라스 정리에 나오는 그림을 단계 단계로 나누어 확대해 나가는 것으로, 이러한 단계의 극한은 피타고라스 나무라고 잘 알려져 있다. 이러한 환경에서 다음은 화면을 이루고 있는 정사각형들을 타일로 변환시켜 마우스로 그 것들을 모아 조작하고 변환시키는 모습을 보여주고 있다.



동적 DGS 환경의 측정 및 끌기 기능 등을 이용한 추측, 탐구 등 일련의 경험적 활동은 궁극적으로 연역적 정당화의 필요성을 이해하고 경험적 활동을 연역적 정당화로 연결시키는데 도움이 된다. 학생들에게 처음부터 수학적인 논증을 요구하는 대신 활동을 통해 자신들의 추측이 참인지를 확인하고 왜 참인지를 설명해 보도록 함으로써 경험적 정당화의 한계를 인식하고 이를 넘어설 수 있는 다른 증명 방법이 필요함을 인식시킬 수 있다.

4. 컴퓨터와 문제중심 수학교육

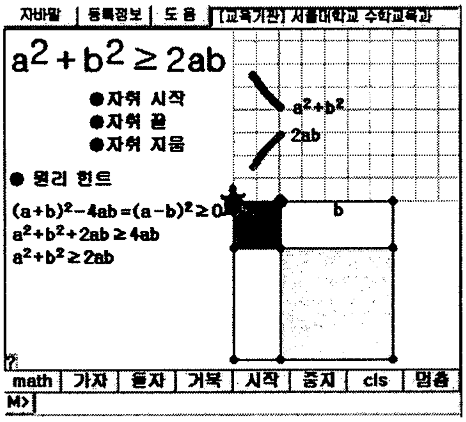
1989년에 미국에서 발간된 학교수학을 위한 교과과정과 평가의 규준에서도 탐구와 조사를 통한 문제해결로서의 수학을 강조하고 있다. 이러한 규준의 의미는 학생의 창의적 사고력과 문제 해결력의 배양이며, 이는 학생이 학교를 졸업하고 현대의 고도로 발달한 과학기술과 정보화 사회에 적응하고 실제의 수학적 문제 상황에서 문제해결을 도모하기 위한 것이다.

Schroeder & Lester(1989)는 문제해결과 관련하여 수학 teaching을 문제해결에 대한, 문제해결을 위한, 문제해결을 통한 teaching으로 세 가지를 제시하였다. NCTM의 Standard에서는 이 세가지가 모두 강조하되, 특히 문제해결을 통한 teaching을 강조하였다. 구성주의 관점에서 기계적인 암기식 수학학습을 대신하여 의미 만들기(meaning making)를 강조하는 학습의 하나로 문제중심 학습을 들고 있다. 문제중심 학습은 Wheatley (1992)가 구성주의 학습관을 반영하는 학습 전략으로 제안한 것으로, 이 학습은 과제와 소집단 협력 학습, 전체 토의와 공유 학습, 그리고 역동적인 상호작용 등으로 이루어진다. Wheatley는 구성주의의 핵심이 반영적 추상화인 것처럼 문제중심 학습의 핵심도 반영적 추상화이며 또한 탐구를 유도하는 학습이라고 말한다. 문제중심 학습(PCL: Problem centered learning)에는 문제해결(Problem solving) 및 문제 설정(Problem posing) 학습으로 이루어진다.

문제중심 수학교육에서의 문제로는 학생들의 지적 호기심을 고취시키고 새로운 아이디어를 창출해 낼 수 있는 문제, 응용력과 사고력을 신장시킬 수 있는 문제, 문제 해결력의 신장을 위하여 다양하게 해결이 가능한 문제를 택하면 좋을 것이다. 이러한 문제들을 통해 탐구와 반영적 추상화를 유도하기 위해서 적절한 마이크로월드와 문제를 결합시킨 환경이 큰 역할을 할 수 있다. 또한 Web 기반 마이크로월드를 통한 탐구 문제를 통해 시간과 공간을 초월해서 online 상에서 문제중심 학습을 유도할 수도 있다. 이를 위해서는 먼저 지필에서 다루어지던 구체적인 문제들의 해결전략이 동적 환경에서 어떻게 변화될 수 있으며, 이로 인해 문제설정의 목표와 형태 등은 어떻게 달라지는지에 대한 보다 신중한 연구가 필요하다. 또한 DGS에서의 동적인 탐구로 해결을 추측할 수 있는 창의적인 문제와 새로운 문제 형태 등에 관한 연구도 필요할 것이다.

문제를 함수적 표현을 통해 이해하는 것이 중요하다. 수학의 많은 문제나 정리들이 정적인 표현에도 불구하고 동적인 의미를 갖고 있다. 예를 들어, '삼각형의 내각의 합은 180도이다.' 라고 정적으로 표현된 정리에서 '삼각형'의 표현은 '모든 삼각형'을 의미한다. 이러한 동적인 의미의 인식은 정리를 함수로서 볼 수 있는 중요한 역할을 한다. 다시 말해, '모든' 이라는 것이 잠재적인 변수로 작용하여 함수적 재서술을 제안하게 되는 것이다. 이를 바탕으로 Cuoco et al.(1998)는 기하학적 탐구 문제를 도형공간에서 정의되는 함수로 이해하였다. Parzysz(1988)는 여기서의 도형공간을 위상적 성질을 갖는 그림의 집합으로 설명한다. 도형 공간에서 각각의 그림은 점으로 간주되며, 어떤 성질을 공유하는 점들은

동일시 될 수도 있다. 예를 들어, 합동이거나 닮은 삼각형은 하나의 점으로 동일시 될 수 있다. 그래서, 도형 공간은 사실상 어떤 관계(relation)에 의한 그림 집합의 상(quotient)일 수 있다(Cuoco et al., 1998). 다음은 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 부등식을 탐구할 수 있도록 DGS 환경에 대수와 기하적 표현으로 구현한 것이다. 학생들은 마우스로 빨간점을 끌면서 a^2 에 대응되는 정사각형과 b^2 에 대응되는 정사각형의 변화에 따른 값의 변화를 함수의 그래프로 관찰할 수 있으며, 이 후 왼쪽의 버튼을 눌러 대수 언어적인 과정을 통한 논리적 설명을 확인 할 수도 있다.



마이크로월드 기반 문제중심 수학교육에서는 문제를 대수적 또는 기하적 문제를 함수적으로 분석하여 해석한 후, 이를 마이크로월드를 통해 역동적으로 표현하고 탐구함으로서 문제중심 학습이 추구하는 반영적 추상화와 문제해결력을 유도하는 것이 중요하다. 예를 들어, 기하학적 문제를 DGS 환경에서 탐구할 수 있도록 재서술하는 것은 문제에 대한 시각적인 이해뿐만 아니라 동적인 탐구로 해결의 실마리를 찾거나 해를 추측하도록 유도할 수 있을 것이다. 이렇게 문제를 동적인 환경에서 작도함으로 동적인 환경에서의 해결전략이 지필 환경에서와는 다를 수 있음을 고려하여 문제설정 목표와 적절한 형태를 결정하여 제시할 필요가 있다. 또한, 이러한 고려 하에 동적 환경에서 다루어 질 수 있는 새로운 문제에 대한 연구가 계속되어야 할 것이다.

문제를 마이크로월드 환경을 통해 함수적 관계로서 표현하는 것은 단지 문제해결을 위해 하는 것은 아니다. 비록 문제를 해결하지 못하였다고해도 다음과 같이 이유로 수학의 창의력과 사고력을 위해 중요하다는 것이다. 즉, 함수의 관점에서 역동적으로 재해석된 문제를 DGS 환경에서 탐구하며 "만약 이곳을 변화시키면 어떻게 될까?"라는 'What if?'라는 질문을 통해 탐구활동을 계속적으로 자극할 수 있다. Goldenberg et al.(1998)에 의하면 이러한 재해석은 마이크로월드를 통한 탐구활동의 기본이 되며, 이를 통해 새로운 추론을 할 수 있으며, 고립된 사실을 수학적 아이디어의 총체로 이끌 수도 있다. 그러므로 기하학적 문제의 재서술을 통한 탐구활동은 기하학적 문제와 관련된 전후의 전반적인 학습내용을 고려하여 학생들에게 제시되어야 할 필요성이 있다.

유클리드 기하교육에는 두 가지의 교육적 특성을 갖고 있다. 하나는 국소적(local) 성격으로 알고 있는 사실에서 새로운 사실을 연역해내는 논리의 사슬이고, 또 다른 하나는 대역적(global)인 것으로 기하를 기본 공리로부터 건설해 내는 공리 체계라는 것이다. 마찬가지로 수학적 문제 해결에서도 국소적으로는 알고 있는 것으로부터 새로운 문제를 해결해내고, 대역적으로는 알려진 것을 기본적인 것으로부터 설명해 내는 체계를 완성해나가는 교육적 특성을 생각할 수 있다.

5. 컴퓨터와 진단처방 수학교육

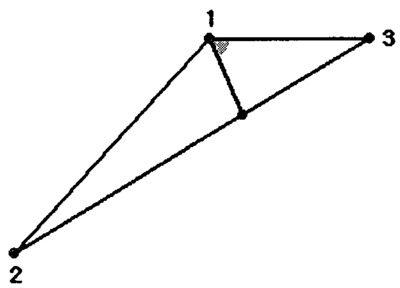
역동적인 수학 마이크로월드를 통한 수학 교수-학습 환경에서 학습자의 현재 수학능력이나 수학 오개념 등의 진단은 바람직한 학습을 위해 필수적이다. 그러나 선생님과 많은 학생이 모인 교실의 현실 속에서 시간적 그리고 공간적 제약에 의해 이러한 과정이 방치되어 왔다. 그러나 인터넷 기반 마이크로월드의 발달은 이러한 제약을 넘어 새로운 진단-처방 수학교육에 대한 가능성을 시사하고 있다. 예를 들어, 우리나라에서도 수학 오류 또는 van Hiele 의 연구(송순희, 1997; 류성림 · 정창현, 1993; 김원경, 1999; 한태식, 1991; 서성보, 1995 등)가 많았지만 이러한 연구가 현장에서 크게 활용되지 못하였다. 이 것을 TOEFL과 같은 Computer Adaptive Test 형식으로 만들어 인터넷에 올려놓고 사용하면 훨씬 도움이 될 것이다. 사실 van Hiele 연구가 교원임용고시에도 나오고

이를 가르치는 강의와 연구 논문은 많지만 정작 중요한 van Hiele 연구의 진단지와 수업에서의 구현과 처방에 대한 것은 보이지 않는 것이 현재의 수학교육 연구의 현실이다.

van Hiele 진단을 하였다고 할 때, 그 결과가 교수-학습 환경에 활용되지 않는다면, 즉 처방이 없는 진단이라면 그것은 아무 의미도 없는 것이다. Web 기반 마이크로월드에서는 진단을 통한 처방의 상황에 도움을 줄 수 있다. 또한 이러한 환경은 구성주의적 접근의 교수-학습 환경에서 필연적으로 등장하는 오개념과 수학적 오류에 대한 진단과 처방의 수학교육을 위해 큰 역할을 할 수 있다. 사실 구성주의적 접근에서 가장 중요한 점은 학습자 자신이 스스로의 오류와 그것의 한계를 인식하고 이를 통해 오류와 그것으로는 설명되지 않는 새로운 현상 사이의 갈등 혹은 오개념과 학습될 새로운 수학적 개념 사이의 갈등을 극복하는 것이다.

수학적 사고의 오류를 치료하는 방법으로는 몇 개의 정답과 오답을 판서 등에 의해 병렬적으로 제시하여 비교시키든지 토의를 시켜서 오류사례를 부각시켜 원인을 알도록 하거나 학습자의 오류에 대한 모순점을 지적하여 문제의식을 자극시켜 잘못을 반성하여 알도록 하거나, 마이크로월드 등의 환경을 통해 오류를 체험을 시켜 오류의 원인에서 해답의 모순점을 발견하여 스스로 깨닫게 하는 등의 여러 방법이 있을 수 있다. 구성주의적 접근을 취하면서 학생의 개념변화를 꾀하기 위한 대부분의 학습지도방안은 기본적으로 인지갈등(cognitive conflict) 을 가장 중요한 단계로 간주하고 있으며, 인지갈등을 전제로 하는 개념변화 학습지도 방안에는 여러 가지가 있다.

예를 들어, 다음과 같은 삼각형 123에서 각 312의 이등분선이 선분 23과 만나는 교점이 선분 23의 중점이라는 오류를 범하는 학생이 많다. 이러한 오류에 대한 확실한 처방은 다음과 같은 동적 환경에서 도형을 변형시키며 확인하는 것이다. 이 경우에 어떤 경우에 교점이 중점이 되는지에 대한 추가적인 탐구를 하는 것이 오류 처방에 못지않게 중요하다. 지금까지의 오류 연구는 오류 극복이라는 차원에서 많이 연구되어 왔는데, 이제는 학습자가 갖고 있는 오류가 성립하는 경우와 성립하지 않는 경우를 따지는 동적인 처방을 통해 오류를 극복하고 또한 새로운 수학 내용에 대한 교수-학습이 일어나도록 유도하여야 한다.



학생들이 갖고 있는 오류는 체계적이며 이 중에는 제논의 역설과 같이 Process와 Product에 관련된 극한의 오류가 있는데, 이러한 것은 중학교 수학에서 0.99999999999... = 1 이라는 학습에서 어김없이 재현된다. 또한 학생들이 초등학교에 다루었던 정수에 기초한 사칙연산의 성질을 유리수와 실수로 확장된 상태로 일반화를 하는 오류 등과 같이 학습자가 학습한 사항을 새로운 상황에서 무리하게 일반화를 하는 오류도 있는데, 대표적인 예가 $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 또는 $(a+b)^2=a^2+b^2$ 이다. 또한 and와 or 그리고 all과 some 등에 대한 논리성의 부족으로 오는 기하학습에서의 정리에 대한 오류가 많다.

다양한 오류는 그 뿌리가 다르기에 어떤 것은 반례를 보여주면 해결되지만 어떤 것은 Piaget 또는 van Hiele가 보여주는 것처럼 사고 차원의 문제인 것도 있다. 오류 중에는 기존의 지필환경에서의 정적인 수학적 표현을 통해 얻는 오류도 많은데 이러한 것들은 역동적인 DGS 마이크로월드를 통해 많은 것이 처방될 수 있다. 예를 들어, 초등학생이 똑바른 위치의 삼각형만 교과서에서 보다가 다른 것을 볼 때 오류를 발생시키는 것으로 이 것은 딘즈가 지적한 대로 지각적 다양성과 수학적 다양성의 부족으로 인한 오류로 동적 DGS 환경이 좋은 처방 장소가 될 수 있다. 물론 처방은 학생의 활동을 통한 반영적 추상화의 결과로 이루어져야 한다.

학습자의 오개념을 처방하기 위해서 학습자의 생각이 틀림을 보여준 후 이해될 수 있고 활용가능성이 많은 설명을 주어야 할 것이다. 학습자의 오개념을 수학적 개념으로 변화시키기 위한 방안으로 다양한 교수-학습 환경이 제시되고 잇는데, 그 중에서 Driver의 학습모형은 학생들이 자신의 생각을 표현하는 단계, 자신의

생각을 재구성하는 단계, 재구성한 생각을 응용하는 단계, 자신의 생각의 변화를 검토하는 단계로 이루어져 있다. 여기서 무엇보다도 중요한 것은 오류를 수학 교수-학습의 과정에 이용하여야 한다는 것이다. 특별히 확인된 오류가 어떤 경우에 성립하고 어떤 경우에 성립하지 않는가에 대한 수학적 탐구를 유도하여 자신의 오류에 대한 넓은 시야를 갖게 하는 것이 무엇보다도 중요하다. 바로 이러한 목적을 위해 동적인 DGS 환경이 사용될 수 있다. 학생은 동적 DGS를 통한 귀납적 실험을 통해 성립하는 경우와 성립하지 않는 경우를 발견할 수도 있다.

참 고 문 헌

강순자 · 고상숙 (1999). 공간능력 신장을 위한 기하 학습자료 개발: GSP를 이용한 정다면체 구성, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 38(2), pp. 179-187, 서울: 한국수학교육학회.

강시중 (1990). Computer나 Calculator를 이용한 계산에서 오류 교정을 우한 어림셈 지도에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 29(1), pp. 21-34, 서울: 한국수학교육학회.

권오남 (2002). 웹 기반 가상현실 프로그램과 지필 학습 프로그램이 공간시각화 능력에 미치는 영향, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 41(1), pp. 45-57, 서울: 한국수학교육학회.

김민경 (1999). 컴퓨터 기반의 이산수학에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 38(2), pp.189-197, 서울: 한국수학교육학회.

김수환 · 이재학 (1992), 논리적 사고력 신장을 위한 LOGO 프로그래밍 활동의 효과분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 31(1), pp.11-22, 서울: 한국수학교육학회.

김원종 (1993). 인공지능을 활용한 수학교육의 코스웨어, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 32(1), pp.11-41, 서울: 한국수학교육학회.

김인수 · 고상숙 · 박승재 · 김영진 (1998). 이차함수와 타원의 문제해결 지도를 위한 멀티미디어 학습자료 개발, 대한수학교육학회 논문집 8(1), pp.59-71, 서울: 대한수학교육학회.

노선숙 (1997). 예비 수학교사들을 위한 컴퓨터 교육과정, 대한수학교육학회 논문집 7(2), pp.269-280, 서울: 대한수학교육학회.

류성림 · 정창현 (1993). 중학생 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 32(2), pp.137-149, 서울: 한국수학교육학회.

류희찬 · 이지요 (1993). 수학교육에서의 시각화의 중요성과 LOGO, 대한수학교육학회 논문집 3(1), pp. 75-85, 서울: 대한수학교육학회.

류희찬 (1990). 수학교육과정에서의 컴퓨터의 영향, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 29(2), pp. 109-115, 서울: 한국수학교육학회.

박교식 (1998). 우리 나라 초등학교 수학교육에 적용 가능한 계산기 활용 방안 연구, 대한수학교육학회 논문집 8(2), pp.237- 250, 서울: 대한수학교육학회.

박대우 · 윤주한 (1997). 피타고라스 정리의 효과적인 지도방안에 관한 CAI 제작 및 적용을 통한 학습의 효과에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 36(1), pp.61-75, 서울: 한국수학교육학회.

박배훈 · 이태욱 · 정창현 (1987). 컴퓨터를 활용한 고등학교 수학학습법 개발에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 26(1), pp.1-10, 서울: 한국수학교육학회.

서성보 (1995). Van Hiele의 이론에 의한 국민학교 기하도형 학습의 분석연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 34(2), pp.141-202, 서울: 한국수학교육학회.

송순희 · 오정현 (1997). 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 36(1), pp.11-22, 서울: 한국수학교육학회.

심규선 (1997). 교육용 프로그래밍 언어 Mal을 이용한 함수개념 지도, 서울 대학교 대학원 석사학위 논문.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

이종영 (1994). 프로그래밍 경험을 통한 변수 개념지도, 대한수학교육학회 논문집 4(1), pp.207-224, 서울: 대한수학교육학회.

이종은 · 김원경 (1999). 중학생들의 일차 방정식에 관한

문장제 해결 전략 및 오류 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 38(1), pp.77-85, 서울: 한국수학교육학회.

장경윤 (1996). 컴퓨터와 수학, 수학교육, 대한수학교육학회 논문집 6(1), pp.33-44, 서울: 대한수학교육학회.

전영국 · 주미 (1998). 기하문제해결에서의 GSP를 활용한 탐구학습신장, 대한수학교육학회 논문집, pp.413-427, 서울: 대한수학교육학회.

최경희 · 임성택 (1991). 연산지도용 CAI 코스웨어에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 30(2), pp.107-123, 서울: 한국수학교육학회.

박영희 (1997). XLIST-STAT의 동적 그래픽을 이용한 통계교육, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육 ≥ 36(2), pp.119-126, 서울: 한국수학교육학회.

한태식 (1991). 기하교육과 Van Hiele 이론, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 30(3), pp.47-69, 서울: 한국수학교육학회.

황우형 (1999). 로고 언어의 중등수학교육 활용방안, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 38(1), pp.. 15-35, 서울: 한국수학교육학회.

Abelson, H. & diSessa, A. (1980). *Turtle geometry*, Cambridge, MA : MIT Press.

Balacheff, N. (1993). Artificial intelligence and real teaching. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* pp.131-157, Springer Verlag, Berlin.

Cobb, P. & Steffe, L. P. (1983) The constructivist researcher as teacher and model builder, journal for research in mathematics Education 14, pp. 83-94

Cobb, G & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching, The American Mathematical Monthly, pp.801-823.

Couco, A. A.; Goldenberg, E. P. & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space.* London: Lawrence Erlbaum Associates. Inc.

De Villiers, M. (1994), *The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals*, For the Learning of Mathematics 14(1), pp.11-18.

De Villiers, M. (1998). *An Alternative Approach to Proof in Dynamic Geometry,* In R. Lehrer & D. Chazan(Ed), Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space, pp.359-394, Lawrence Erlbraum Associates, Publishers.

Duval, R. (1995), *Geometrical pictures : Kinds of representation and specific processings.* In R. Sutterland & J. Mason(Eds.), Exploiting mental imagery with computers in mathematics education, pp.142-157. Berlin : Springer.

Edwards, L. D. (1995). *Microworlds as representation.* In diSessa, A., Hoyles, C., Noss, R. & Edwards, L.(Eds.), Computers and exploratory learning. Berlin : Springer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task,* Dordrecht:Reidel.

Fou-Lai Lin & Kai-Lin Yang. (2002). *Defining a Rectangle under a Social and Practical Setting by Two Seventh Graders,* International Reviews on Mathematics Educations 34, pp.17-28.

Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. A. (1998). *What is dynamic geometry?* In R. Lehrer & D. Chazan(Ed), Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space, pp.351-368, Lawrence Erlbraum Associates, Publishers.

Healy, L.; Hoelzl, R.; Hoyles, C. & Noss, R. (1994), *Messing up,* Micromath 10(1), pp.14-16.

Hölzl, R. (1996). How does "Dragging" affect the learning of geometry?. *International Journal of Computer for Mathematical Learning,* pp169-187.

Hoyles, C. & Noss, R (Ed.), *Learning Mathematics and Logo,* London : The MIT Press

Hoyles, C & Sutherland, R. (1989). *Logo Mathematics in the Classroom,* London : Routledge.

Jackiw, N. (1995). *The geometer's sketchpad (Computer software)*. Berkeley, Calif.: Key curriculum press.

Jones, K. (2000). *Providing a foundation for deductive reasoning*, Educational Studies in Mathematics **44**, pp.55-85.

Mariotti, M. A. & Fishbein, E. (1997). *Defining in classroom activities,* Educational Studies in Mathematics **34**, pp.219-248.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings,* Dordrecht, Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs. "seeing": Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics.*

Sherin, B. (2002). *Representing Geometric Constructions As Programs : A Brief Exploration,* International Journal of Computers for Mathematical Learning **7(1)**, pp.101-115.

Sutherland, R. (1992). What is Algebraic about Programing in Logo? In Hoyles, C. & Noss, R (Ed.), Learning Mathematics and Logo. London : The MIT Press

Tall, D. http://www.davidtall.com/papers / 논문

Vinner, S. (1991). *The role of definitions in teaching and learning of mathematics,* In D. Tall(Ed), Advanced mathematical thinking, pp.65-79, Dordrecht, Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Wheatley, G (1992). The role of reflection in mathematics learning, Educational Studies in Mathematics **23**, pp.529-541.

Wilensky, U. J. (1993). *Connected mathematics - Building concrete relationship with mathematical knowledge*, Thesis of doctor of philosophy at the Massachusetts Institute of Technology.

Schroder, T & Lester, F (1989). *Developing understanding in mathematics via problem*, New directions for elementary school mathematics, NCTM Yearbook, Reston, VA, pp.31-42.

Computers and Mathematics Education

Cho, Han Hyuk

Department of Mathematics Education, Seoul National University, Shinrim-dong, Gwanak-Gu, Seoul, Korea, 151-742

E-mail: hancho@snu.ac.kr

In this paper, we present the theory of computers and mathematics education based on the concept of microworlds for mathematics education. We first look back some previous papers published in the journal of the Korea society of mathematical education series A and else where. Then we present the new view points regarding mircroworlds and mathematics curriculems, microworlds and mathematics teaching and learning, microworld based problem centered learning, and microworld based diagnostics and debuggings. We use JavaMAL microworld that is designed to make LOGO and dynamic geometry system in one microworld to give some examples to explain the necessary mathematics educational needs for designing microworlds for mathematics education. The JavaMAL microworld is a web based microworld that is programmed using JAVA, and the user can use script language, menus, keyboard, and mouse interaction to use the environment.

* ZDM classification : D13, U13

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C80

* Key Word : Computer, MicroWorld, Curriculum, Teaching-Learnig.