

## 이점 볼록 근사화 기법을 적용한 최적설계

김 종 립\* · 최 동 훈†

(2003년 1월 22일 접수, 2003년 4월 10일 심사완료)

### Design Optimization Using the Two-Point Convex Approximation

Jong-Rip Kim and Dong-Hoon Choi

**Key Words :** Two-Point Approximation(이점 근사화), Two-Point Convex Approximation(이점 볼록 근사화), Sequential Approximate Optimization(순차적 근사 최적화)

#### Abstract

In this paper, a new local two-point approximation method which is based on the exponential intervening variable is proposed. This new algorithm, called the Two-Point Convex Approximation(TPCA), use the function and design sensitivity information from the current and previous design points of the sequential approximate optimization to generate a sequence of convex, separable subproblems. This paper describes the derivation of the parameters associated with the approximation and the numerical solution procedure. In order to show the numerical performance of the proposed method, a sequential approximate optimizer is developed and applied to solve several typical design problems. These optimization results are compared with those of other optimizers. Numerical results obtained from the test examples demonstrate the effectiveness of the proposed method.

#### 1. 서론

성능에 관한 요구 조건들을 만족하도록 제품의 치수, 형상 등을 결정하는 과정인 설계는 본질적으로 반복적인 절차를 요구한다. 일반적인 기율기 기반 최적설계 방법은 해석 프로그램이 직접 최적설계 과정에 삽입되어 설계를 위하여 최적설계 모델에서 시스템 해석을 요구할 경우 실제 시스템 해석을 반복적으로 수행한다. 그러므로 해석 비용이 큰 시스템 설계의 경우에는 적용하기 힘든 단점이 있었다. 이를 위하여 실제 해석을 통한 시스템의 정보들로 근사화 된 시스템 모델을 생성하여 이를 최적설계 과정에 삽입시켜 전체 최적설계 과정에서의 실제 해석 회수를 줄이는 근사 최적설계 기법이 개발되었다.

1970년대 Schmit 등은 최적설계에 처음으로 근

사화의 개념을 소개하였다.<sup>(1-3)</sup> 1980년대 대부분의 근사화는 선형(linear) 근사화, 역(reciprocal) 근사화 보수(conservative) 근사화<sup>(3)</sup> 등과 같은 한 점에서의 함수 값과 도함수 값의 정보를 기본으로 한 테일러 급수를 기초로 하였다. 이 근사화 방법들은 대부분의 기율기 기반 최적설계 알고리즘이 함수 값과 도함수 값을 필요로 하기 때문에 근사 함수를 생성하는 과정에서 추가적인 함수나 도함수 계산을 필요로 하지 않으므로 지금도 널리 사용되고 있다. 그러나 이러한 일련의 근사화 기법들은 설계영역의 근사 점 근처의 국부에서만 유효하다.

1990년대 이르러 최적설계 과정에서 이미 해석되어 알고 있는 시스템 정보들을 이용하여 보다 넓은 설계 영역에서 유효한 근사 모델을 생성하는 많은 다점(multi-point) 근사화 기법들이 제안되었다.<sup>(4-8)</sup> 그 중에서 사용이 간단하여 널리 쓰이고 있는 이점 근사화 방법은 1990년 Fadel 등<sup>(7)</sup>에 의해 처음으로 소개되었으며, 이들은 지수 형태의 매개 변수를 정의하였다. 이 매개 변수에 기초하여 Wang과 Grandi<sup>(4)</sup>는 일련의 두 설계점의 함수 값과 도함수 값을 모두 이용하는 개선된 이점 근

\* 한양대학교 대학원, 기계설계학과  
† 책임저자, 회원, 한양대학교, 최적설계신기술연구센터 (iDOT) 소장  
E-mail : dhchoi@hanyang.ac.kr  
TEL : (02)2290-0478/9 FAX : (02)2291-4070

사화 방법인 TPEA-change, TANA, TANA-1 그리고 TANA-2 를 개발하였으며, Xu와 Grandhi<sup>(8)</sup>는 TANA-2 의 수치적 부담을 피하기 위하여 TANA-3 를 개발하였다. Kim 등<sup>(9,10)</sup>은 TDQA를 제안하였으며, TANA-3 의 문제점을 지적하였다. 또한 Salajegheh<sup>(11)</sup>는 3 점을 이용한 근사화 방법을 소개하였다. Xu와 Grandhi<sup>(12)</sup>는 일련의 근사 함수를 누적인 다점 근사화 기법을 개발하였다. 이러한 연구자들의 노력은 근사화를 통한 근사 함수의 정확도에 중점을 두고 있다.

다른 한편으로는 순차적 근사 최적설계(Sequential Approximate Optimization, SAO)의 관점에서 볼록 근사화(convex approximation)를 통한 근사 최적해의 유일성과 최적해의 수렴성에 근거한 근사화 기법들이 제안되었다. 1986 년 Fleury와 Braibant<sup>(13)</sup>는 볼록 선형화(CONvex LINearization, CONLIN)를 제안하였으며, Svanberg<sup>(14)</sup>는 이동 점근선 방법(Method of Moving Asymptotes, MMA)을 개발하여 CONLIN방법을 일반화 시켰다. 1988 년 Smaoui, Fleury 와 Schmit 등<sup>(15)</sup>은 이차 설계 민감도 정보를 활용하여 Second-order MMA를 제안하였으며, 지금까지 많은 MMA family로 명명되는 기법들이 제안되었다.<sup>(16)</sup> 두 설계점의 정보를 이용하는 기법으로는 1996 년 Chickermane과 Gea<sup>(17)</sup>가 일반화된 볼록 근사화(Generalized Convex Approximation, GCA)를 제안하였다.

본 논문에서는 새로운 이점 볼록 근사화 방법(Two-Point Convex Approximation, TPCA)을 제안하였다. 제안한 방법에서는 기존의 이점 근사화 방법이 두 설계점의 도함수 값의 부호가 반대인 경우 가지는 단점을 보완하였으며, 볼록 함수(convex function) 근사화를 통하여 근사 최적설계의 효율을 높였다.

2 장에서는 기존의 이점 근사화 방법과 볼록 근사화 방법에 대하여 고찰하였다. 3 장에서는 제안한 방법에 대한 자세한 설명을 하였다. 4 장에서는 제안한 방법의 수치적 결과 및 효율에 대하여 논하였다. 5 장에서는 결론에 대하여 기술하였다.

## 2. 기존 근사 기법의 고찰

이미 설계점  ${}^0\mathbf{x}({}^0x_1, {}^0x_2, \dots, {}^0x_n)$  과  ${}^1\mathbf{x}({}^1x_1, {}^1x_2, \dots, {}^1x_n)$  에서는 그 함수 값과 도함수 값을 알고 있다고 가정한다. 여기서 왼쪽 상첨자 0 과 1 은 각각 이전과 현재 설계점을 의미한다. 하첨자는 각각의 설계변수를 말하며,  $n$  은 설계 변수의 개수이다.

### 2.1 볼록 선형화 기법

Fleury와 Braibant<sup>(13)</sup>에 의해 1986 년에 제안된 볼록 선형화 기법(CONvex LINearization, CONLIN)은 선형과 역 근사화의 조합된 형태이다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g({}^1\mathbf{x}) + \sum_i \frac{\partial g({}^1\mathbf{x})}{\partial x_i} (x_i - {}^1x_i) + \sum_i \frac{\partial g({}^1\mathbf{x})}{\partial x_i} (x_i - {}^1x_i) \left\{ \frac{{}^1x_i}{x_i} \right\} \quad (1)$$

여기서  $\tilde{g}(\mathbf{x})$  는 근사 함수를 나타내며,  $\Sigma_i^{(+)}$  ( $\Sigma_i^{(-)}$ ) 는 양(음)의 도함수 값을 갖는 설계변수에 대한 조합을 말한다.

CONLIN은 선형과 역 근사화에 비해 보다 보수적인 근사화이며, 볼록 함수로 근사화 하여 해의 유일성을 보장하는 장점이 있다. 그러나 너무 보수적 근사화의 경우 수렴속도가 늦어지거나, 충분히 보수적 근사화가 아닐 경우 진동하는 단점이 있다.

### 2.2 이동 점근선 방법

Svanberg<sup>(14)</sup>는 이동 점근선이라는  $L_i$ 와  $U_i$ 를 도입하여 CONLINE의 일반화된 형태로 1987 년 이동 점근선 방법(Method of Moving Asymptotes, MMA)을 제안하였으며, 매개변수로  $1/(x_i - L_i)$  와  $1/(U_i - x_i)$  를 사용하여 볼록성(convexity)과 보수성(conservativeness)을 조절하였다. 근사 함수의 형태는 식 (2)와 같다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g({}^1\mathbf{x}) + \sum_i p_i \left( \frac{1}{U_i - x_i} - \frac{1}{U_i - {}^1x_i} \right) + \sum_i q_i \left( \frac{1}{x_i - L_i} - \frac{1}{x_i - L_i} \right) \quad (2)$$

여기서

$$p_i = (U_i - {}^1x_i)^2 \frac{\partial g({}^1\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad q_i = -({}^1x_i - L_i)^2 \frac{\partial g({}^1\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (3)$$

이다.

SAO 과정에서  $L_i$ 와  $U_i$ 는 조절가능하며, 수렴에 진동 현상이 있을 경우 현 설계점 근처로 이동 시킴으로써 해의 수렴이 안정화 될 수 있다.  $L_i=0, U_i=+\infty$ 를 취하면 MMA는 CONLIN과 같으며,  $L_i=-\infty, U_i=+\infty$ 로써 SLP와 같다.

Fleury 등<sup>(15)</sup>은 매개변수로  $1/(x_i - d_i)$  를 사용하여 MMA방법을 확장하였다. 이때  $d_i$ 는 이차 민감도 정보를 이용하여 식 (4)와 같이 표현된다.

$$d_i = {}^1x_i + 2 \frac{\partial g / \partial x_i}{\partial^2 g / \partial x_i^2} \Big|_{{}^1\mathbf{x}} \quad (4)$$

또한, 볼록성과 보수성의 측면에서 MMA family로 불리는 여러 기법이 제안되었다.<sup>(16)</sup>

### 2.3 이점 지수 근사 기법

Fadel 등<sup>(7)</sup>은 이점 지수 근사 기법(Two-Point Exponential Approximation, TPEA)을 소개하였으며,

지수형 매개변수  $y_i = x_i^{p_i}$ ,  $i=1, \dots, n$  를 사용하여 1 차 테일러 급수로 전개한 근사식이다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} \left( \frac{x_i^{1-p_i}}{p_i} \right) (x_i^{p_i} - x_i^{p_i}) \quad (5)$$

이때, 지수  $p_i$ 는 이전 설계점에서 근사 함수의 도함수 값과 실제 도함수 값이 같다는 조건으로 구할 수 있다.

$$p_i = 1 + \left\{ \ln \left[ \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} / \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] / \ln [x_i / x_i] \right\} \quad (6)$$

TPEA에서  $p_i$ 는 -1~1로 제한되었다. 그러나 Wang과 Grandhi<sup>(4)</sup>는 구조 최적설계 문제에 대하여 이러한 제한을 없앴으로써 더 좋은 결과를 얻을 수 있다고 제안하였으며, 이를 이점 지수 근사화 기법의 변형(TPEA-change)이라고 한다.

2.4 이점 적응 비선형 근사 기법

Wang과 Grandhi<sup>(4)</sup>는 적응 매개 변수  $y_i = x_i^{p_i}$ ,  $i=1, \dots, n$  를 사용하여 이점 적응 비선형 근사 기법(Two-point Adaptive Nonlinear Approximation, TANA)을 제안하였다. 비선형 상수(nonlinearity index)  $r$ 은 모든 변수에 대하여 동일한 값을 취하며, 실제 함수 값과 근사 함수 값이 같다는 조건으로 계산된다. 또한, Wang과 Grandhi<sup>(4)</sup>는 보다 나은 근사화를 위해 TANA와 TPEA-change를 조합하여 더 많은 정보를 이용하여 TANA-1 과 TANA-2 를 제안하였다.

TANA-1 은 이전 설계점  $\mathbf{x}^0$ 에서 전개한 식 (5)에 보정항  $\epsilon_1$  을 더한 형태이다. 이전 설계점에서의 근사 함수이므로 현 설계점에서 실제 함수 값과 근사 함수 값이 다를 수 있다. 이 차이는 현 설계점에서 함수 값을 일치시킴으로써, 보정항인  $\epsilon_1$  로부터 보상 되어진다.

TANA-2 은 식 (5)와 동일한 현 설계점  $\mathbf{x}$ 에서의 전개식에 테일러 급수의 2 차항의 효과를 갖는 보정항  $\epsilon_2 \sum_{i=1}^n (x_i^{p_i} - x_i^{p_i})^2 / 2$  를 더한 형태이다. 여기서  $\epsilon_2$  는 매개변수에 대한 헤시언 행렬의 대각요소를 나타내며 상수이다. TANA-2 는 미지수  $p_i$ 와  $\epsilon_2$  를 결정하기 위하여  $n+1$  개의 방정식이 필요하다.  $n$ 개의 방정식은 이전 설계점  $\mathbf{x}^0$ 에서의 도함수 값을 일치시킴으로써, 마지막 방정식은 함수 값을 일치시킴으로써 얻을 수 있는데, 비선형 연립 방정식이다.

TANA-1 은 현 설계점에서의 도함수 값이 실제 도함수 값과 같지 않고, TANA-2 는 근사화 과정에서  $n+1$  개의 비선형 연립 방정식을 풀어야 하는 수치적 부담을 갖고 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해 Xu와 Grandhi<sup>(8)</sup>은 변할 수 있는 대각요소

만을 갖는 헤시언 행렬을 사용하여 불완전한 형태의 2 차 테일러 급수 전개로 TANA-3 를 제안하였는데, 현 설계점  $\mathbf{x}$ 에서 식 (7)과 같이 전개된다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} \left( \frac{x_i^{1-p_i}}{p_i} \right) (x_i^{p_i} - x_i^{p_i}) + \frac{1}{2} \epsilon_3(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^n (x_i^{p_i} - x_i^{p_i})^2 \quad (7)$$

여기서

$$\epsilon_3(\mathbf{x}) = H / \left[ \sum_{i=1}^n (x_i^{p_i} - x_i^{p_i})^2 + \sum_{i=1}^n (x_i^{p_i} - x_i^{p_i})^2 \right] \quad (8)$$

이다.  $p_i$ 와  $H$ 는 이전 설계점  $\mathbf{x}^0$ 에서의 설계 정보로부터 유일해를 가진다.  $p_i$ 는 식 (6)과 동일하게 구하여지며,  $H$ 는 식 (9)와 같다.

$$H = 2 \left[ g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{x_i^{1-p_i}}{p_i} (x_i^{p_i} - x_i^{p_i}) \right] \quad (9)$$

이때 식 (6)의 분자 또는 분모의 로그속의 비가 음수이거나, 분모가 1에 가까울 경우를 위한 수치적인 고려가 필요하다. 전자의 경우  $Xu$ 와 Grandhi<sup>(8)</sup>은  $p_i$ 를 1또는 -1로 두었다. 후자는 최적설계가 수렴영역에 가까운 경우로 생각하여 설계 변수의 변화가 적으므로 역시  $p_i$ 를 1또는 -1로 두었다. 반면  $p_i$ 가 너무 큰 값을 갖는 경우, 근사화에 지배적인 영향을 미치며 근사화가 나빠질 수가 있다. 이를 위하여 경계값  $p_{max} = 5$ 를 두었으며,  $|p_i| < p_{max}$ 로 제한하였다. 그러나, Kim 등<sup>(9,10)</sup>은 TANA-3의 문제점을 제기하였다.

2.5 일반화된 볼록 근사화

Chickermane과 Gea<sup>(17)</sup> 는 1996 년 두 점의 설계 정보를 사용하며, 현 설계점의 이차 미분 정보를 사용하는 일반화된 볼록 근사화(Generalized Convex Approximation, GCA)를 제안하였다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n b_i \left[ (x_i - c_i)^{p_i} - (x_i - c_i)^{p_i} \right] \quad (10)$$

이때, 미지수  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $p_i$ 를 구하기 위하여 현 설계점에서의 일차 및 이차 미분 정보의 일치와 이전 설계점에서의 일차 미분 정보의 일치 조건으로 비선형 연립방정식을 풀어야 했다. 또한, 미지수들의 적절한 조합으로 CONLIN, MMA 및 Second-order MMA를 표현할 수 있음을 보였다. 그러나, 이차 미분 정보의 수치적 부담에 따라 일차 미분 정보만을 이용한 근사식 또한 제안하였다.

2.6 이점 대각 이차 근사 기법

Kim 등<sup>(9,10)</sup>은 지수형 매개 변수를 사용하나, 식 (11)과 같이 새로이 이동 수준(shifting level)  $c_i$ 을 도입하여 이점 대각 이차 근사 기법(Two-point Diagonal Quadratic Approximation, TDQA)을 제안하

였다.

$$y_i = (x_i + c_i)^{p_i}, \quad i=1, \dots, n \quad (11)$$

$$\bar{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial y_i} (y_i - \mathbf{x}_i) + \eta \sum_{i=1}^n G_i(y_i - \mathbf{x}_i) \quad (12)$$

이때,  $c_i$ 는 설계변수의 영역을 모두 양의 영역으로 만들어 주는 역할을 하며, 근사화의 수치적 문제를 해결하기 위한 것이다. 지수  $p_i$ 는 TPEA와 같이 이전 설계점에서 실제 및 근사 함수의 도함수 일치 조건으로 구하여 진다.  $G_i$ 는 매개변수의 대각 헤시언 요소로서 매개변수에 대한 유한차분의 형태를 갖고 있으며, 지수  $p_i$ 계산의 오류를 보정한다. 마지막으로  $\eta$ 는 이전 설계점에서의 근사 잔차를 보정한다. 모든 미지수는 순차적으로 닫힌 해를 가진다.

### 3. 이점 볼록 근사 기법

#### 3.1 기본 개념

새로이 제안하는 이점 볼록 근사 기법(Two-Point Convex Approximation, TPCA)은 간편화된 GCA와 TDQA의 장점을 결합하였으며, 식 (11) 형태의 이동 수준을 갖는 지수형 매개 변수를 사용하여 테일러 급수 일치로 식 (13)와 같이 표현된다.

$$\bar{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial y_i} (y_i - \mathbf{x}_i) \quad (13)$$

TPCA에서 이동 수준  $c_i$ 는 TDQA와 같이 설정되었다. 지수  $p_i$ 의 계산은 일반적 이점 근사화 식의 경우와 같이 이전 설계점에서의 미분 정보 일치 조건으로부터 식 (14)와 같이 구해진다. 그러나 그 계산의 경우를 아래와 같이 설정하였다. 이때, 조건의 편의성을 위하여  ${}^0x_i < {}^1x_i$ 로 가정한다.

$$p_i = 1 + \left\{ \ln \left[ \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} / \frac{\partial g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} \right] / \ln \left[ \frac{{}^1x_i + c_i}{{}^0x_i + c_i} \right] \right\} \quad (14)$$

(i)  $|\partial g(\mathbf{x})/\partial x_i| / |\partial g(\mathbf{x}^0)/\partial x_i| > 1$

(a)  $\partial g(\mathbf{x})/\partial x_i > 0$ : 식 (14)

(b)  $\partial g(\mathbf{x})/\partial x_i < 0$ :  $p_i = -1$

(ii)  $0 \leq |\partial g(\mathbf{x})/\partial x_i| / |\partial g(\mathbf{x}^0)/\partial x_i| \leq 1$

(a)  $\partial g(\mathbf{x})/\partial x_i \geq 0$ :  $p_i = 1$

(b)  $\partial g(\mathbf{x})/\partial x_i < 0$ : 식 (14)

(iii)  $|\partial g(\mathbf{x})/\partial x_i| / |\partial g(\mathbf{x}^0)/\partial x_i| < 0$

(a)  $\partial g(\mathbf{x})/\partial x_i > 0$ :  $p_i = 2$

(b)  $\partial g(\mathbf{x})/\partial x_i < 0$ :  $p_i = -2$

지수  $p_i$ 의 조건 (i)의 (b)와 (ii)의 (a)는 식 (14)로

부터 계산된  $p_i$ 가 볼록 근사 함수를 이룰 수 없으므로 CONLIN으로 근사 함수를 형성한 것이다. 조건 (iii)은 식 (14)로  $p_i$ 를 계산할 수 없는 경우로서, 볼록성과 보수성을 위하여 설정되었다. 또한 TPCA의 지수  $p_i$ 의 계산에서 상·하한치의 제안은 두지 않았다.

이동 수준  $c_i$ 는 TDQA와 같으며, 다음과 같이 설정된다. 설계 변수  $x_i$ 가 임의의 작은 양수 값  $\zeta$ 보다 작을 경우에만  $c_i = |x_i| + 1$ 을 사용하며, 그 외 경우에는  $c_i = 0$ 으로 한다. 여기서  $x_i'$ 은 설계 변수  $x_i$ 의 하한 경계치를 의미하며,  $\zeta = 1 \times 10^{-3}$ 을 추천한다.

근사 함수의 볼록성을 살펴보기 위해 식 (15)와 같이 근사 함수의 이차 미분값의 양의 조건을 만족해야 한다.

$$\frac{\partial^2 \bar{g}(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} (p_i - 1) \frac{y_i^{p_i-2}}{y_i^{p_i-1}} \geq 0 \quad (15)$$

매개변수  $y_i$ 는 이동 수준  $c_i$ 의 조건으로부터 항상 양의 값을 갖는다. 따라서,  $|\partial g(\mathbf{x})/\partial x_i| (p_i - 1) \geq 0$ 를 만족하면 볼록 함수임을 알 수 있다. 그러므로, 현 설계점의 미분값이 양일 경우  $p_i \geq 1$ , 음일 경우  $p_i \leq -1$  값을 가지면 볼록 함수로 근사화 됨을 알 수 있다. 따라서, 모든 조건의 경우는 쉽게 볼록 함수임을 알 수 있다.

#### 3.2 순차적 근사 최적설계

TPCA방법을 이용한 SAO의 수치적인 과정은 아래와 같다.

단계 0: 초기 설계점  $\mathbf{x}_0$ 에서 목적함수  $f(\mathbf{x})$ 와 구속 조건  $g_j(\mathbf{x}), j = 1, \dots, m$ 의 함수 값과 도함수 값을 계산하고  $k = 1$ 으로 한다.

단계 1:  $k = 1$ 이면 보수 근사 기법을 사용하여 근사 함수를 생성하고, 그 외의 경우에는 TPCA를 사용하여 근사 함수를 생성한다.

단계 2: 근사 최적설계 문제를 푼다.

단계 3: 근사 최적해  $\bar{\mathbf{x}}_k$ 에서의 실제 함수 값을 계산한다. 만약  $|f(\bar{\mathbf{x}}_k) - f(\mathbf{x}_k)| \leq \tau_1 |f(\mathbf{x}_k)|$ 의 수렴영역에 있고,  $g_j(\bar{\mathbf{x}}_k) \leq \tau_2, j = 1, \dots, m$ 가 충족되었다면, 해가 수렴을 한 것으로 판단하고, 최적설계 과정을 종료한다. 다른 경우라면 단계 4로 간다.

단계 4:  $\bar{\mathbf{x}}_k$ 에서 목적 함수와 구속 조건의 실제 도함수 값을 계산한다. 그리고 설계 변수를  $\mathbf{x}_{k+1} = \bar{\mathbf{x}}_k$

로 설정한다.  $k = k + 1$ 로 하고, 단계 1로 돌아간다.

여기에서 단계 2에서의 구속 조건이 있는 근사 최적설계 문제를 위하여 본 논문에서는 DOT<sup>(18)</sup>의 SQP(Sequential Quadratic Programming)<sup>(18,19)</sup>를 사용하였다. SAO의 수치적 절차의 순서도를 Fig. 1에 도시하였다.

#### 4. 수치적 예제

제안한 TPCA의 성능을 검증하기 위하여 TPCA와 TDQA의 근사화 기법을 사용하여 SAO를 구성하였다. TDQA는 근사 함수의 정확도 측면에서 본 저자들에게 의해서 개발되었으며 그 우수성을 보였다.<sup>(9,10)</sup> 따라서, 근사 함수의 정확도 측면에서 우수한 TDQA와 근사 함수의 블록성 측면에서 제안된 TPCA의 최적해 결과를 비교하였다.

예제로 수학적인 예제로서 Rosen-Suzuki 문제<sup>(20)</sup>와 기계 설계 문제로서 용접 보 설계,<sup>(21)</sup> 코일 스프링 설계,<sup>(22)</sup> 기어 감속기 설계<sup>(23)</sup> 및 구조 설계로서 간단한 3 부재 트러스 문제<sup>(18)</sup>와 외팔보 설계 문제<sup>(18)</sup> 등이다. 모든 설계 문제에 대하여 단계 3의 허용 오차는  $\tau_1 = 1 \times 10^{-3}$ 와  $\tau_2 = 3 \times 10^{-3}$ 을 사용하였으며, 전체 SAO과정에서 이동 제한(move limit)은 0.4를 사용하였다.

##### 4.1 Rosen-Suzuki 예제

이 문제는 국부 최소치가 많은 수학적 문제로

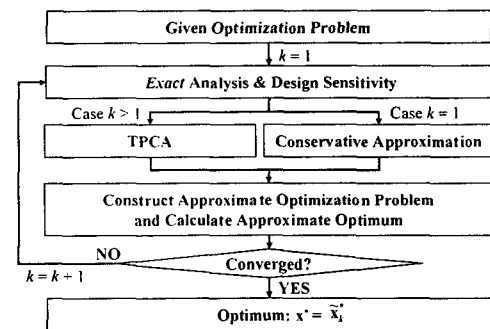


Fig. 1 Flowchart of SAO using TPCA

알고리즘의 우수성을 시험해보는 기본적인 문제이다. 4개의 설계변수와 3개의 비선형 부등식 구속 조건이 있다. 초기점은  $x_0 = (0, 0, 0, 0)^T$ 이고, 최적해는  $x^* = (0, 1, 2, -1)^T$ 에서  $f(x^*) = 56.0$ 으로 알려져 있으며, 구속조건 1, 3이 활성영역에 있다. 최적설계 정식화는 다음과 같다.

Minimize

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4 + 100$$

subject to

$$g_1(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4) / 8 - 1 \leq 0$$

$$g_2(x) = (x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_4) / 10 - 1 \leq 0$$

$$g_3(x) = (2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - x_2 - x_4) / 5 - 1 \leq 0$$

$$-10 \leq x_i \leq 10 \quad \text{for } i = 1, \dots, 4$$

기존의 문제는 설계변수에 대한 상·하한치 제한조건이 없으나, 본 논문에서는 이동 수준과 관련하여 제한하였다. 최적설계 결과를 Table 1에 나타내었다. ML은 이동 제한을 의미하며, IT는 근사 최적설계의 반복 회수이다. TPCA와 TDQA가 유사한 결과를 보이고 있으며, 비선형이 크며 국부 최소치가 많은 문제이므로 이동 제한에 다소 민감한 결과를 보이고 있다.

##### 4.2 기계 시스템 설계

[예제 1] 용접 보 설계

이 문제는 Reklaitis 등<sup>(21)</sup>이 소개한 문제로 널리 알려져 있는 문제이다. Fig. 2에서 보듯이 목적함수는 용접비용을 최소화하는 것이며 구속 조건은 용접시의 최대 전단응력( $g_1$ ), 보의 최대 수직 응력( $g_2$ ), 바의 좌굴 하중( $g_3$ ), 바 끝단의 최소 변위( $g_4$ ), 용접 두께와 바의 두께의 기하학적 조건( $g_5$ )이다. 설계변수는 용접두께( $x_1$ ), 용접 길이( $x_2$ ), 보의 폭( $x_3$ ), 보의 두께( $x_4$ )이고, 초기점은  $x_0 = (1, 7, 4, 2)^T$ 이다. 구속조건 1, 2, 3, 5가 최적해에서 활성조건이다. 최적해는  $x^* = (0.2444, 6.2187, 8.2915, 0.2444)^T$ 에서  $f(x^*) = 2.3811$  임이 알려져 있다. 최적설계의 정식화는 다음과 같다.

Table 1 Comparison of optimization results for Rosen-Suzuki problem

| ML        | Initial | TPCA         |              |              | TDQA         |              |              |
|-----------|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|           |         | 0.4          | 0.75         | 0.9          | 0.4          | 0.75         | 0.9          |
| $x_1$     | 0.0     | 3.49087E-02  | 4.41804E-03  | 1.28784E-03  | 2.11844E-02  | 4.12898E-03  | 5.33995E-03  |
| $x_2$     | 0.0     | 9.85749E-01  | 1.00242E+00  | 9.96749E-01  | 9.91557E-01  | 9.98285E-01  | 9.98283E-01  |
| $x_3$     | 0.0     | 1.97830E+00  | 1.99636E+00  | 2.00014E+00  | 1.98707E+00  | 1.99774E+00  | 1.99637E+00  |
| $x_4$     | 0.0     | -1.02738E+00 | -1.00297E+00 | -1.00092E+00 | -1.01600E+00 | -1.00213E+00 | -1.00531E+00 |
| $f$       | 100.0   | 5.60165E+01  | 5.60031E+01  | 5.59970E+01  | 5.60086E+01  | 5.60033E+01  | 5.59967E+01  |
| $g_{max}$ | -1.0    | -1.45670E-04 | -5.21477E-05 | 1.85951E-04  | -1.30974E-04 | -6.63370E-05 | 3.05900E-04  |
| IT        | -       | 15           | 10           | 9            | 16           | 10           | 8            |

Minimize  $f(\mathbf{x}) = 1.10471x_1^2x_2 + 0.0481x_3x_1(14.0 + x_2)$   
 subject to

$$g_1(\mathbf{x}) = \left( \frac{1}{2x_1^2x_2^2} + \frac{3(28 + x_2)}{x_1^2x_2(x_2^2 + 3(x_1 + x_3)^2)} + \frac{4.5(28 + x_2)^2(x_2^2 + (x_1 + x_3)^2)}{x_1^2x_2^2(x_2^2 + 3(x_1 + x_3)^2)^2} \right)^{1/2} - \frac{13.6}{6} \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = 0.09267 - x_3x_1^2(1 - 0.02823x_3) \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = 8.7808 - x_3^2x_2 \leq 0$$

$$g_4(\mathbf{x}) = x_1 - x_3 \leq 0$$

$$g_5(\mathbf{x}) = 16.8 - x_3^2x_1 \leq 0$$

$$0.125 \leq x_1 \leq 10, 0.1 \leq x_2 \leq 10 \text{ for } i = 2, 3, 4$$

Table 2 에 최적설계의 결과를 나타내었다. TPCA 와 TDQA의 최적해는 유사한 결과를 보이고 있으며, 반복 회수에서 다소 우수한 결과를 보이고 있다. 다른 이동 제한 값으로도 유사한 값의 최적해 결과를 보였으며, 반복 회수의 증감은 무시할 수 있었다.

[예제 2] 코일 스프링 설계

이 예제는 Fig. 3 과 같이 주어진 코일 스프링의 중량을 최소화하는 문제이며, 구속 조건으로는 최소 변위( $g_1$ ), 전단 응력( $g_2$ ), 서지(surge) 진동수( $g_3$ )와 스프링의 외경 제한( $g_4$ )이 있다. 설계 변수는 와이어의 직경( $x_1$ ), 유효 코일 직경( $x_2$ )과 코일의 유효 감긴 회수( $x_3$ )이다. 최적설계 정식화는 다음과 같다.

Minimize  $f(\mathbf{x}) = (x_3 + 2)x_2x_1^2$

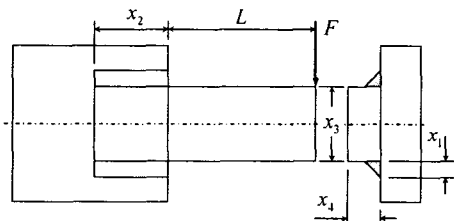


Fig. 2 A welded beam

Table 2 Comparison of optimization results for a welded beam design

|            | Initial      | TPCA        | TDQA        |
|------------|--------------|-------------|-------------|
| $x_1$      | 1.0          | 2.44555E-01 | 2.44460E-01 |
| $x_2$      | 7.0          | 6.21484E+00 | 6.21211E+00 |
| $x_3$      | 4.0          | 8.29064E+00 | 8.29228E+00 |
| $x_4$      | 3.0          | 2.44533E-01 | 2.44487E-01 |
| $f$        | 10.0         | 2.38227E+00 | 2.38152E+00 |
| $g_{\max}$ | -5.00000E-01 | 8.78464E-05 | 3.84815E-04 |
| IT         | -            | 10          | 11          |

subject to

$$g_1(\mathbf{x}) = 1 - x_2^3x_3/71875x_1^4 \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{4x_2^2 - x_1x_2}{12566(x_2x_3^3 - x_1^4)} + \frac{1}{5108x_1^2} - 1 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = 1 - 140.45x_1/x_2^3x_3 \leq 0$$

$$g_4(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)/1.5 - 1 \leq 0$$

$$0.005 \leq x_1 \leq 5, 0.05 \leq x_2 \leq 5, 1 \leq x_3 \leq 15$$

초기 설계점  $\mathbf{x}_0 = (1, 2, 3)^T$  이고, 구속 조건  $g_1$  과  $g_2$  가 최적해에서 활성조건이며, 최적해는  $f(\mathbf{x}^*) = 0.01268$  로 주어져 있다.<sup>(22)</sup>

최적화 결과를 Table 3 에 나타내었다. 최적설계의 결과는 이동 제한 값에 민감하였으며, Table 3 에서 알 수 있듯이 두 경우 모두 국부 최적해로 수렴한 것을 알 수 있다. 그러나, 이러한 결과로 근사화 방법의 효율성을 판단할 수는 없으며, 국부 최적해에 수렴하는 경향은 기울기 기반 최적설계 알고리즘이 갖고 있는 문제점이다. 본 문제의 경우 TDQA와 TPCA의 최적화 반복 회수는 동일하며, TDQA가 TPCA보다 나은 최적해 결과를 주었음을 알 수 있다.

[예제 3] 기어 감속기 설계

Fig. 4 의 기어 감속기 설계는 감속장치의 중량을 최소화하는 것이 목적이며, 기어의 굽힘 및 접촉 응력, 축의 횡방향 치짐 및 응력, 공간적 제약과 경험에 의하여 설정된 기하학적인 구속조건이 있다. 설계변수는 기어의 치폭( $x_1$ ), 모듈( $x_2$ ), 피너언의 이수( $x_3$ )와 베어링 1 의 사이 거리( $x_4$ ), 베어링 2 의 사이 거리( $x_5$ ), 축 1 의 직경( $x_6$ ) 및 축 2 의 직경( $x_7$ )이다. 초기점  $\mathbf{x}_0 = (3.1, 0.75, 22.5, 7.8, 7.8, 3.4, 5.25)^T$ 이다.<sup>(23)</sup> 최적설계 정식화는 다음과 같다.

Minimize

$$f(\mathbf{x}) = 0.7854x_1x_2^2(3.3333x_2^2 + 14.9334x_3 - 43.0934) - 1.508x_1(x_6^2 + x_7^2) + 7.477(x_6^3 + x_7^3) + 0.7854(x_4x_6^2 + x_5x_7^2)$$

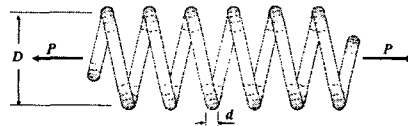


Fig. 3 A Coil spring

Table 3 Comparison of optimization results for the coil spring design

|            | Initial | TPCA         | TDQA        |
|------------|---------|--------------|-------------|
| $x_1$      | 1.0     | 6.40209E-02  | 6.23027E-02 |
| $x_2$      | 2.0     | 7.32052E-01  | 6.69890E-01 |
| $x_3$      | 3.0     | 3.08838E+00  | 3.60213E+00 |
| $f$        | 10.0    | 1.52674E-02  | 1.45670E-02 |
| $g_{\max}$ | 1.0     | -3.51915E-04 | 8.23648E-05 |
| IT         | -       | 11           | 11          |

subject to

$$\begin{aligned}
 g_1(\mathbf{x}) &= 27/(x_1 x_2^2 x_3) - 1 \leq 0 \\
 g_2(\mathbf{x}) &= 397.5/(x_1 x_2^2 x_3^2) - 1 \leq 0 \\
 g_3(\mathbf{x}) &= 1.93 x_1^3 / (x_1 x_3 x_6^4) - 1 \leq 0 \\
 g_4(\mathbf{x}) &= 1.93 x_3^3 / (x_2 x_3 x_7^4) - 1 \leq 0 \\
 g_5(\mathbf{x}) &= \left[ \left( \frac{745 x_1}{x_2 x_3} \right)^2 + 16.9 \times 10^6 \right]^{0.5} / (0.1 x_6^3) - 1100 \leq 0 \\
 g_6(\mathbf{x}) &= \left[ \left( \frac{745 x_2}{x_2 x_3} \right)^2 + 15.79 \times 10^7 \right]^{0.5} / (0.1 x_7^3) - 850 \leq 0 \\
 g_7(\mathbf{x}) &= x_2 x_3 / 40 - 1 \leq 0 \\
 g_8(\mathbf{x}) &= 5 - x_1 / x_2 \leq 0 \\
 g_9(\mathbf{x}) &= x_1 / x_2 - 12 \leq 0 \\
 g_{10}(\mathbf{x}) &= (1.5 x_6 + 1.9) / x_1 - 1 \leq 0 \\
 g_{11}(\mathbf{x}) &= (1.1 x_7 + 1.9) / x_3 - 1 \leq 0 \\
 2.6 \leq x_1 \leq 3.6, \quad 0.7 \leq x_2 \leq 0.8, \quad 17 \leq x_3 \leq 28, \\
 7.3 \leq x_4, x_5 \leq 8.3, \quad 2.9 \leq x_6 \leq 3.9, \quad 5.0 \leq x_7 \leq 5.5
 \end{aligned}$$

Table 4 에 최적설계 결과를 나타내었다. TDQA와 TPCA 모두 우수한 성능으로 같은 값의 최적해를 찾았으며, 이동 제한에 영향을 받지 않았다.

4.3 구조 설계

[예제 1] 3 부재 트러스 설계

이 예제는 Fig. 5 와 같은 3 부재 트러스의 최적 설계 문제로서 전형적인 구조 최적설계이다.<sup>(18)</sup> 목

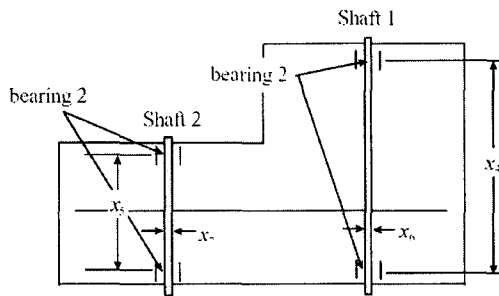


Fig. 4 A gear speed reducer system

Table 4 Comparison of optimization results for the gear speed reducer system design

|           | Initial     | TPCA         | TDQA         |
|-----------|-------------|--------------|--------------|
| $x_1$     | 3.1         | 3.50856E+00  | 3.50856E+00  |
| $x_2$     | 0.75        | 7.00000E-01  | 7.00000E-01  |
| $x_3$     | 22.5        | 1.70000E+01  | 1.70000E+01  |
| $x_4$     | 7.8         | 7.30000E+00  | 7.30000E+00  |
| $x_5$     | 7.8         | 7.71899E+00  | 7.71899E+00  |
| $x_6$     | 3.4         | 3.35169E+00  | 3.35169E+00  |
| $x_7$     | 5.25        | 5.28962E+00  | 5.28962E+00  |
| $f$       | 4.14483E+03 | 3.00004E+03  | 3.00004E+03  |
| $g_{max}$ | 2.09677E-01 | -5.34040E-05 | -5.34040E-05 |
| IT        | -           | 3            | 3            |

적합수는 구조물의 중량(체적)을 최소화하는 문제이다. 설계 변수는 부재 1 과 3 의 면적( $x_1$ )과 부재 2 의 면적( $x_2$ )이며, 대칭 조건으로 부재 1 과 3 을 같게 하였다. 구속조건은 부재의 인장 응력 조건이다. 실제 문제는 12 개의 구속조건을 가지나 아래와 같이 간소화 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize } f(\mathbf{x}) &= 2\sqrt{2}x_1 + x_2 \\
 \text{subject to } g_1(\mathbf{x}) &= \frac{2x_1 + \sqrt{2}x_2}{2x_1(x_1 + \sqrt{2}x_2)} - 1 \leq 0 \\
 g_2(\mathbf{x}) &= 1/(x_1 + \sqrt{2}x_2) - 1 \leq 0 \\
 0.01 \leq x_1, x_2 &\leq 100
 \end{aligned}$$

Table 5 에 최적설계 결과를 나타내었다. 지수계산에서 특별한 경우가 없었던 것으로 판단되며 같은 최적해에 수렴했다. Table 6 에는 DOT로 된 결과를 나타내었다. 여기서 NF와 NG는 각각 목적함수 및 구속조건수의 함수 계산과 도함수 계산 회수를 의미한다. TPCA와 TDQA는 모두 IT = NF = NG 이다. 두 근사 최적설계와 DOT의 최적해는 모두 유사한 결과를 보이고 있으며, SQP를 제외하면 두 근사 최적설계 모두 적은 민감도 계산을 하였다.

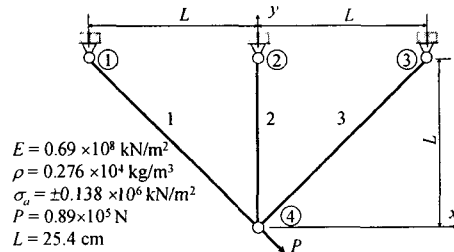


Fig. 5 A 3-bar truss

Table 5 Comparison of optimization results for the 3-bar truss design

|           | Initial      | TPCA        | TDQA        |
|-----------|--------------|-------------|-------------|
| $x_1$     | 1.0          | 7.79233E-01 | 7.79233E-01 |
| $x_2$     | 1.0          | 4.35058E-01 | 4.35058E-01 |
| $f$       | 3.82843E+00  | 2.63906E+00 | 2.63906E+00 |
| $g_{max}$ | -2.92893E-01 | 2.08469E-04 | 2.08469E-04 |
| IT        | -            | 5           | 5           |

Table 6 Optimization results of DOT for the 3-bar truss design

|           | MMFD        | SLP         | SQP          |
|-----------|-------------|-------------|--------------|
| $x_1$     | 7.78580E-01 | 7.81717E-01 | 7.80452E-01  |
| $x_2$     | 4.31568E-01 | 4.26667E-01 | 4.32221E-01  |
| $f$       | 2.63373E+00 | 2.63770E+00 | 2.63967E+00  |
| $g_{max}$ | 2.18909E-03 | 5.98046E-04 | -7.35889E-05 |
| NF        | 25          | 16          | 10           |
| NG        | 5           | 12          | 4            |

그러나, SQP는 두 근사 최적설계에 비하여 2 배의 함수 계산을 하였다. 따라서, 두 근사 최적설계가 DOT에 비하여 우수함을 알 수 있다. 구조 해석에서 도함수 계산을 비용은 구조 해석에 이미 분해된 시스템 행렬에 가상 하중을 주어 계산하므로 구조 해석에 비하여 값싸다. 따라서, TPCA의 결과가 DOT로 직접 풀 결과보다 모두 우수하다 하겠다.

[예제 2] 외팔보 설계

본 문제는 상용 최적설계 프로그램인 DOT<sup>(18)</sup>에 수록되어 있는 외팔보 설계 문제이다. 구조 문제에서 많이 사용되는 외팔보 구조물은 Fig. 6에 보이는 바와 같이 각 단편의 폭( $b_i$ )과 높이( $h_i$ )에 따른 구조 형태를 취하고 있고, 설계변수는 각 단편의 폭과 높이로써 설정된다. 그러므로 설계변수의 개수는 단편 개수( $M$ )의 2 배로써 정해진다. 목적함수는 재료 부피( $V$ )를 최소화 하는 것이고, 제한조건은 각 단편의 왼쪽 끝에서의 응력에 대한 한계( $g_1 \sim g_M$ ), 각 단편의 높이가 폭의 20 배를 넘어서지 않아야 한다는 기하학적인 요구 조건( $g_{M+1} \sim g_{2M}$ )과 주어진 하중 하에서의  $y$  축 변위(deflection) 제한( $g_{2M+1}$ )이다. Fig. 6은 단편 개수  $N=5$  일 때의 형상이다. 본 문제에 대한 최적해는 참고 문헌을 기준으로  $N=5$  일 경우  $f(x^*)=65,368$  이다. 단편 개수가 증가함으로써 최적해는 감소하며, 최적설계 정식화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } V &= \sum_{i=1}^N b_i h_i l_i \\ \text{subject to } \sigma_i / \bar{\sigma} - 1 &\leq 0, \quad i = 1, \dots, N \\ h_i - 20b_i &\leq 0, \quad i = 1, \dots, N \\ y_N / \bar{y} - 1 &\leq 0 \\ 1 \leq b_i &\leq 100, \quad 5 \leq h_i \leq 100, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Table 7에 단편 개수  $N=5$  일 때의 이동 제한에 따른 결과를 나타내었다. 두 근사화 모두 이동 제한에 반복 회수의 차이를 보이고는 있으나, TPCA

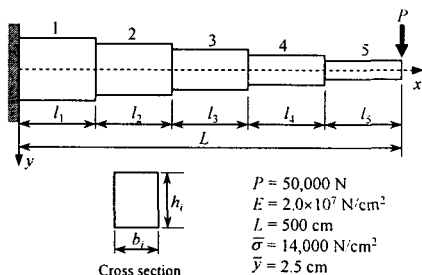


Fig. 6 A cantilevered beam

가 목적함수와 반복 회수에서 좋은 결과를 보이고 있다. Table 8에는 이동 제한 0.4를 사용하여 단편 개수의 변화에 따른 최적설계의 결과를 나타내었다. 유사한 최적해 결과를 보이고 있으나 TPCA가 반복 회수에서 우수한 경향을 보임을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 기존의 블록 근사화 기법과 이점 근사화 기법에 대하여 정리하였으며, 이동 수준을 갖는 지수형 매개 변수를 사용하여 이점 블록 근사 기법(Two-Point Convex Approximation, TPCA)을 제안하였다. 본 방법에서 매개 변수는 TDQA와 같은 이동 수준을 취하여 기존의 이점 근사 기법들이 안고 있는 설계 변수가 0 근방 또는 음수일 때의 수치적인 어려움을 극복하였다. 또한 제안한 방법은 기존의 GCA의 블록 근사화를 보완 하였다.

TPCA와 TDQA의 근사 기법을 사용하여, 대표적 수치적 예제와 3 가지 기계 시스템 설계 문제와 2 가지의 구조 설계 문제의 경우에 대하여 순차적 근사 최적설계를 수행하였다. 이러한 예제를 통하여 TPCA와 TDQA의 성능을 비교하였으며, 다소의 차이는 있으나 TDQA의 최적해와 유사 또는 우수한 결과를 보임으로써 제안한 근사 기법의 유용성을 보였다.

제안한 방법은 블록 근사화이다. 그러나 본 논문에서는 근사 최적설계 문제를 기존의 최적화 프로그램(DOT)을 사용하여 해결하였다. 따라서, 향후에는 dual 문제로 정의하여 보다 근사 최적화의 효율을 높이는 연구를 수행하고자 한다.

Table 7 Comparison of optimization results for the cantilevered beam design using 5 segments

| ML       |            | 0.4        | 0.75       | 0.9        |
|----------|------------|------------|------------|------------|
| TP<br>CA | $V$        | 6.5417E+04 | 6.5408E+04 | 6.5428E+04 |
|          | $g_{\max}$ | 1.5320E-04 | 1.6251E-03 | 2.4143E-04 |
|          | IT         | 8          | 8          | 9          |
| TD<br>QA | $V$        | 6.5420E+04 | 6.5423E+04 | 6.5420E+04 |
|          | $g_{\max}$ | 5.8486E-05 | 5.7980E-13 | 2.1933E-05 |
|          | IT         | 11         | 9          | 10         |

Table 8 Comparison of optimization results for the cantilevered beam design using  $N$  segments

| $N$      |            | 10         | 25         | 50         |
|----------|------------|------------|------------|------------|
| TP<br>CA | $V$        | 6.4239E+04 | 6.3690E+04 | 6.3712E+04 |
|          | $g_{\max}$ | 2.3048E-04 | 2.9628E-03 | 1.4637E-04 |
|          | IT         | 7          | 11         | 9          |
| TD<br>QA | $V$        | 6.4246E+04 | 6.3782E+04 | 6.3708E+04 |
|          | $g_{\max}$ | 2.5932E-05 | 5.8051E-13 | 1.8152E-04 |
|          | IT         | 10         | 12         | 13         |



## 후 기

본 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다. 이에 감사를 드립니다.

## 참고문헌

- (1) Schmit, L.A. and Farshi, B., 1974, "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis," *AIAA Journal*, Vol. 12, pp. 692~699.
- (2) Schmit, L.A. and Miura, H., 1976, "A New Structural Analysis/Synthesis Capability -ACCESS I," *AIAA Journal*, Vol. 14, pp. 661~671.
- (3) Schmit, L.A. and Fleury, C., 1980, "Structural Synthesis by Combining Approximation Concepts and Dual Methods," *AIAA Journal*, Vol. 18, pp. 1252~1260.
- (4) Wang, L.P. and Grandhi, R.V., 1995, "Improved Two-Point Function Approximation for Design Optimization," *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 9, pp. 1720~1727.
- (5) Wang, L.P. and Grandhi, R.V., 1996, "Multipoint Approximations: Comparisons Using Structural Size, Configuration and Shape Design," *Structural Optimization*, Vol. 12, pp. 177~185.
- (6) Wang, L.P. and Grandhi, R.V., 1996, "Multivariate Hermite Approximation for Design Optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 787~803.
- (7) Fadel, G.M., Riley, M.F. and Barthelemy, J.F.M., 1990, "Two Point Exponential Approximation Method for Structural optimization," *Structural Optimization*, Vol. 2, pp. 117~124.
- (8) Xu, S. and Grandhi, R.V., 1998, "An Effective Two-Point Function Approximation for Design Optimization," *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 39<sup>th</sup> Structural, Structural Dynamics, and Materials Conference, Long beach CA, April 20-23*, pp. 2181~2191.
- (9) Kim Min-Soo, Kim Jong-Rip, Jeon Jae-Young and Choi Dong-Hoon, 2001, "Design Optimization Using Two-Point Diagonal Quadratic Approximation," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 25, No. 1, pp. 1423~1431.
- (10) Kim Min-Soo, Kim Jong-Rip, Jeon Jae-Young and Choi Dong-Hoon, 2001, "Efficient Mechanical System Optimization Using Two-Point Diagonal Quadratic Approximation in the Nonlinear Intervening Variable Space," *KSME International Journal*, Vol. 15, No. 9, pp. 1257~1267.
- (11) Salajegheh, E., 1997, "Optimum Design of Plate Structures Using Three-Point Approximation," *Structural Optimization*, Vol. 13, No. 2-3, pp. 142~147.
- (12) Xu, S. and Grandhi, R.V., 2000, "Multipoint Approximation Development: Thermal Structural Optimization Case Study," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, pp. 1151~1164.
- (13) Fleury, C. and Braibant, V., 1986, "Structural optimization: A new Dual method Using Mixed Variables," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 409~428.
- (14) Svanberg, K. 1987, "The Method of Moving Asymptotes-A New Method for Structural Optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 359~373.
- (15) Smaoui, H, Fleury, C. and Schmit, L.A., 1988, "Advances in Dual Algorithms and Convex Approximation methods," *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE 29th Structures, Structural Dynamics, and materials Conference*, pp. 1339~1347.
- (16) Bruyneel, M., Duysinx, P. and Fleury, C., 2002, "A family of MMA Approximations for Structural Optimization," *Struct Multidisc Optim*, Vol. 24, pp. 263~276.
- (17) Chickermane, H. and Gea H.C., 1996, "Structural optimization Using A New Local Approximation Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 829~846.
- (18) Vanderplaats, G.N., 1995, *DOT Users Manuel: version 4.20*, Vanderplaats Research & Development, Inc., Colorado Springs.
- (19) Vanderplaats, G.N., 1984, *Numerical Optimization Techniques for Engineering with Applications*, McGraw-Hill, New York, pp. 195~199.
- (20) Rosen, J.B. and Suzuki, S., 1965, "Construction of Nonlinear programming Test problems," *Communication of Association for Computing Machinery*, Vol. 8, pp. 113.
- (21) Reklaitis, G.V., Ravindran, A. and Ragsdell, K.M., 1983, *Engineering Optimization Methods and Applications*, John Wiley & Sons, New York. pp. 11~15.
- (22) Arora, J.S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill, New York, pp. 489~493.
- (23) Singiresu S. Rao, 1996, *Engineering Optimization: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, New York, pp. 536~537.