

두 기하학적 비선형 효과들을 고려한 대변위 강체운동을 하는 보의 동적 모델링 방법

김 나 은* · 유 흥 희†

(2002년 12월 9일 접수, 2003년 4월 18일 심사완료)

Dynamic Modeling Method for Beams Undergoing Overall Rigid Body Motion Considering Two Geometric Non-linear Effects

Na-Eun Kim and Hong Hee Yoo

Key Words : Dynamic Modeling Method(동적 모델링 방법), Overall Rigid Body Motion(대변위 강체운동), Geometric Non-linear Effect(기하학적 비선형 효과), Mode Approximation Method(모드 근사화 방법)

Abstract

A dynamic modeling method for beams undergoing overall rigid body motion is presented in this paper. Two special deformation variables are introduced to represent the stretching and the curvature and are approximated by the assumed mode method. Geometric constraint equations that relate the two special deformation variables and the cartesian deformation variables are incorporated into the modeling method. By using the special deformation variables, all natural as well as geometric boundary conditions can be satisfied. It is shown that the geometric nonlinear effects of stretching and curvature play important roles to accurately predict the dynamic response when overall rigid body motion is involved.

1. 서 론

대변위 강체운동을 하는 보 형태의 구조물은 항공기나 헬리콥터와 같은 항공우주 구조에서부터, 터어빈이나 터어보엔진과 같은 일반기계류 등까지 주변에서 다양하게 발견된다. 이러한 구조물들이 적절한 성능을 발휘할 수 있도록 설계 하기 위해서는 그 동적 특성을 정확하게 예측할 수 있어야 하며 이를 위해서는 이들의 동적 해석을 수행하기 위한 정확한 모델링 방법의 개발이 필수적이다.

강체운동을 하는 구조물의 동적 반응을 예측하기 위해서 현재 가장 널리 사용하고 있는 방법은 고전적 선형 모델링방법이며⁽¹⁻³⁾ 이 방법은 공식 전개가 간결하고, 시스템의 자유도를 적절히 줄일 수 있는 장점을 갖고 있으나 기하학적 비선형성이

중요한 역할을 하는 경우에는 종종 부정확한 동적 해석 결과를 제공할 수 있다는 사실이 밝혀졌다. 그러므로 고전적 선형 모델링의 이러한 문제점을 해결하기 위해서 여러 가지 비선형 모델들이⁽⁴⁻⁵⁾ 등장하게 되는데, 이들은 스트레인과 변위 사이의 비선형적 관계를 추가 고려하여 해석의 정확성을 얻을 수 있었으나, 자유도를 임의의 경계조건인 경우 줄일 수가 없어서 그 효율성에 문제가 제기되었다. 비선형성의 추가 고려로 인한 계산시간의 증가는 선형 모델링에 비해 통상적으로 수십배에 다다른다. 좀 더 최근에는 이러한 문제점을 해결하기 위해 비선형 모델링이 가지고 있는 정확성을 유지하면서 효율성을 확보하는 방법들이⁽⁶⁻⁸⁾ 소개되었지만 이 모델링 방법들은 경계조건의 종류에 따라 해석범주가 제한되는 단점을 내포하고 있다.

실제 공학적 구조물 중에는 외팔보로 이상화될 수 있는 구조물들이 많이 등장한다. 따라서 문헌 조사를 수행해보면 구조역학관련 문헌 중에는 외팔보에 관한 문헌이 가장 많이 존재하며 또한 앞

* 한양대학교 대학원

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0446 FAX : (02)2293-5070

에서 이미 언급된 대로 정확성을 확보하기 위한 비선형성을 다룬 문헌들도 많이 등장한다. 이들 비선형성과 관련된 문헌들을 분석해보면 고려되는 비선형성도 두 가지 종류들로 분류할 수 있는데 그 하나는 인장방향 비선형성이며 또 다른 하나는 굽힘방향 비선형성이다. 기존 문헌들에는 그러나 이러한 비선형성들이 어느 경우에 구조물의 동적 반응에 중요한 영향을 미치는 지에 대해 정확한 언급이 없다. 더구나 임의의 경계 조건들을 갖는 경우에 이런 비선형성들을 고려하며 해석자유도를 줄일 수 있는 일반적인 방법이 존재하지 않는다는 문제점도 여전히 존재하고 있다.

본 논문에서는 인장 및 굽힘 방향 비선형성을 동시에 고려하며 모드근사화 방법을 통해 해석의 자유도를 조절할 수 있는 대변위 강체운동을 하는 보의 동적 모델링 방법을 제시하였다. 본 논문은 또한 두 가지 비선형성이 어떤 대변위 강체운동의 조건 하에서 중요한 역할을 하게 되는지에 대해 그 영향을 확인하는데 주요 연구목적들을 두었다.

2. 운동방정식

본 논문에서는 모델링 방법을 설명하기 위해서 보의 운동방정식을 유도하는데, 다음의 가정들이 사용되었다. 첫째, 보는 균질하고 등방성을 가지며 단면은 대칭으로 일정하다. 둘째, 전단 및 비틀림 그리고 단면의 회전관성 효과는 고려하지 않는다. 이 가정들은 연구 초점을 대변위 강체운동에 의한 비선형성 효과에 맞추고 모델링 과정을 간명하게 설명하기 위한 것이다.

Fig.1 은 대변위 강체 평면운동을 하는 기준틀 A 에 고정된 보의 변형 전과 후의 모습을 나타낸 것이다. 보가 변형되기 전 기준점 O 에서 임의의 점 P* 까지의 거리를 x 라 하고 그 점이 변형된 양을 \vec{u} 로 나타낸다. 보의 탄성 축 상 임의의 점 P 의 속도는 다음과 같다.

$$\vec{v}^P = \vec{v}^O + {}^A\vec{v}^P + \vec{\omega}^A \times (x\hat{a}_1 + \vec{u}) \quad (1)$$

여기서 \vec{v}^O 는 O 점의 속도이며 ${}^A\vec{v}^P$ 는 기준틀 A 에서 관찰한 P 점의 속도를 의미한다. 식 (1)에 나타나는 벡터들을 기준틀 A 에 고정된 좌표계의 단위벡터 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ 의 성분으로 나타내면,

$$\vec{v}^O = v_1\hat{a}_1 + v_2\hat{a}_2 \quad (2)$$

$${}^A\vec{v}^P = \dot{u}_1\hat{a}_1 + \dot{u}_2\hat{a}_2 \quad (3)$$

$$\vec{\omega}^A = \omega_3\hat{a}_3 \quad (4)$$

$$\vec{u} = u_1\hat{a}_1 + u_2\hat{a}_2 \quad (5)$$

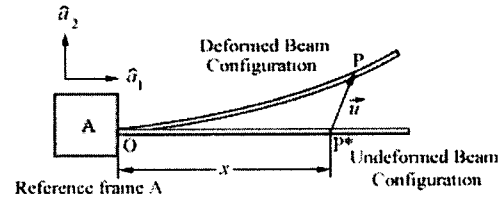


Fig. 1 Configuration of a cantilever beam

식 (1)에 식 (2)~(5)를 대입하여 정리하면,

$$\vec{v}^P = [v_1 + \dot{u}_1 - \omega_3 u_2]\hat{a}_1 + [v_2 + \dot{u}_2 + \omega_3(x + u_1)]\hat{a}_2 \quad (6)$$

가정에 의해서 보의 단면 회전 관성이 고려되지 않으므로 운동에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho (\vec{v}^P)^2 dx \quad (7)$$

여기서 ρ 는 보의 단위 길이 당 질량을, L 은 보의 길이를 나타낸다. 또한 보의 탄성에너지는 전단과 비틀림을 무시할 경우 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA \epsilon_{11}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \kappa_3^2 dx \quad (8)$$

여기서 E 는 Young 의 계수, A 는 보의 단면적을 나타내고 I 는 보의 단면 2 차 모멘트를 나타낸다. 그리고 ϵ_{11} 과 κ_3 는 인장방향 스트레인과 \hat{a}_3 방향 곡률을 나타낸다. 여기서 ϵ_{11} 과 κ_3 을 직교변위에 대해서 비선형도를 2 차까지 고려하여 나타내면 (곡률 비선형성은 참고문헌[9] 참조) 다음과 같다.

$$\epsilon_{11} = u_{1,x} + \frac{1}{2}(u_{2,x})^2 \quad (9)$$

$$\kappa_3 = u_{2,xx} [1 - 2u_{1,x} - \frac{3}{2}(u_{2,x})^2] - u_{1,xx} u_{2,x} \quad (10)$$

여기서 하첨자 $(\cdot)_{,x}$ 는 $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$ 를 나타낸다. 이러한 비선형성은 고전적 선형 스트레인 이론에서는 무시되나 정확한 스트레인을 얻으려면 고려되어야 한다. 본 논문에서는 직교 변위 성분 u_1, u_2 와 함께 ϵ_{11}, κ_3 를 모드 근사법을 이용하여 다음 같이 근사화 하였다.

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \phi_{1i} q_{1i} \quad (11)$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{n_2} \phi_{2i} q_{2i} \quad (12)$$

$$\epsilon_{1i} = \sum_{i=1}^{\nu_1} \psi_{1i} p_{1i} \quad (13)$$

$$\kappa_3 = \sum_{i=1}^{\nu_2} \psi_{2i} p_{2i} \quad (14)$$

여기서 $\phi_{1i}, \phi_{2i}, \psi_{1i}, \psi_{2i}$ 는 모드함수, $q_{1i}, q_{2i}, p_{1i}, p_{2i}$ 는 모드좌표, $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ 는 모드좌표수를 나타낸다. ϕ_{1i} 와 ϕ_{2i} 는 인장 및 굽힘 진동 고유모드를 사용하며 ψ_{1i} 와 ψ_{2i} 는 인장 및 굽힘 고유모드의 1계 및 2계 미분을 각각 사용한다.

식 (11)-(14)들을 사용하여서 운동에너지와 탄성 에너지를 근사화하여 나타내면,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left[(v_1 + \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i} \dot{q}_{1i} - \omega_3 \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i} \dot{q}_{2i})^2 \right. \\ \left. + (v_2 + \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i} \dot{q}_{2i} + \omega_3 (x + \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i} q_{1i}))^2 \right] dx \quad (15)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\sum_{i=1}^{\nu_1} \psi_{1i} p_{1i} \right)^2 dx \\ + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\sum_{i=1}^{\nu_2} \psi_{2i} p_{2i} \right)^2 dx \quad (16)$$

마찬가지로 식 (9)와 (10)을 근사화하여 나타내면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{\nu_1} \psi_{1i} p_{1i} = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i,x} q_{1i} + \sum_{i=1}^{\mu_2} \frac{1}{2} \left(\sum_i \phi_{2i,x} q_{2i} \right)^2 \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{\nu_2} \psi_{2i} p_{2i} = \left(\sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i,xx} q_{2i} \right) \left[1 - 2 \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i,x} q_{1i} - \frac{3}{2} \left(\sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i,x} q_{2i} \right)^2 \right] \\ - \left(\sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i,xx} q_{1i} \right) \left(\sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i,x} q_{2i} \right) \quad (18)$$

식 (15)와 (16)에서 운동에너지는 $q_{1i}, q_{2i}, \dot{q}_{1i}, \dot{q}_{2i}$ 의 함수로, 스트레인 에너지는 p_{1i}, p_{2i} 의 함수로 나타나며, p_{1i}, p_{2i} 는 식 (17)과 (18)의 스트레인-변위 관계에서 q_{1i}, q_{2i} 의 함수로 표현된다. 운동에너지와 탄성 에너지를 이용하여 Hamilton principle 을 적용하면 시스템의 운동방정식과 경계 조건을 구할 수 있는데 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T}{\partial q_{1i}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{1i}} \right) - \sum_{k=1}^{\nu_1} \frac{\partial V}{\partial p_{1k}} \frac{\partial p_{1k}}{\partial q_{1i}} \\ - \sum_{k=1}^{\nu_2} \frac{\partial V}{\partial p_{2k}} \frac{\partial p_{2k}}{\partial q_{1i}} = 0 \quad (19)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, \mu_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_{2i}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{2i}} \right) - \sum_{k=1}^{\nu_1} \frac{\partial V}{\partial p_{1k}} \frac{\partial p_{1k}}{\partial q_{2i}} \\ - \sum_{k=1}^{\nu_2} \frac{\partial V}{\partial p_{2k}} \frac{\partial p_{2k}}{\partial q_{2i}} = 0 \quad (20)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, \mu_2)$$

위 식들에서 $\frac{\partial V}{\partial p_{1k}}$ 와 $\frac{\partial V}{\partial p_{2k}}$ 를 구하기 위해서 탄성 에너지를 p_{1k} 와 p_{2k} 로 편미분하면,

$$\frac{\partial V}{\partial p_{1k}} = \sum_{j=1}^{\nu_1} \int_0^L EA \psi_{1j} \psi_{1k} dx p_{1j} \quad (21)$$

$$\frac{\partial V}{\partial p_{2k}} = \sum_{j=1}^{\nu_2} \int_0^L EI \psi_{2j} \psi_{2k} dx p_{2j} \quad (22)$$

식 (21)과 (22)의 좌변은 새로 도입된 모드좌표 p_{1k} 와 p_{2k} 에 관한 식으로 표현되는데 이것은 식 (17)과 (18)의 스트레인-변위 관계를 이용하면 다시 일반좌표 q_{1i}, q_{2i} 의 식으로 나타낼 수 있다. 즉 식 (17)의 양변에 $EA \psi_{1k}$ 를 곱하고 식 (18)의 양변에 $EI \psi_{2k}$ 를 곱해 x 에 대해 적분하면,

$$\sum_{j=1}^{\nu_1} \int_0^L EA \psi_{1k} \psi_{1j} dx p_{1j} = \sum_{j=1}^{\mu_1} \int_0^L EA \psi_{1k} \phi_{1j,x} dx q_{1j} \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{m=1}^{\mu_2} \int_0^L EA \psi_{1k} \phi_{2j,x} \phi_{2m,x} dx q_{2j} q_{2m} \quad (23)$$

$$\sum_{j=1}^{\nu_2} \int_0^L EI \psi_{2k} \psi_{2j} dx p_{2j} = \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L EI \psi_{2k} \phi_{2j,xx} dx q_{2j} \\ - 2 \sum_{i=1}^{\mu_1} \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L EI \psi_{2k} \phi_{1i,x} \phi_{2j,xx} dx q_{1i} q_{2j} - \sum_{i=1}^{\mu_1} \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L EI \psi_{2k} \phi_{2i,x} \phi_{1j,xx} dx q_{2i} q_{1j} \\ - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\mu_2} \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L EI \psi_{2k} \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} \phi_{2l,xx} dx q_{2i} q_{2j} q_{2l} \quad (24)$$

식 (19)와 (20)에서 운동에너지는 q_{1i} 와 q_{2i} 만의 함수이므로 식 (15)를 이용하면 관련항들을 쉽게 구할 수 있다. 이상에서 구한 운동에너지 관련 항들과 식 (23)과 (24)의 결과를 이용하면 다음과 같은 운동방정식을 구할 수 있다.

$$(\dot{v}_1 - \omega_3 v_2) R_{1i} - \omega_3^2 S_{1i} + \sum_{j=1}^{\mu_1} m_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} - \omega_3 \sum_{j=1}^{\mu_2} m_{ij}^{12} \ddot{q}_{2j} - 2\omega_3 \sum_{j=1}^{\mu_2} m_{ij}^{12} \dot{q}_{2j} \\ - \omega_3^2 \sum_{j=1}^{\mu_1} m_{ij}^{11} q_{1j} + \sum_{k=1}^{\nu_1} \left(\sum_{j=1}^{\mu_1} A_{kj}^{11} q_{1j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{m=1}^{\mu_2} A_{kjm}^{122} q_{2j} q_{2m} \right) \cdot C_{ki}^{11} \\ + \sum_{k=1}^{\nu_2} \left(\sum_{j=1}^{\mu_2} A_{kj}^{22} q_{2j} - 2 \sum_{j=1}^{\mu_1} B_{kj}^A q_{1j} q_{2j} - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{l=1}^{\mu_2} B_{kjl}^B q_{2j} q_{2l} \right) \cdot C_{ki}^{21} \\ - \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{l=1}^{\mu_2} \sum_{m=1}^{\mu_2} B_{kilm}^C q_{2j} q_{2l} q_{2m} \cdot C_{ki}^{21} = 0 \quad (25)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, \mu_1)$$

$$\begin{aligned}
 & (\dot{v}_2 + \omega_3 v_1)R_{2i} + \dot{\omega}_3 S_{2i} + \sum_{j=1}^{\mu_2} m_{ij}^{22} \dot{q}_{2j} + \dot{\omega}_3 \sum_{j=1}^{\mu_2} m_{ij}^{21} q_{1j} + 2\omega_3 \sum_{j=1}^{\mu_2} m_{ij}^{21} \dot{q}_{1j} \\
 & - \omega_3^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} m_{ij}^{22} q_{2j} + \sum_{k=1}^{\nu_1} \left(\sum_{j=1}^{\mu_2} A_{kj}^{11} q_{1j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{m=1}^{\mu_2} A_{kjm}^{122} q_{2j} q_{2m} \right) \cdot C_{ki}^{12} \\
 & + \sum_{k=1}^{\nu_2} \left(\sum_{j=1}^{\mu_2} A_{kj}^{22} q_{2j} - 2 \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{l=1}^{\mu_2} B_{kjl}^A q_{1j} q_{2l} - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{l=1}^{\mu_2} B_{kjl}^B q_{2j} q_{2l} \right. \\
 & \left. - \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{l=1}^{\mu_2} \sum_{m=1}^{\mu_2} B_{kilm}^C q_{2j} q_{2l} q_{2m} \right) \cdot C_{ki}^{22} = 0
 \end{aligned} \tag{26}$$

여기서,

$$R_{\alpha i} = \int_0^L \rho \phi_{\alpha i} dx \tag{27}$$

$$S_{\alpha i} = \int_0^L \rho x \phi_{\alpha i} dx \tag{28}$$

$$m_{ij}^{\alpha\beta} = \int_0^L \rho \phi_{\alpha i} \phi_{\beta j} dx \tag{29}$$

$$A_{ij}^{11} = \int_0^L EA \psi_{1i} \psi_{1j,x} dx \tag{30}$$

$$A_{ij}^{22} = \int_0^L EI \psi_{2i} \psi_{2j,xx} dx \tag{31}$$

$$A_{ijk}^{122} = \int_0^L EA \psi_{1i} \psi_{2j,x} \psi_{2k,xx} dx \tag{32}$$

$$B_{ijk}^A = \int_0^L EI \psi_{2i} \psi_{1j,x} \psi_{2k,xx} dx \tag{33}$$

$$B_{ijk}^B = \int_0^L EI \psi_{2i} \psi_{2j,x} \psi_{1k,xx} dx \tag{34}$$

$$B_{ijkl}^C = \int_0^L EI \psi_{2i} \psi_{2j,x} \psi_{2k,xx} \psi_{2l,xxx} dx \tag{35}$$

$$C_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{\partial p_{\alpha i}}{\partial q_{\beta j}} \tag{36}$$

그런데 식 (36)의 $C_{ij}^{\alpha\beta}$ 는 식 (23)과 (24)를 q_{1i} 와 q_{2i} 로 편미분한 결과인 다음식들로부터 구할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{\nu_1} K_{jk}^S \cdot C_{ki}^{11} = A_{ji}^{11} \tag{37}$$

$$\sum_{k=1}^{\nu_1} K_{jk}^S \cdot C_{ki}^{12} = \sum_{m=1}^{\mu_2} A_{jmi}^{122} q_{2m} \tag{38}$$

$$\sum_{k=1}^{\nu_2} K_{jk}^B C_{ki}^{21} = -2 \sum_{l=1}^{\mu_2} B_{jil}^A q_{2l} - \sum_{l=1}^{\mu_2} B_{jil}^B q_{2l} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\nu_2} K_{jk}^B C_{ki}^{22} &= A_{ji}^{22} - 2 \sum_{l=1}^{\mu_2} B_{jil}^A q_{1l} - \sum_{l=1}^{\mu_2} B_{jil}^B q_{1l} \\
 &\quad - 3 \sum_{l=1}^{\mu_2} \sum_{m=1}^{\mu_2} B_{jilm}^C q_{2l} q_{2m} - \frac{3}{2} \sum_{l=1}^{\mu_2} \sum_{m=1}^{\mu_2} B_{jimi}^C q_{2l} q_{2m}
 \end{aligned} \tag{40}$$

여기서,

$$K_{ij}^S = \int_0^L EA \psi_{1i} \psi_{1j} dx \tag{41}$$

$$K_{ij}^B = \int_0^L EI \psi_{2i} \psi_{2j} dx \tag{42}$$

3. 수치해석

앞절에서 제안된 방법으로 유도된 운동방정식을 사용해 수치해석을 수행하였다. 첫번째 수치해석 예제는 Fig. 2 와 같이 기준틀에 부착된 외팔보가 O 점을 중심으로 회전운동을 하는 경우이며 회전운동은 아래와 같은 함수로 주어진다.

$$\omega_3 = \begin{cases} \frac{\Omega_s}{T_s} \left[t - \left(\frac{T_s}{2\pi} \right) \sin \left(\frac{2\pi t}{T_s} \right) \right] & \text{if } 0 \leq t \leq T_s \\ \Omega_s & \text{if } t \geq T_s \end{cases} \tag{43}$$

본 예제는 참고문헌 (5)에 처음 소개되어 알려진 문제로서 사용된 데이터들은 Table 1 과 같다.

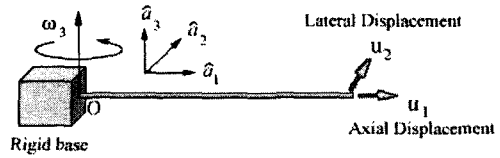


Fig. 2 Configuration of a rotating cantilever beam

Table 1 Numerical data used for the simulation

Notations	Description	Numerical Data
ρ	Mass per unit length	1.2 kg/m
E	Young's modulus	7.0E10
A	Cross section area	4.0E-4 m ²
I	Area moment of inertia	2.0E-7 m ⁴
L	Length	10 m
Ω_s	Steady state angular velocity	6 rad/sec
T_s	Steady state settling time	15 sec

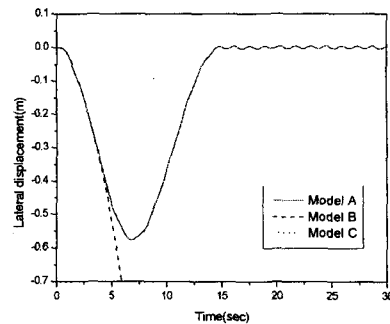


Fig. 3 Comparison of numerical results obtained by three non-linear models

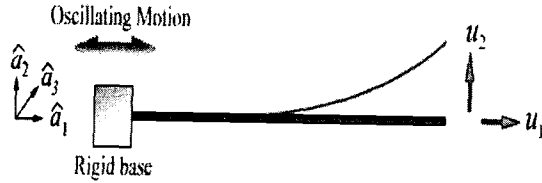


Fig. 4 Configuration of axially oscillating cantilever beam

Fig. 3 은 세 가지 비선형 모델들에 의하여 구한 외팔보 자유단의 횡방향 변위를 비교해 보여주고 있다. 이 그림에서 Model A 는 인장 비선형성만을 고려한 모델, Model B 는 굽힘 비선형성만을 고려한 모델, 그리고 Model C 는 인장 및 굽힘 비선형성을 모두 고려한 모델이다. 이 결과에서 알 수 있듯이 회전운동만이 관련된 경우 인장 비선형성 고려가 필수적이며 곡률 비선형성은 동적 응답에 큰 기여를 하지 않는 것을 알 수 있다. Model B 의 결과는 발산하는데 반해 Model A 및 C 의 결과는 수렴하며 참고문헌 (5-7)에 알려져 있는 해와 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

Fig. 4 는 두 번째 수치해석 예제를 보여주는 데 축 방향의 왕복운동을 하는 외팔보를 나타낸다. 해석에 사용된 데이터들은 강제운동 관련 내용을 제외하고는 Table 1 과 동일하다. 외팔보가 축 방향 왕복운동을 하게 되면 그 굽힘강성은 운동 방향에 따라 변화한다. 외팔보의 축방향 병진운동 v_1 을 위해 다음과 같은 함수를 이용하였다.

$$v_1 = v(1 - \cos \omega t) \quad (44)$$

여기서 ω 는 보의 축 방향 왕복 주파수로 다음과 같이 선정되었다.

$$\omega = 2\omega_{B1} \quad (45)$$

여기서 ω_{B1} 은 외팔보가 강제 운동을 하지 않는 경우에 구한 첫번째 굽힘 고유진동수를 나타낸다. 강제운동 주파수를 고유진동수의 2 배로 선택한 이유는 선형 모델의 경우 매개변수 공진에 의한 불안정성이 그 값에서 제일먼저 발생하기 때문이다. 해석을 위해 초기 조건으로 보 자유단에서의 횡방향 변위는 0, 속도는 1.0m/s 을 사용하였다.

Figs. 5-7 은 앞에서 소개된 Model A, B, C 에 의한 수치해석 결과들을 보여준다. 이 그림들의 결과는 세 결과가 모두 서로 상당한 차이를 보여주고 있는데 이것은 병진 왕복운동을 하는 유형의 문제에서는 (앞의 첫번째 예제와는 달리) 인장 비선형성 뿐만 아니라 곡률 비선형성도 중요한 역할을 하게 되는 것을 보여주는 것이다.

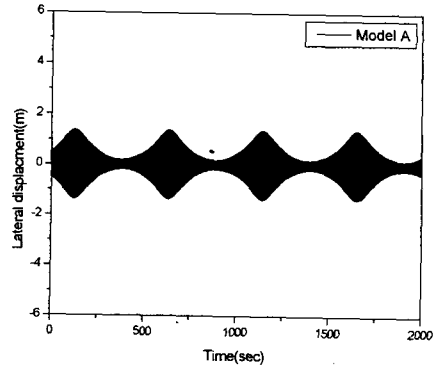


Fig. 5 Simulation results obtained by Model A

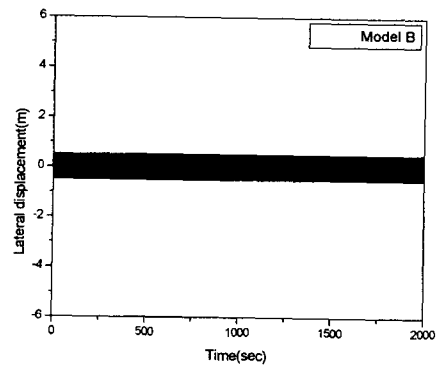


Fig. 6 Simulation results obtained by Model B

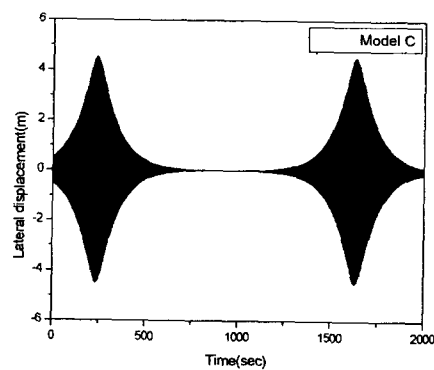


Fig. 7 Simulation results obtained by Model C

Fig. 5 를 보면 인장의 비선형성은 시스템의 동적 반응에 맥놀이 현상을 일으키게 하는 것을 알 수 있는데, 이에 반해 굽힘방향 비선형성만을 고려한 Fig. 6 의 결과에서는 그러한 맥놀이 현상을 발견

할 수가 없으며 그 진폭의 크기도 Fig. 5 에 비해 훨씬 작은 것을 알 수 있다. 그러나 매우 흥미로운 현상은 이 두 가지 비선형성이 모두 고려된 결과인 Fig. 7 에서 관찰할 수가 있는데 여기서는 두 비선형성의 영향이 합쳐지면서 동적 반응에서 진폭의 크기는 물론 맥놀이 주파수까지 크게 변하는 것을 관찰할 수 있다. 이러한 결과는 중첩을 핵심 특성으로 갖는 선형 모델로부터는 발견할 수가 없는, 비선형 모델만이 가질 수 있는 매우 특이한 결과라고 하겠다. 또 이 예제로부터 굽힘방향 비선형성은 회전운동을 하는 예제에서는 중요한 역할을 하지 않았으나 왕복 운동을 하는 본 예제에서는 동적 반응의 정확한 예측을 위해 필수적으로 고려해야 하는 것을 확인할 수 있다.

4. 수치해석

본 논문에서는 인장 및 곡률 비선형성을 고려한 대변위 강체운동을 하는 보의 동적 모델링이 제시되었다. 이 모델링 방법은 임의의 경계 조건들에 대해 자유도 조절이 가능한 모드 근사화 방법을 적용할 수 있어서 계산의 정확성은 물론 효율성도 갖는다. 본 논문에서는 또한 두 가지의 예제들에 대해서 수치해석을 수행하여 대변위 회전 운동을 하는 경우는 인장 비선형성만이 결정적 중요성을 가지나 축방향 왕복운동 같은 대변위 병진운동을 하는 경우는 곡률 비선형성도 인장 비선형성에 더해지면서 보의 동적 반응 예측에 중요한 역할을 하게 되는 것을 확인할 수 있었다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적 설계기술센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Bodley, C., Devers, A. Park, A. and Frisch, H., 1978, "A Digital Computer Program for the Dynamic Interaction Simulation of Controls and Structure (DISCOS)," *NASA TP-1219*, Vols. 1 & 2.
- (2) Ho, J., 1977, "Direct Path Method for Flexible Multibody Spacecraft Dynamics," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 14, pp. 102~110.
- (3) Yoo, H., 1995, "Reliability of the Classical Linear Modeling in the Dynamic Analysis of Flexible Structures," *Transaction of the KSME, A*, Vol. 19, No. 7, pp. 1657~1664.
- (4) Christensen, E. and Lee, S., 1986, "Nonlinear Finite Element Modeling of the Dynamics of Unrestrained Flexible Structures," *Computers and Structures*, 23, pp. 819~829.
- (5) Simo, J. and Vu-Quoc, L., 1986, "On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions-the Plane Case: Part I and Part II," *Journal of Applied Mechanics*, 53, pp. 849~863.
- (6) Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 10, pp. 139~151.
- (7) Yoo, H, Ryan, R. and Scott R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motion," *Journal of Sound and Vibration*, 181(2), pp. 261~278.
- (8) Yoo, H., 1995, "Dynamic Analysis of Flexible Structures Undergoing Large Overall Motion," *Transaction of the KSME, A*, Vol. 19, No. 6, pp. 1363~1370.
- (9) Crespo da Silva, M. R. M., and Glynn, C. C., 1978, "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams. I. Equations of Motion," *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 6, pp. 437~448.