

직교이방성 판 내의 다중 곡선균열 해석

김 만 원*·박 재 학†

(2002년 11월 5일 접수, 2003년 5월 2일 심사완료)

Analysis of Multiple Curved Cracks in An Orthotropic Plate

Maan Won Kim and Jai Hak Park

Key Words: Orthotropic(직교이방성), Multiple Curved Cracks(다중곡선균열), Stress Intensity Factor(응력강도계수), Finite Element Alternating Method(유한요소 교호법), Dislocation Density Function(전위밀도함수)

Abstract

The interactions between curved cracks are examined in an orthotropic plate and the effects of rectilinear anisotropy on the stress intensity factors are analyzed. The finite element alternating method (FEAM) is used in this study to get the stress intensity factors for the multiple curved cracks. To obtain analytical solutions, which is necessary in FEAM, the curved cracks are modeled as continuous distributions of dislocations, and integral equations are formulated for unknown dislocation density functions to satisfy the given resultant forces on the crack surfaces. Several basic problems are solved to verify the accuracy and efficiency of the proposed method and it can be found that present results show good agreements with the previously published results.

1. 서론

방향성을 갖는 재료의 사용이 증가함에 따라 비등방성 재료에서의 균열 문제를 해석하기 위한 연구가 파괴역학 초기부터 이루어져 왔다. 그러나 직선균열과 균열 진전각에 대한 연구가 대부분이며 일반적인 곡선균열에 대한 연구는 많이 이루어지지 않았다. 이방성 재료내의 곡선균열에 관한 연구로는 무한 판에 존재하는 균열의 한 쪽 끝이 꺾인 균열(kinked crack) 형태에 대한 연구가 많았다.

꺾인 균열을 포함한 이방성재료 내의 곡선균열

에 관한 연구로, Obata 등⁽¹⁾은 Savin⁽²⁾과 Lekhnitskii⁽³⁾의 이방성체에 대한 탄성이론을 이용하여 균열의 한쪽 끝이 꺾인 문제를 해석하였다. 그들은 칼날전위(edge dislocation)에 대한 복소응력함수를 사용하여 응력강도계수를 구하고 등방성체에 대한 Irwin의 방법을 적용하여 에너지해방률(energy release rate)을 구하였다. Zang과 Gudmundson⁽⁴⁾은 경계적분법을 이용하여 T-형 균열과 꺾인 균열에 대하여 해석하였는데, 그들은 균열을 전위의 연속된 분포로 보고 전위밀도함수를 가정하여 균열면을 따라 합력을 적분하였다. Gao와 Chiu⁽⁵⁾는 섭동법(perturbation method)을 이용하여 꺾인 균열과 원호균열, 여현곡선 형태의 균열, 일부분이 밀려 올려진 균열(jogged crack)에 대하여 해석하였다. 이들은 에너지해방률에 대하여 Obata 등⁽¹⁾의 해와 다른 결과를 얻었다. 그리고 균열선단에서의 비특이 T-응력은 재료의 이방성의 영향을 받으며 비특이 T-응력 향이 음이면 균열성장거동이 안정적이고 양이면 급격하다는

* Center for Aerospace Research and Education, University of California, Irvine, USA

† 책임저자, 충북대학교 안전공학과

E-mail : jhpark@cbucc.chungbuk.ac.kr

TEL : (043)261-2460 FAX : (043)264-2460

결론을 제시했다.

Xu와 Keer⁽⁶⁾는 동적과피역학을 이용하여 이방성 재료 내에서 균열의 꺾임이 재료상수와 균열 진전속도의 함수임을 보였다. Doblare 등⁽⁷⁾은 경계요소법을 이용하여 균열선단의 응력강도계수를 구하고 균열의 진전방향을 예측하였고, 일정 길이만큼씩 균열을 진전시키는 방법을 이용하여 균열의 진전경로를 구하였다.

또한 직교이방성 재료에서의 균열의 진전에 관한 연구⁽⁸⁻¹⁰⁾ 및 균질이방성체 내의 균열에 대한 연구⁽¹¹⁾가 국내에서 이루어졌다.

본 연구에서는 직교이방성 무한판 및 유한판 내의 임의의 형태의 곡선균열 뿐만 아니라 균열이 다수 존재하는 경우에도 각 균열에 대한 정확한 응력강도계수를 구하는 것을 목적으로 하였다. 이를 위하여 등방성 판 내의 다중 곡선균열의 경우에 적용하였던 유한요소 교호법(finite element alternating method: FEAM)을 확장 적용하였다. FEAM은 균열의 해석에 적용할 경우 균열 선단 부근에서 특이요소를 사용하거나 유한요소 격자를 잘게 나누지 않아도 되므로 비용과 시간을 절약할 수 있다는 장점이 있으며 등방성 판 내의 2차원 및 3차원 균열 문제에 성공적으로 적용되었다.⁽¹²⁻¹⁴⁾

FEAM은 유한요소법과 무한판 내의 균열에 대한 이론해를 교호하여 사용하기 때문에 무한판과 유한판의 경우에 둘 다 적용할 수 있다. 최근 비등방성 판 내의 단일 곡선균열해석에도 효과적으로 적용할 수 있었다.⁽¹⁵⁾

2. 다중 곡선균열에 대한 유한요소 교호법

2.1 곡선균열의 이론해

FEAM에서는 균열 선단에서의 정확한 응력강도계수를 구하기 위하여 먼저 곡선균열에 대한 이론해가 필요하다. 곡선균열문제를 해석하는 한 방법으로 적분방정식을 구성하여 미지함수를 구하고 이를 이용하여 응력강도계수를 구하는 방법이 있다. 혼합경계치문제에서 특이적분방정식은 다음과 같이 1차원 적분방정식으로 표현된다.

$$\int_L K(t, x)g(t) dt = p(x), \quad x \in L. \quad (1)$$

여기서 $g(t)$ 는 미지함수이고 $p(x)$ 는 기지의 유계함수(bounded function)이다. 적분커널 $K(t, x)$ 는 일반적으로 특이성을 갖는데, 이 특이성은 $g(t)$ 및 $p(x)$ 의 선택에 따라 Cauchy 특이 적분방정식이 얻어지기도 하고, 이 보다 특이성이 높은 고 특이 적분방정식이 얻어지기도 하며, 또한 적분방정식의 커널이 적분 가능한 대수특이성만 갖는 특이성이 낮은 적분방정식이 얻어지기도 한다. 균열문제의 경우 식 (1)의 L 은 적분영역인 균열이 놓인 선을 의미하고 $g(t)$ 는 유계함수이거나 또는 L 의 경계에서 적분가능한 특이성을 가지는 함수이다.

본 연구에서는 Zang과 Gudmundson⁽⁴⁾과 동일하게 곡선균열을 연속된 전위의 분포라고 가정하고 $g(t)$ 와 $p(x)$ 를 각각 전위밀도함수와 균열면상의 합력(resultant force)으로 취하였다. 이 경우 적분 커널은 대수특이성을 가진다. 대수특이성에서는 적분방정식의 커널이 적분가능한 약한 특이성(weak singularity)만을 가지므로 계산이 쉽고, 적분이 단지 균열의 한쪽 면만을 따라 수행되며, 기지함수 값이 주어지는 점을 임의로 선정할 수 있어 수치적인 계산이 용이하다는 장점이 있다.⁽⁴⁾

Lekhnitsky⁽³⁾는 균질 이방성 탄성체에 대한 평면 문제의 지배방정식을 응력함수로 표시된 4계 편미분 방정식으로 기술하였다. 지배방정식의 특성방정식은 다음과 같다.

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0. \quad (2)$$

재료가 직교이방성이고 재료의 주축이 좌표축과 일치하는 경우에는 $a_{16} = a_{26} = 0$ 이므로 식 (2)는

$$a_{11}\mu^4 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + a_{22} = 0 \quad (3)$$

이 된다. 식 (3)의 계수들은 탄성계수를 사용하여 나타내면 다음과 같다:

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2}, \quad (4)$$

$$a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{12}}.$$

식 (3)의 경우 μ_1 과 μ_2 는 다음의 세 경우 중 하나에 해당한다.⁽³⁾

- (i) 서로 다른 순 허근 ($\mu_1 = \beta_1 i, \mu_2 = \beta_2 i$)
- (ii) 서로 같은 두 허근 ($\mu_1 = \mu_2 = \beta i$)
- (iii) 실수부의 부호가 서로 다른 근
($\mu_1 = \alpha + \beta i, \mu_2 = -\alpha + \beta i$)

응력함수로 표현된 합력은 다음과 같다.⁽⁴⁾

$$\begin{aligned} F_x &= 2\text{Re}[\mu_1 \phi(z_1) + \mu_2 \psi(z_2)] + C_1, \\ F_y &= -2\text{Re}[\phi(z_1) + \psi(z_2)] + C_2. \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 C_j 는 임의의 상수, $z_j = x + \mu_j y$ ($j=1, 2$)이다.

본 연구에서는 전위가 있는 경우의 응력함수로 다음과 같은 Teutonico⁽¹⁶⁾의 복소함수를 사용하였다.

$$\begin{aligned} \phi(z_1) &= \frac{A}{2\pi i} \ln(z_1 - z_{10}), \\ \psi(z_2) &= \frac{B}{2\pi i} \ln(z_2 - z_{20}). \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 A와 B는 복소상수이며, 균열면상의 변위의 불연속 조건과 균열면상에서 합력이 0이 되는 조건으로부터 구할 수 있다. 보다 자세한 내용은 참고문헌 17에 기술되어 있다.

Fig. 1과 같이 점 z_0 에서 직선거리 r 만큼 떨어진 곳에 균열면상의 한 점 z 가 있는 경우를 고려해 보자. $z_0 = x_0 + \mu_j y_0$ 라고 하면 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$z_j - z_0 = (x - x_0) + \mu_j(y - y_0) \equiv R_j e^{i\theta_j}. \quad (7)$$

여기서

$$\begin{aligned} R_{j1} &= (x - x_0) + \mu_{j1}(y - y_0) \\ &= r [\cos \theta + \mu_{j1} \sin \theta], \\ R_{j2} &= \mu_{j2}(y - y_0) = r \mu_{j2} \sin \theta, \\ R_j &= \sqrt{(R_{j1}^2 + R_{j2}^2)}, \\ \theta_j &= \cos^{-1}(R_{j1}/R_j) \quad (j=1, 2) \end{aligned} \quad (8)$$

이고

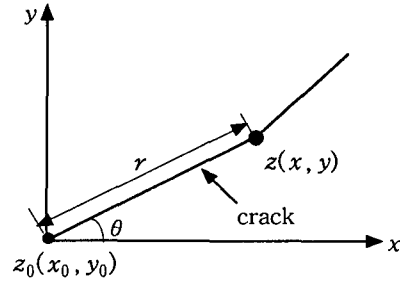


Fig. 1 Geometry and coordinate system for a crack

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{y - y_0}{x - x_0} \end{aligned} \quad (9)$$

이다.

그러면 식 (6)의 복소응력함수는 다음과 같이 표현되어진다:

$$\begin{aligned} \phi(z_1) &= \frac{A}{2\pi i} [\ln(R_1) + i\theta_1], \\ \psi(z_2) &= \frac{B}{2\pi i} [\ln(R_2) + i\theta_2]. \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)을 식 (5)에 대입하면 균열면상의 한 점 z 가 있는 경우의 합력을 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$F_j(z) = F_{jk}(z, z_0) \Delta u_k + C_j \quad (j, k=1, 2). \quad (11)$$

여기서 Δu_k 는 변위의 불연속 크기를 나타내며

$$\begin{aligned} F_{1k} &= \frac{1}{\pi} [(\mu_{11} A_{2k} + \mu_{12} A_{1k}) \ln(R_1) + (\mu_{11} A_{1k} \\ &\quad - \mu_{12} A_{2k}) \theta_1 + (\mu_{11} B_{2k} + \mu_{12} B_{1k}) \ln(R_2) \\ &\quad + (\mu_{11} B_{1k} - \mu_{12} B_{2k}) \theta_2], \\ F_{2k} &= -\frac{1}{\pi} [A_{2k} \ln(R_1) + A_{1k} \theta_1 + B_{2k} \ln(R_2) \\ &\quad + B_{1k} \theta_2] \end{aligned} \quad (12)$$

이다.

균열면 상의 곡선 L을 따라 전위가 연속적으로 분포되어 있는 경우 합력에 대한 적분방정식은 곡선 L을 따라 식 (11)을 적분함으로써 다음과

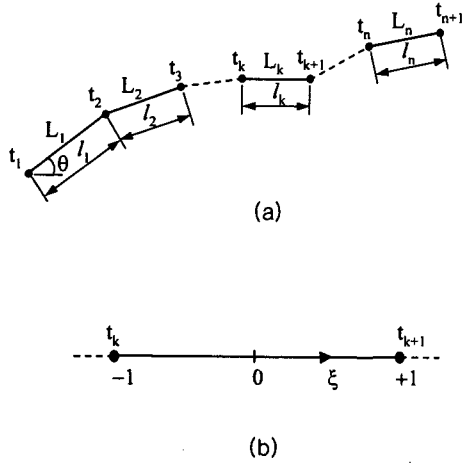


Fig. 2 Configuration of a curved crack (a) A curved crack consisting of n crack elements (b) Local coordinate for the crack element L_k

같이 얻어진다.

$$F_j(z) = \int_L F_{jk}(z, z_0) D_k(z_0) ds(z_0) + C_j \quad (13)$$

여기서 $D_k = \frac{\partial}{\partial s} (\Delta u_k)$ 는 k 방향의 변위의 불연속을 나타내는 전위밀도함수에 상수가 곱해진 값이다.

그리고 변위장이 유일한 값을 가지기 위하여 다음 조건을 만족하여야 한다.

$$\int_L D_k(z_0) ds(z_0) = 0. \quad (14)$$

식 (13)과 식 (14)를 만족하는 전위밀도 함수를 구하기 위해 먼저 곡선균열을 Fig. 2와 같이 (n+1)개의 절점으로 나눈다. 그러면 첫 번째 절점과 (n+1)번째 절점이 균열의 선단이 된다. 절점과 절점 사이의 균열은 직선이라고 가정한다. 그러면 균열은 n 개의 직선 균열요소로 이루어져 있다고 할 수 있다. 각각의 균열요소를 L_1, L_2, \dots, L_n 각 균열요소의 길이를 l_1, l_2, \dots, l_n , 균열상의 절점들을 t_1, t_2, \dots, t_{n+1} 로 나타내기로 하자.

그리고 전위밀도함수의 분포를 다음과 같이 가정한다. 각 균열요소 내의 임의의 점에서의 전위 밀도함수 값은 절점에서의 값으로 나타낼 수 있

다고 가정하고 다음과 같이 나타내기로 한다. 첫 번째 균열요소 및 n번째 균열요소에 대해서는

$$D_i(\xi) = \sqrt{\frac{2}{1+\xi}} \left[\frac{1-\xi}{2} (D_i)_{i_1} + \frac{1+\xi}{2} (D_i)_{i_2} \right], \quad (15)$$

$$D_i(\xi) = \sqrt{\frac{2}{1-\xi}} \left[\frac{1-\xi}{2} (D_i)_n + \frac{1+\xi}{2} (D_i)_{n+1} \right] \quad (16)$$

이다. 여기서 ξ 는 요소 내 국부좌표계로 $-1 \leq \xi \leq 1$ 이다. 또한 $(D_i)_n$ 은 절점 n에서의 D_i 값을 나타낸다. 그리고 첫 번째와 n번째를 제외한 나머지 균열요소들 중 k 번째 균열요소에 대해서는

$$D_i(\xi) = \frac{1-\xi}{2} (D_i)_k + \frac{1+\xi}{2} (D_i)_{k+1} \quad (17)$$

이 된다. 여기서 $(D_i)_k$ 는 t_k 에서의 전위밀도함수 값이다. 이러한 형태의 전위밀도함수의 분포는 Zang과 Gudmundson⁽⁴⁾이 꺾인 균열의 해석에서 사용한 가정과 동일하다.

식 (15)~(17)로 표현되는 전위밀도함수의 분포를 식 (13)과 식 (14)에 대입한 후, 각 절점에 대하여 각 항을 해석적이나 수치적으로 적분하면 $(2n+4)$ 개의 연립방정식이 얻어진다. 이때 미지수는 각 절점에서의 D_1 과 D_2 값과 C_j 의 실수부 및 허수부로 모두 $(2n+4)$ 개이다. 따라서 미지수를 구하기에 충분한 방정식이 존재함을 알 수 있다.

각 항의 적분 중 간단한 꼴로 적분값을 표시할 수 있는 항들은 다음과 같다.

우선 다음과 같은 적분을 고려하자.

$$I_k = \int_{L_k} \log(R_j) D_i(s) ds, \quad i, j = 1, 2. \quad (18)$$

균열선단에 위치한 첫 번째 요소와 마지막 요소에서 적분 값들은 다음과 같다.

$$I_1 = \frac{2}{9} l_1 \{ [6 \log(g_j/l_1) - 16](D_i)_1 + [3 \log(g_j/l_1) - 2](D_i)_2 \} \quad (t_0 = t_1 \text{ 인 경우}) \quad (19)$$

$$I_n = \frac{2}{9} l_n \{ [6 \log(g_j/l_1) + 2(6 \log 2 - 5)](D_i)_1 + [3 \log(g_j/l_1) + 2(3 \log 2 - 4)](D_i)_2 \} \quad (20)$$

($t_0 = t_2$ 인 경우)

$$I_n = \frac{2}{9} l_n \{ [3 \log(g_j l_n) + 2(3 \log 2 - 4)](D_i)_n + [6 \log(g_j l_n) + 2(6 \log 2 - 5)](D_i)_{n+1} \} \quad (21)$$

($t_0 = t_n$ 인 경우)

$$I_n = \frac{2}{9} l_n \{ [3 \log(g_j l_n) - 2](D_i)_n + [6 \log(g_j l_n) - 16](D_i)_{n+1} \} \quad (22)$$

($t_0 = t_{n+1}$ 인 경우)

k 가 1과 n 을 제외한 경우의 적분 값은

$$I_k = \frac{1}{2} l_k \left\{ \left[\log(g_j l_k) - \frac{3}{2} \right] (D_i)_k + \left[\log(g_j l_k) - \frac{1}{2} \right] (D_i)_{k+1} \right\} \quad (23)$$

($t_0 = t_k$ 인 경우)

$$I_k = \frac{1}{2} l_k \left\{ \left[\log(g_j l_k) - \frac{1}{2} \right] (D_i)_k + \left[\log(g_j l_k) - \frac{3}{2} \right] (D_i)_{k+1} \right\} \quad (24)$$

($t_0 = t_{k+1}$ 인 경우)

또한 다음 적분을 고려하자.

$$J_k = \int_{L_k} D_i(s) ds, \quad i=1,2. \quad (25)$$

이때 적분 값들은 다음과 같다.

$$J_1 = \frac{2}{3} l_1 [2(D_i)_1 + (D_i)_2]$$

$$J_n = \frac{2}{3} l_n [(D_i)_n + 2(D_i)_{n+1}] \quad (26)$$

$$J_k = \frac{1}{2} l_k [(D_i)_k + (D_i)_{k+1}], \quad k \neq 1, k \neq n.$$

그 외의 적분 값들은 수치적분으로 구하였다. 피적분 함수에 $1/\sqrt{t}$ 형의 특이성이 존재하는 경우에는 다음과 같은 Gauss 적분공식 형태의 적분 공식을 사용하였다.

$$\int_a^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}} dy = \sqrt{b-a} \sum_{i=1}^n w_i f(y_i) + R_n. \quad (27)$$

여기서 $y_i = a + (b-a)x_i$ 이며, $x_i = 1 - \xi_i^2$ 에서 ξ_i 는 직교다항식의 i 번째 양의 축의 값을 나타내고, $w_i = 2w_i^{(2n)}$ 에서 $w_i^{(2n)}$ 은 적분점이 $2n$ 인

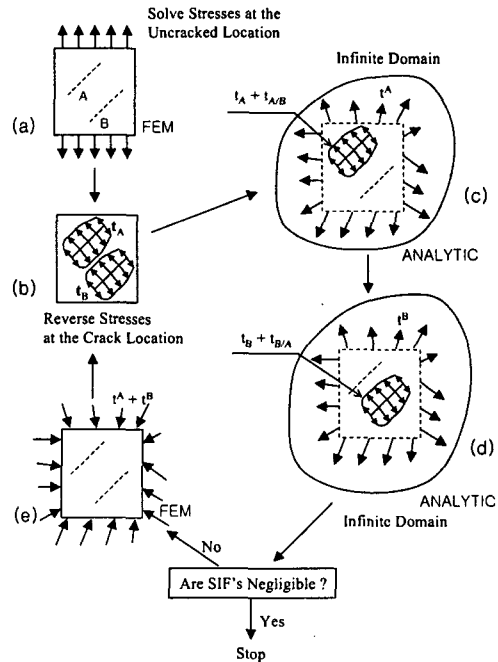


Fig. 3 Finite element alternating technique for two cracks

Gaussian 가중치를 나타낸다.

균열 선단에서의 전위밀도함수가 구해지면 Sih 등⁽¹⁸⁾의 결과를 이용하여 다음 식으로부터 응력강도계수를 구할 수 있다.

$$K_I = \sqrt{\pi l/2} [(D_1)_c C_{22} - (D_2)_c C_{12}] / C, \quad (28)$$

$$K_{II} = \sqrt{\pi l/2} [(D_2)_c C_{11} - (D_1)_c C_{21}] / C.$$

여기서

$$C_{11} = \text{Re} [i(-p_1 \mu_2 + p_2 \mu_1) / (\mu_1 - \mu_2)],$$

$$C_{12} = \text{Re} [i(-p_1 + p_2) / (\mu_1 - \mu_2)],$$

$$C_{21} = \text{Re} [i(-q_1 \mu_2 + q_2 \mu_1) / (\mu_1 - \mu_2)],$$

$$C_{22} = \text{Re} [i(-q_1 + q_2) / (\mu_1 - \mu_2)], \quad (29)$$

$$C = C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}$$

이며 l 은 균열 선단 균열요소의 길이이고 하첨자 c 는 균열선단에서의 값을 의미한다. 식 (28)과 식 (29)의 재료상수, μ_1, μ_2 및 전위밀도함수 $(D_i)_c$

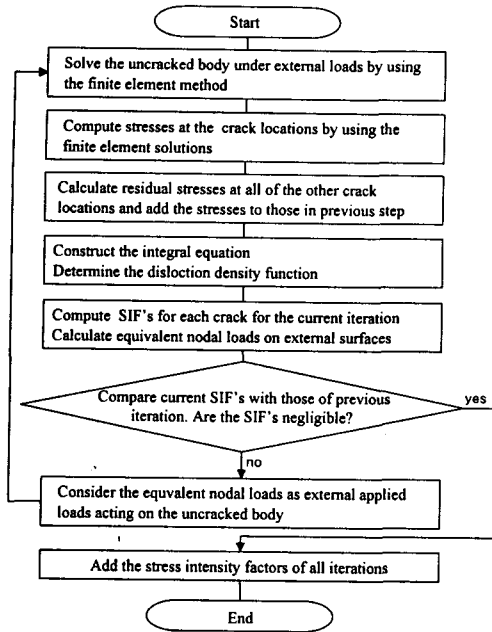


Fig. 4 Flowchart of the FEAM for multiple curved cracks

는 균열선단에서의 국부좌표계에 대하여 구해져야 한다. 즉 1축을 균열요소와 나란하게, 2축을 균열요소에 수직으로 취하여야 한다.

2.2 유한요소 교호법

다중균열에 대한 FEAM의 절차를 Fig. 3과 Fig. 4에 나타내었다. 단일균열에 대한 FEAM의 기본적인 절차는 참고문헌 15에 자세히 기술되어 있다.

균열 선단에서의 전위밀도함수 값을 구하기 위해 식 (13)과 식 (14)의 (2n+4)개의 연립방정식을 각각의 균열에 대하여 푸는데, 이 과정에서 합력은 균열면에서의 트랙션(traction)을 적분하여 사용한다. 다중균열의 경우 현재 해석되고 있는 균열의 트랙션에 다른 균열의 존재로 인하여 발생하는 트랙션을 더하여 줌으로써 균열의 상호작용의 영향을 고려해준다.

3. 문제 해석 및 고찰

3.1 크기가 같은 일직선상의 균열

직교이방성 무한판 내에 크기 2a 인 균열들이

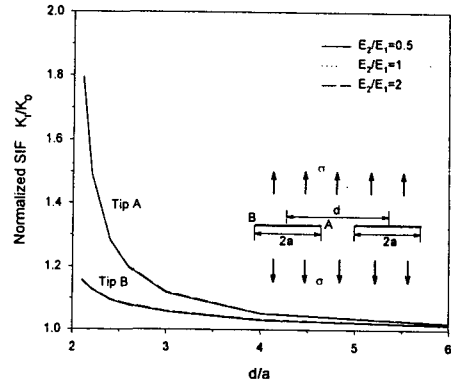


Fig. 5 The variation of normalized stress intensity factors of two collinear cracks with distances d/a

일직선상에 있는 경우(Fig. 5)에 대하여 응력강도계수를 구하였다. 재료의 이방성의 영향을 알아보기 위하여 $E_2/E_1=0.5, 1, 2$ 의 세 경우에 대하여 균열 사이의 간격(d/a)을 변화시키며 해석하였다. 이때 $G_{12}/E_1=0.4, \nu_{12}=0.25$ 로 하였고 1축을 x축에 일치시켰다. Fig. 5는 균열 선단 A와 B에서 구해진 응력강도계수 K_1 을 등방성 무한판 내의 단일 균열에 대한 응력강도계수($K_0 = \sigma\sqrt{\pi a}$)에 대하여 무차원화하여 나타낸 것이다. $E_2/E_1=1$ 인 경우는 등방성 판에서의 값을 나타내며 Rook와 Cartwright⁽¹⁹⁾의 값과 잘 일치하였다. 해석 결과 재료의 이방성의 영향은 거의 없음을 알 수 있는데 이는 Binienda등⁽²⁰⁾의 결과와도 일치한다.

다음은 재료의 주축이 x축으로부터 각도 $\theta=0^\circ \sim 90^\circ$ 기울어진 경우에 대하여 위와 같은 균열 형상에 대하여 해석하였다(Fig. 6). 재료의 탄성계수의 비와 주축의 각도가 변화하는 경우에도 등방성 재료에서의 경우와 거의 같은 결과가 얻어졌다.

다음으로 Fig. 7에서와 같이 일직선상에 놓인 크기가 2a인 세 개의 균열에 대하여 탄성계수의 비 $E_2/E_1=0.1, 1, 10$ 인 경우에 대하여 각각 해석하였다. Fig. 7은 $E_2/E_1=1$ 인 경우의 결과를 나타낸 것으로 FEAM의 결과와 Isida⁽²¹⁾의 결과가 잘 일치함을 알 수 있다. $F_{I,A}, F_{I,B}, F_{I,C}$ 는 각각 균열 선단 A, B, C에서의 형상함수를 나타낸다. $E_2/E_1=0.1, 10$ 인 경우의 결과도 등방성의 경우

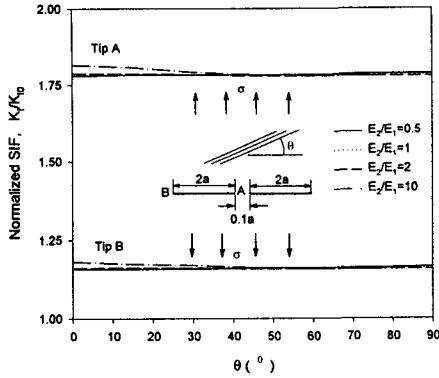


Fig. 6 Normalized stress intensity factors versus θ for two equal collinear cracks in an infinite plate

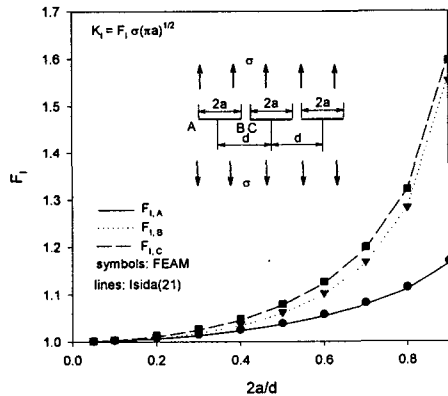


Fig. 7 $F_{I,A}$, $F_{I,B}$ and $F_{I,C}$ versus $2a/d$ in an isotropic plate with three collinear cracks

와 거의 일치하여 이방성의 영향이 거의 없었다.

Denda⁽²²⁾는 $2a/d=0.9$ 인 경우 경계요소법과 보존적분(J 적분)을 함께 이용하여 알루미늄결정(정방구조) 격자의 결정축이 결정의 세 대칭축으로부터 각각 $[0,0,0]$, $[30,0,0]$, $[45, \text{across } 1/\sqrt{3}, 0]$, $[45, \text{across } 1/\sqrt{3}, 45]$ 의 각도를 가지는 경우에 대하여 응력강도계수를 구하였는데 등방성의 경우와 거의 일치하였다. 이는 재료 이방성의 영향이 거의 없음을 의미하는 것이다.

3.2 두 포물선형 곡선균열

다음으로 Fig. 8과 같이 먼 거리에서 y 방향의 응력 σ 가 작용하는 무한판 내에 두 포물선형 곡

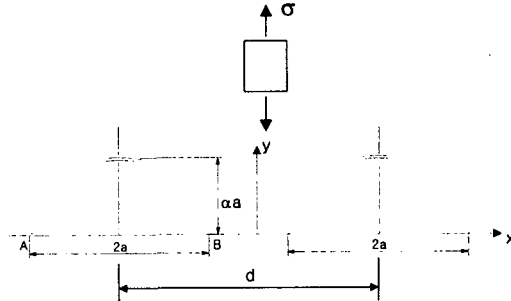


Fig. 8 Two parabolic cracks in an infinite plate

선균열이 나란히 존재하는 경우에 대하여 균열 선단 A와 B에서 응력강도계수를 구하였다.

이방성의 영향을 살펴보기 위하여 $E_2/E_1=0.1, 1, 10$ 으로 변화시키고 $G_{12}/E_1=0.4$, $\nu_{12}=0.25$ 로 고정하였다. 두 균열의 형상은 식 (30)으로 표시되며 a 를 0~1까지 0.1 씩 증가시켰다. a 가 0일 때 균열은 직선이 되며 a 가 1일 때 균열은 반원이 된다. 여기서 d 는 두 균열의 중심 사이의 거리를 나타낸다.

$$y = a(a^2 - x^2)/a, \quad |x| < a. \quad (30)$$

Fig. 9 ~ Fig. 11은 각각 균열선단 B에서 $2a/d=0.2, 0.6, 0.9$ 인 경우에 대하여 무차원화된 응력강도계수 ($F_{IB} = K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$, $F_{IIB} = K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$)를 나타낸 것이다. 여기서 세 그림을 비교해 볼 때 $2a/d$ 가 1에 가까이 가면 즉, 두 균열 사이가 가까워지면 두 균열간의 상호작용으로 응력강도계수가 커짐을 볼 수 있다. 그림에서 a 가 0일 때는 Fig. 6에서 $\theta=0^\circ$ 인 경우에 해당한다. 이 경우에는 응력강도계수가 E_2/E_1 가 0.1일 때와 1일 때는 거의 같게 나타났으며 10일 때에 약간 큰 것을 볼 수 있다. 그러나 이것은 Fig. 6에서 $\theta=0^\circ$ 인 직선균열의 경우와 일치하는 결과로 무시할 수 있는 값이다. Fig. 6의 직선균열에서는 응력강도계수가 θ 의 변화와는 무관한데 비하여 Fig. 9 ~ Fig. 11의 포물선형 곡선균열에서는 전체적으로 응력강도계수가 이방성의 영향을 받을 수 있다.

3.3 직선균열과 경사진 균열

Binienda⁽²⁰⁾은 Cauchy 적분형태의 특이 적분 방정식으로 한 균열은 재료의 주축에 놓여 있고

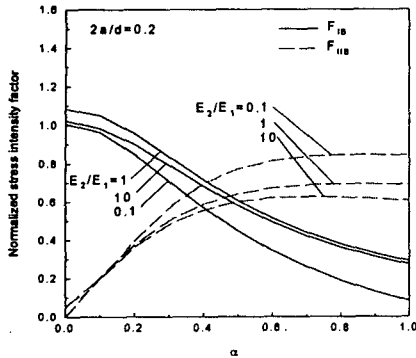


Fig. 9 Normalized stress intensity factors at the crack tip B when 2a/d is 0.2

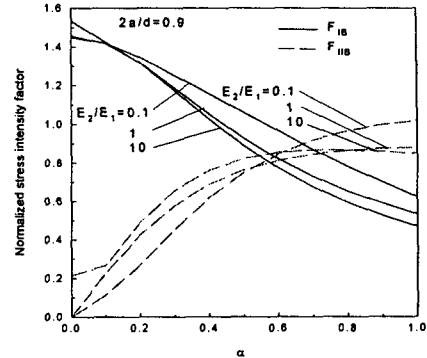


Fig. 11 Normalized stress intensity factors at the crack tip B when 2a/d is 0.9

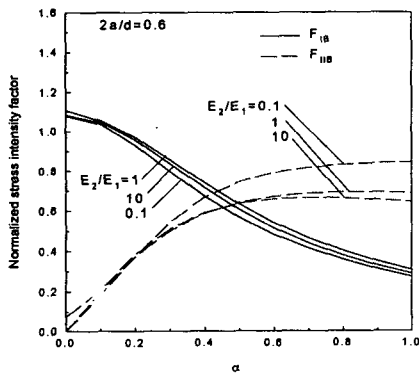


Fig. 10 Normalized stress intensity factors at the crack tip B when 2a/d is 0.6

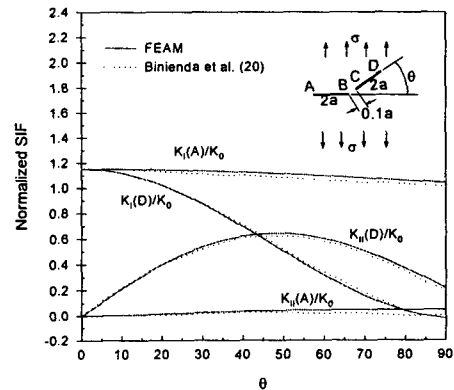


Fig. 12 The normalized stress intensity factors of a two-cracks problem as a function of the kink angle, θ at outer tips

다른 균열은 주축과 θ 의 각도로 기울어져 있는 경우의 문제를 해석하였다. Fig. 12와 Fig. 13은 균열 선단 A, B, C, D에서 얻어진 응력강도계수를 $K_0 (= \sigma\sqrt{\pi a})$ 로 무차원화하여 나타낸 것이다.

이 때 $E_1=145.3\text{GPa}$, $E_2=35.0\text{GPa}$, $G_{12}=6.75\text{GPa}$, $\nu_{12}=0.3$ 의 값을 사용하였는데 이는 일반적인 Gr/Epoxy 라미나에 대한 값이다. Fig. 12에서 해석결과가 Binienda등⁽²⁰⁾과 비교적 잘 일치함을 볼 수 있으며, 또한 결과는 등방성의 경우와 거의 일치하였다.

응력강도계수는 균열의 안쪽 선단에서 더 크게 나타나므로 Fig. 13에서는 안쪽 균열선단 B와 C에 대하여 무차원화한 응력강도계수를 구하였다. $E_2/E_1=0.1, 1, 10$ 으로 변화시키고 $G_{12}/E_1=0.4$,

$\nu_{12}=0.3$ 으로 고정하였다.

전체적으로 균열의 경사각 θ 및 탄성계수의 비에 따라 응력강도계수가 변함을 알 수 있다. 경사각 θ 가 커짐에 따라 균열선단 B와 C에서 모드 I 응력강도계수는 점점 작아지며, B 보다 C에서 더 급격히 작아진다. 그리고 $E_2/E_1=10$ 일 때 가장 크게 나타났다. 균열 선단 C에서 모드 II 응력강도계수의 경우 경사각이 커짐에 따라 증가하다가 $50\sim 60^\circ$ 부근에서 다시 감소하기 시작하는데, 이는 Sih 등⁽¹⁸⁾의 결과와 잘 일치한다.

3.4 두 치우친 평행균열

Dwyer⁽²³⁾는 등방성 판에서 같은 크기의 두 치우친 평행균열(two offset parallel cracks)에 대하여 한 균열에 대한 다른 균열의 안쪽 선단거리의 각

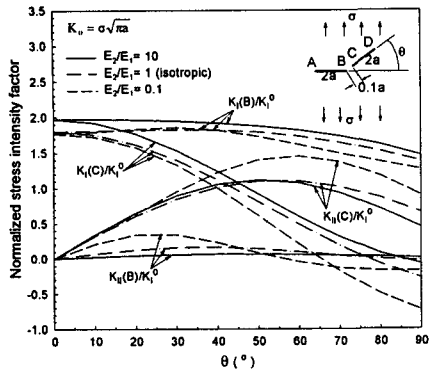


Fig. 13 Normalized stress intensity factors at the inner tips of two cracks as functions of the kinked angle Θ

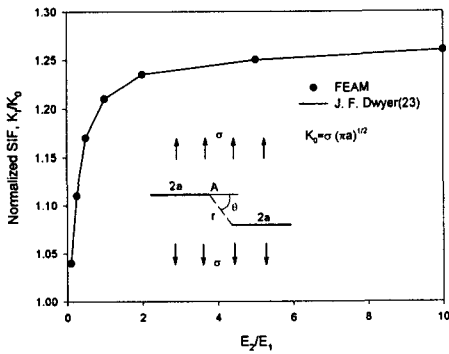


Fig. 14 Effects of anisotropy on stress intensity factors of two equal length offset parallel cracks, where $r=a$, $\Theta=60^\circ$

도가 $\pm 60^\circ$ 인 경우 가장 큰 응력강도계수를 얻었다. 따라서 본 논문에서는 두 균열간의 상호작용이 가장 큰 이 각도에서 E_2/E_1 을 변화시켜가며 이방성의 영향을 살펴보았다(Fig. 14). 여기서 $G_{12}/E_1=0.4$, $\nu_{12}=0.3$ 으로 고정하였다.

Fig. 14에서 볼 때 $E_2 > E_1$ 인 경우 K_I 이 증가하는데 이는 두 균열간의 상호작용이 커짐을 의미한다. 반면에 $E_2 < E_1$ 인 경우 상호작용 효과는 작아진다. 따라서 두 치우친 평행균열에서 균열과 수직인 방향의 재료의 탄성계수를 낮추면 균열간의 상호작용의 영향을 줄일 수 있음을 알 수 있다. 한편 푸아송비와 전단탄성계수의 비를 변화시킨 결과는 응력강도계수 값에 큰 영향을 미치지 않았다.

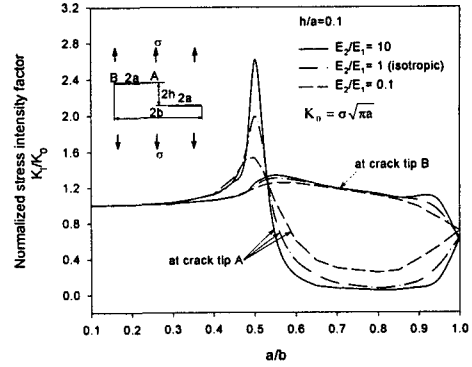


Fig. 15 Normalized stress intensity factors of two equal length parallel cracks when $h/a=0.1$

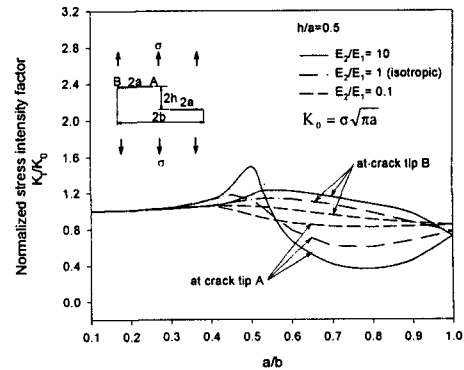


Fig. 16 Normalized stress intensity factors of two equal length parallel cracks when $h/a=0.5$

Fig. 15 ~ Fig. 17 에서는 각각 $h/a=0.1, 0.5, 1$ 일 때, $E_2/E_1=0.1, 1, 10$ 인 경우에 대하여 각각 두 균열간의 간격 $a/b=0.1 \sim 1.0$ 로 변화시켜가며 해석을 하였다. 여기서 $G_{12}/E_1=0.4$, $\nu_{12}=0.25$ 로 고정하였다.

h 가 0인 경우에는 K_{II} 가 K_I 에 비하여 무시할 만큼 작으나, h 가 커지면 K_{II} 는 증가하고, h 가 매우 커지면 K_{II} 는 다시 무시할 만큼 작아진다. 그러나 모든 경우에 K_I 에 비하여 K_{II} 가 훨씬 적으므로 여기서는 K_I 에 대하여만 무차원화된 응력강도계수 값을 나타내었다.

점선으로 표시한 등방성 재료에서의 결과는 Rook와 Cartwright⁽¹⁹⁾에서의 결과와 잘 일치하는

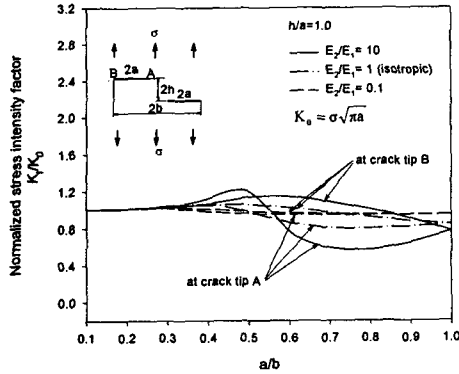


Fig. 17 Normalized stress intensity factors of two equal length parallel cracks when $h/a=1.0$

것이다. $a/b < 0.5$ 일 때는 a/b 가 커지면 두 균열이 점점 가까워지면서 K_I 이 점점 높아지며, $a/b = 0.5$ 일 때 두 균열의 안쪽 선단의 x 좌표가 같아지며 가장 높은 K_I 값을 나타낸다. $a/b > 0.5$ 일 때에는 균열이 홀로 존재할 때의 값과 비교하여 작아지고 있다. 이로부터 평행한 두 균열이 피로 균열성장하고 있을 때 서로의 영향으로 K_I 이 낮아져 결과적으로 홀로 존재할 때에 비해 피로성장률이 감소함을 알 수 있다.

3.5 두 경사진 대칭 균열

다음으로 Fig. 18에 도시된 두 경사진 대칭 균열 문제를 해석하였다. 재료의 이방성의 영향을 알아보기 위해 각각 $E_2/E_1 = 0.1, 1, 10$ 인 경우에 대하여 경사각 $\theta = 0^\circ \sim 80^\circ$ 로 변화시켜가며 K_I 과 K_{II} 를 구하였다.

Fig. 18에서 점선으로 표시된 것은 등방성의 경우에 대한 값으로 Rooke와 Cartwright⁽¹⁹⁾의 결과와 잘 일치한다. 십자모양의 기호가 있는 선은 균열 선단 A에서 구한 값이며 기호가 없는 선은 B에서 구한 값이다. 두 균열이 서로 가까워지면서 이방성의 영향이 나타나는데 $E_2 < E_1$ 일 때 균열 선단 A에서, $E_2 > E_1$ 일 때 선단 B에서 K_I 이 등방성의 경우보다 더 크게 나타났다.

3.6 직사각형 판 내의 두 에지균열

유한요소 교호법은 유한요소법과 이론해를 번

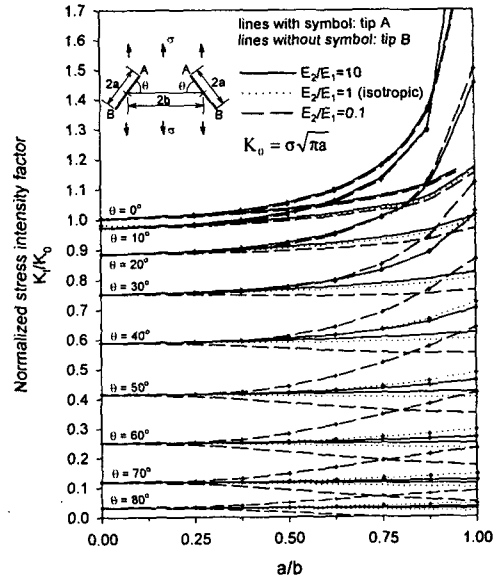


Fig. 18 Normalized stress intensity factors for two inclined equal cracks with different material properties

갈아 사용하므로 유한 판 내의 균열문제도 효과적으로 해석할 수 있다. Fig. 19에서와 같이 폭이 $2b$ 이고 높이는 $2c (=4b)$ 인 판에 길이 a 의 두 에지 균열이 존재하는 경우에 대하여 해석하였다. 여기서 $c/b = 2, E_1 = 172.4\text{GPa}, E_2 = 12.07\text{GPa}, \nu_{12} = 0.27, G_{12} = 1.86\text{GPa}$ 이다. 비록 모드 I 하중이 작용하고 있어도 재료의 직교이방성 주축이 직교좌표축과 45° 기울어져 있으므로 모드 II 응력강도계수가 나타난다.

Fig. 19는 a/b 의 변화에 따른 균열선단 A에서의 응력강도계수를 무차원화하여 나타낸 것으로 Boone 등⁽²⁴⁾의 해석결과와 비교적 잘 일치하는 반면 Atluri 등⁽²⁵⁾의 결과와는 큰 차이를 보였다. 그림에서 볼 때 Atluri 등은 균열의 길이가 점점 작아져서 영에 접근해 가면 모드 II 응력강도계수 K_{II} 의 값이 영으로 접근한다고 제시하였다. 그러나 유한요소 교호법에 의한 해석결과 및 Boone 등의 결과와는 다르게 나타남을 알 수 있다.

다음으로 유한판 내의 두 에지균열에 대하여 재료의 이방성의 영향과 판의 기하학적 형상의 영향을 살펴보았다. Fig. 20에서는 Fig. 19와 같은 유한판에서 직교이방성 탄성축을 직교좌표계와

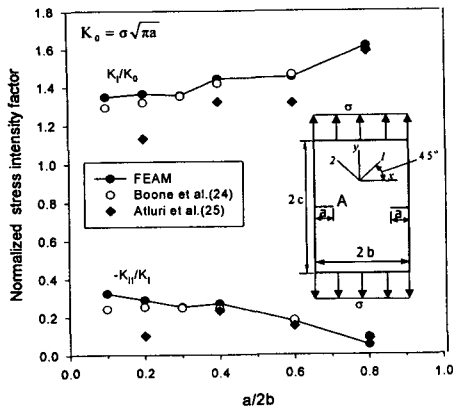


Fig. 19 Normalized stress intensity factors in an orthotropic tension plate with double edge cracks. Material principal axes are inclined at 45° to the geometric axes of symmetry

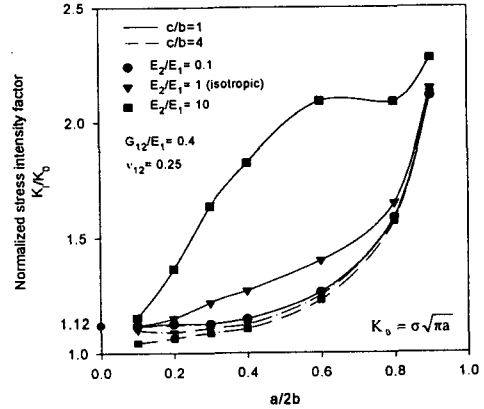


Fig. 20 Normalized stress intensity factors in an orthotropic tension plate with double edge cracks. Material principal axes are parallel to geometric axes of symmetry

일치시키고 $E_2/E_1=0.1, 1, 10$ 인 경우에 대하여 각각 균열의 길이를 변화시켜 가며 해석하였다. 또한 판의 형상비가 $c/b=1, 4$ 인 경우에 대하여 해석하여 판의 형상비의 영향도 살펴보았다. 여기서 $\nu_{12}=0.25, G_{12}/E_1=0.4$ 로 하였다.

$E_2/E_1=10$ 인 경정방형 판의 경우, 매우 큰 응력강도계수가 구해졌다. 그리고 $a/b=0.6 \sim 0.9$ 사이에서 응력강도계수가 단순증가하지 않고 오히려 약간 감소하였다가 증가함을 볼 수 있다. 이와 같은 현상은 참고문헌 25에서도 보여지고 있다. 균열의 길이가 짧은 경우 등방성 반 무한 판의 에지균열에 대한 이론적인 값인 1.12보다 더 낮은 값을 보이는 것을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 비등방성 판에서 곡선균열과 다중균열을 해석할 수 있도록 FEAM의 적용범위를 확장하였다. 직교이방성 판 내의 다중균열로 일직선상의 다중균열, 두 포물선형 곡선균열, 직선균열과 경사균열, 두 어긋난 평행균열, 두 경사진대칭균열 및 유한판 내의 두 에지균열을 해석하여 응력강도계수 값을 제시하였고, 탄성계수 비의 변화가 응력강도계수에 미치는 영향과 균열간의 상호작용의 영향을 살펴보았다. 또한 기존의 연구된 결과와 비교해 볼 때 FEAM의 해가 잘

일치하여 FEAM이 이방성판 내의 곡선균열 및 다중 균열 문제를 해석하는데 유용한 방법임을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 산하 성균관대학교 산업설비 안전성 평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Obata, M., Nemat-Nasser, S. and Goto, Y., 1989, "Branched Cracks in Anisotropic Elastic Solids," *J. Applied Mech.*, Vol. 56, pp. 858~864.
- (2) Savin, G.N., 1961, *Stress Concentration around Holes*, Pergamon Press, Oxford.
- (3) Lekhnitskii, S.G., 1981, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, English translation, Mir, Moscow.
- (4) Zang, W.L. and Gudmundson, P., 1991, "Kinked Cracks in an Anisotropic Plane Modeled by an Integral Equation Method," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 27, pp. 1855~1865.
- (5) Gao, H. and Chiu, C-H., 1992, "Slightly Curved or Kinked Cracks in Anisotropic Elastic

- Solids," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 29, pp. 947~972.
- (6) Xu, Y. and Keer, L.M., 1994, "Analysis of Crack Moving and Curving in Anisotropic Solids," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 31, pp. 3475~3491.
- (7) Doblare, M., Espiga, F., Gracia, L. and Alcántud, M., 1990, "Study of Crack Propagation in Orthotropic Materials by Using the Boundary Element method," *Eng. Fracture Mech.*, Vol. 37, No. 5, pp. 953~967.
- (8) Park, J.W., Jeong, J.T., Kwon, Y.S. and Choi, S.R., 1997, "Stress Intensity Factor of Semi-infinite Parallel Crack Propagated with Constant Velocity in Dissimilar Orthotropic Strip under Out-of-Plane Deformat," *Transactions of KSME, A*, Vol. 21, No.3, pp. 447~456.
- (9) Lee, K.H. and Choi, Y.C., 1999, "Analysis of Propagating Flat Crack in Orthotropic Rectangular Plate," *Transactions of KSME, A*, Vol. 23, No.1, pp. 89~98.
- (10) Lim, W.K. and Choi, S.Y., 2002, "Analysis of Inclined Crack Extension in Orthotropic Solids Under Biaxial Loading," *Transactions of KSME, A*, Vol. 26, No.6, pp. 993~1000.
- (11) Choi, S.Y., Lim, W.K. and An, H.S., 2000, "An Analysis of Flat-Crack in Homogeneous Anisotropic Solids Considering Non-Singular Term," *Transactions of KSME, A*, Vol. 24, No.1, pp. 69~78.
- (12) Atluri, S.N., 1997, *Structural Integrity and Durability*, Tech Science Press, Forsyth.
- (13) Nikishkov, G.P. and Atluri, S.N., 1994, "Analytical-Numerical Alternating Method for Elastic-Plastic Analysis of Cracks," *Comput. Mech.*, Vol. 13, No. 6, pp. 427~442.
- (14) Park, J.H. and Atluri, S.N., 1995, "Integrity of Aircraft Element with Multi-site Fatigue Damages," *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 51, No. 3, pp. 361~380.
- (15) Kim, Maan Won and Park, Jai Hak, 2000, "Analysis of Kinked and Arc-shaped Cracks in Anisotropic Materials by Using the Finite Element Alternating Method," *J. of the Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 28, No. 7, pp. 66~73.
- (16) Teutonico, 1969, L.J., Dislocations in Anisotropic Elastic Media, In *Mathematical Theory of Dislocation*(Edited by Toshio Mura), ASME, New York.
- (17) Kim, Maan Won, 2002, *Analysis of Multiple Curved Cracks Embedded in Isotropic and Orthotropic Plates by Using the Finite Element Alternating Method*, Ph.D. Thesis, Chungbuk N. University.
- (18) Sih, G.C., Paris, P.C. and Irwin, G.R., 1965, "On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies," *Int. J. Fracture Mech.*, Vol. 1, pp. 189~203.
- (19) Rooke D.P. and Cartwright D.J., 1976, *Compendium of Stress Intensity Factors*, HMSO London.
- (20) Binienda W. and Arnold S.M., 1995, "Driving Force Analysis in an Infinite Anisotropic Plate with Multiple Crack Interactions," *Int. J. Fracture*, Vol. 71, pp. 213~235.
- (21) Isida M., 1980, "Edge Cracks Originating from an Elliptical Hole in a Wide Plate Subjected to Tension and In-plane Shear," *Trans. Japan Soc. Mech. Engrs.*, Vol. 46, No. 409, pp. 947~956.
- (22) Denda M., 2001, "Mixed Mode I, II and III Analysis of Multiple Cracks in Plane Anisotropic Solids by the BEM: a Dislocation and Point Force Approach," *Eng. Analysis with Boundary Elements*, Vol. 25, pp. 267~278.
- (23) Dwyer J.F., 1997, "Edge Function Analysis of Crack Interaction in Anisotropic Materials," *Engineering Frac. Mech.*, Vol. 56, No. 2, pp. 233~248.
- (24) Boone T.J., Wawrzynek P.A. and Ingraffea A.R., 1987, "Finite Element Modeling of Fracture Propagation in Orthotropic Materials," *Eng. Fracture Mech.*, Vol. 26, No. 2, pp. 185~201.
- (25) Atluri S.N., Kobayashi A.S. and Nakagaki M., 1975, "A Finite-Element Program for Fracture Mechanics Analysis of Composite Material," *Fracture Mechanics of Composite*, ASTM STP 593, American Society of Testing and Materials, pp. 86~98.