

보이드 성장을 고려한 재료의 성형한계에 대한 비 국소 해석

김 영 석[†] · 원 성 연^{*}

(2002년 6월 10일 접수, 2003년 4월 14일 심사완료)

Non-Local Analysis of Forming Limits of Ductile Material Considering Damage Growth

Youngsuk Kim and Sungyeun Won

Key Words : Non-Local(비국소), Characteristic Length(특성길이), Void(보이드), Gradient-Dependent Plasticity(도함수 의존 소성이론)

Abstract

In this paper, the strain localization of voided ductile material has been analyzed by nonlocal plasticity formulation in which the yield strength not only depends on an equivalent plastic strain measure (hardening parameter), but also on the Laplacian thereof. The gradient terms in yield criterion show an important role on modeling strain-softening phenomena of material. The influence of the mesh size on the elastic-plastic deformation behavior and the effect of the characteristic length parameter for localization prediction are also investigated. The proposed nonlocal plasticity shows that the load-strain curves converge to one curve. Results using nonlocal plasticity also exhibit the dependence of mesh size is much less sensitivity than that for a corresponding local plasticity formulation.

1. 서론

판재나 관재 같이 두께가 얇은 금속 연성재료(ductile material) 및 준 취성 재료(quasi-brittle material)가 과도한 하중(또는 소성변형)을 받으면 재료의 일부에서 전단밴드와 같은 국부적인 변형 집중(deformation localization) 현상이 발생한다. 이로 인해 재료는 부하능력이 급격히 저하되어 파단이나 붕괴에 이르게 된다. 이런 변형 집중에 의해 전단 밴드가 발생하게 되는데, 재료의 특성과 경계 조건, 유한 요소 해석의 요소 크기 등에 따라 그 발생 각도와 폭이 결정된다. 근본적으로 이런 밴드는 재료 내부와 형상의 비 균질성에 의한 미세 구조 변화에 기인하는 것으로 알려져 있다.⁽¹⁾

소성 변형을 받는 재료의 안전 성형과 구조물

의 안전성 측면에서 이런 극한 하중 후에 급격한 하중의 감소와 더불어 파손을 야기하는 변형 집중 현상의 위험을 사전에 예측하는 것은 매우 중요한 연구 대상이 되고 있다.^(1,2)

이와 같은 재료의 소성 변형에서의 변형 집중 현상과 그 원인 분석, 대책 수립을 위해 다양한 항복 조건과 구성식을 이용한 유한 요소 해석 방법이 널리 이용되고 있고 보다 정확한 해석을 위해 여러 형태의 항복 조건식과 구성식이 제안되어 있다.⁽¹⁻³⁾ 그러나 종래의 구성식(local constitutive relation)에 기초를 두고 요소간 재료의 연속적인 변형을 가정하고 있는 유한 요소 해석 방법은 경계조건을 만족하는 해를 지배하는 편미분 방정식의 적정성을 잃을 뿐 아니라 수치 해가 요소 분할에 민감한 단점을 가지고 있다. 이러한 단점을 보완하기 위해서 변형률 구배 이론에 근거를 두고 있는 비국소 구성식을 도입한 연구가 최근 활발히 진행되고 있다.⁽⁴⁻¹³⁾

연성 재료의 변형이 증가하면 결정립이 회전하거나 입계에서 슬립이 일어나 재료의 미세 결정구조가 변하게 되며 또한 미세 보이드가 생성, 성장

[†] 책임저자, 회원, 경북대학교 기계공학부

E-mail : caekim@knu.ac.kr

TEL : (053)950-5580 FAX : (053)956-9914

* 경북대학교 대학원 기계공학과

하여 미세 크랙이 진전하여 재료 손상이 진행된다. 그러나 변형이 매우 균일하게 일어나고 변형률도 함수가 작을 때, 즉 특성변형 스케일이 재료의 비균질성의 특성 길이(characteristic length)보다 크다면 미세 구조 변화가 재료 변형에 미치는 영향은 매우 작다고 볼 수 있다. 이때 재료는 응력과 변형률이 각각의 평균값을 갖는 연속체로 간주할 수 있다. 따라서 종래의 구성식을 갖는 유한 요소 모델은 변형 집중으로 인한 전단 밴드가 발생하기 전까지만 유용하다고 볼 수 있다.

반면 재료내의 국부적인 영역에서 비 균질성으로 인해 변형이 집중되면 특성 변형 스케일은 재료의 특성 길이와 거의 같은 크기를 갖게 된다. 이 경우는 큰 변형 구배(deformation gradient)가 변형 집중 밴드 내에서 재료 전체의 변형을 지배하게 되며 재료의 거동은 비국소(nonlocal)가 된다.

변형 집중에 의해 발생하는 밴드의 폭을 결정하는 인자인 특성 길이의 도입을 통해 변형 집중으로 인한 재료의 파단이나 성형 한계를 예측하기 위한 여러 형태의 비국소 모델이 제안되어 있다.

적분형태 비국소 모델 형태로 Pijaudier-Cabot 과 Bazant⁽⁴⁾는 손상 변수로써 비국소 방정식을 사용하여 손상 문제를 해석하였다. Leblond⁽⁵⁾는 연성 보이드 재료에 대해서 Gurson 의 항복 조건식을 이용한 비국소 모델을 설정하여 내부 특성 길이가 분기(bifurcation)에 미치는 효과를 검토하였다. Tvergaard 와 Needleman⁽⁶⁾은 보이드 연성 재료에서 전단 밴드에 의한 변형 집중 과정에서 특성 길이의 영향을 연구하였다.

한편, Mindlin⁽⁷⁾은 도함수 의존 형태의 연속체 이론을 처음으로 선형 탄성 해석에 도입하였다. Aifantis⁽⁸⁾는 전위의 운동을 기본으로 한 금속 소성 변형에 대한 고찰을 통해 소성 유동응력의 표현에 변형률 뿐 아니라 변형률의 2 차 도함수 항을 도입한 모델을 제안하였고 도함수 의존 구성식은 지배방정식의 타원성을 상실하지 않음을 보였다. Zbib 와 Aifantis⁽⁹⁾는 변형률에 대한 도함수 뿐만 아니라 변형률 속도에 대한 도함수를 점소성 재료에 대해 변형 국소화 현상을 해석하였다. Muhlhaus 와 Aifantis⁽¹⁰⁾는 항복 조건식에 유효 변형률의 고차 도함수를 도입한 도함수 의존 소성이론에 대한 변분 원리를 도출하였고, de Borst 와 Muhlhaus⁽¹¹⁾는 미소 변형에 있어서의 구배 의존 소성 모델에 대한 유한요소 해석 알고리즘을 확립하였다.

이런 비 국소형 구성식의 도입은 여러 학자들의 연구에 의해서 최근 각광 받고 있는 MEMS,

Nanomechanics, Thin film 등의 분야에서 재료의 기계적 특성의 크기 효과를 효율적으로 다룰 수 있는 수단으로 인식되고 있다.⁽¹²⁾

본 연구에서는 비국소 구성식(nonlocal constitutive relation)과 유동이론을 이용하여 보이드를 함유한 연성 재료의 변형 집중 현상을 해석하기 위한 유한 요소 알고리즘을 개발하고 단축인장 문제와 평면 변형 인장 문제에 적용하여 재료의 변형 국소화 거동에 대해서 검토하였다.

2. 비국소 구성식

2.1 기본이론

비국소 모델의 경우 주어진 점의 어떤 근방 영역에서 스칼라 상태 변수들과 텐서 량은 그 점의 이웃 하는 점들 안에서의 공간 평균(spatial averaging)으로 평가 된다. 즉, 비국소 물리량 Y_m 은 가중 함수(weighting function) $\alpha(s)$ 를 이용하여 물리량 Y 를 평균화하여 다음과 같이 정의된다.

$$Y_m(x) = \frac{1}{G(x)} \int_V Y(x+s)\alpha(s)dV(s) \quad (1)$$

$$G(x) = \int_V \alpha(s)dV(s)$$

여기서, 가중 함수 $\alpha(s)$ 는 균질이고 등방성으로 간주하고 $Y(x)$ 가 일정할 때는 $Y_m = Y$ 가 되도록 하는 정규화 되는 값이다. 이 값은 물질점 x 와 근방의 한 점 x' 사이의 거리 $s = |x - x'|$ 에 의존한다. 본 연구에서는 Bazant 와 Chang⁽¹³⁾이 논한 여러 가지 가중 함수 중에서 대표적으로 널리 사용되고 있는 가중 함수로써 Gauss 의 정규분포 함수를 이용하였다.

$$\alpha(s) = \exp \left[- (bs/l)^2 \right] \quad (2)$$

여기서, b 의 값은 1, 2, 3 차원 문제의 경우 각각 $\sqrt{\pi}$, 2 , $(6\sqrt{\pi})^{1/3}$ 이다.

이 함수는 물질점 x 로부터 거리 s 만큼 멀어질수록 완만하게 감소하는 특징을 갖는다. 위 식에서 특성길이라고 불리는 인자 l 은 비국소 함수 $Y_m(x)$ 에 영향을 미치는 x 근방 영역의 크기를 결정하고 재료의 미세조직의 크기 또는 재료의 비균질성의 최대 크기와 같은 차수의 크기를 갖는 재료의 고유 특성이다.

2.2 도함수 의존 소성 이론

본 연구에서는 비국소형 항복 조건식으로 de Borst 와 Muhlhaus⁽¹¹⁾ 가 제안한 다음의 항복 조건식을 이용하였다.

$$f(\sigma, k, \nabla^2 k) = \phi(\sigma) - \sigma_g(k, \nabla^2 k) = 0, \\ \sigma_g(k, \nabla^2 k) = \sigma_Y(k) - g \nabla^2 k \quad (3)$$

여기서 $\phi(\sigma)$ 는 등가 응력 $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}'}$ 이고, k 는 소성 변형률 불변량($=\bar{\epsilon}^p$)의 척도이다. 또한 $\sigma_Y(k)$ 는 항복 강도이고, g 는 힘의 차원을 갖는 도함수 계수이다. g 의 부호가 양인 경우는 변형이 가공 연화가 되고 음인 경우는 가공 경화가 된다. 공간좌표에 대한 2계 도함수 ∇^2 은 라플라스 연산자(Laplace operator)이며 $\nabla^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 로 정의되고 확산(diffusion)의 개념을 갖고 있다.

변형집중 부위에서의 소성 변형률은 공간 평균 개념인 비국소 가중함수를 이용하여 구할 수 있다. 즉, 식 (3)은 식 (1)의 $Y(x+s)$ 값을 $s=0$ 근방에서 테일러 급수 전개하는 것으로 유도할 수 있다. 식 (1)에서 물리량 Y 를 소성 변형률($=\epsilon^p$)이라고 하면 식(1)은 $\epsilon_m^p = \frac{1}{l\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{s^2}{2l^2}) \epsilon^p(x+s) ds = \epsilon^p(x) + \frac{l^2}{4} \nabla^2 \epsilon^p(x) + \frac{l^4}{16} \nabla^4 \epsilon^p(x) + \dots$ 가 되고 $\nabla^4 \epsilon^p(x)$ 이상의 고차 항을 무시하면 $\epsilon_m^p = \epsilon^p(x) + \frac{l^2}{4} \nabla^2 \epsilon^p(x)$ 가 된다. 선형 경화재료에 적용하면, 응력은 물질점 x 에서 $\sigma = \sigma_o + h \epsilon_m^p$ 으로 평가되므로 $\sigma = \sigma_o + h \epsilon^p(x) + \frac{l^2}{4} h \nabla^2 \epsilon^p(x) = \sigma_Y + \frac{l^2}{4} h \nabla^2 \epsilon^p(x) = \sigma_Y - g \nabla^2 \epsilon^p(x)$ 으로 간주할 수 있다. 단, $g = -\frac{l^2}{4} h$ 이고 h 는 가공 경화율이다. 따라서 도함수 의존 모델, 식 (3), 과 비국소 모델, 식 (1),은 등가로 생각할 수 있다.

3. 보이드를 포함한 연성재료의 손상모델

연성 재료가 과도한 하중을 받을 때 재료 내부에서 손상(보이드)의 발생과 성장을 다루는 대표적인 모델로 Gurson⁽¹⁴⁾의 항복함수가 널리 사용되고 있다. Needleman 과 Tvergaard⁽¹⁵⁾는 그것을 수정·발전시켜 보이드의 발생·성장·결합을 일반화하여

연성과파 해석을 행하기 위한 기초를 확립하였다.

보이드 재료의 항복함수 f 는 근사적으로 다음 식으로 나타내진다.

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_M, C_v) = \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_M} \right)^2 + 2C_v q_1 \cosh \left(\frac{q_2 \sigma_{kk}}{2\sigma_M} \right) - (1 + q_3 C_v^2) = 0 \quad (4)$$

σ_{ij} 는 보이드 룰이 C_v 인 보이드를 포함한 재료의 거시적인 코시 응력을 나타내고, $\bar{\sigma}$, σ_M 은 각각 보이드 재료의 거시적인 상당응력과 비 압축성인 모재(matrix)의 상당 응력이다. q_1, q_2, q_3 는 실험결과를 잘 나타내도록 Needleman 과 Tvergaard⁽¹⁵⁾에 의해 도입된 수정 파라메타로, $q_1 = 1.5, q_2 = 1, q_3 = q_1^2 = 2.25$ 이다. 물론 $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ 인 경우는 Gurson의 모델로 귀착된다.

모재의 상당 소성 변형률을 ϵ_M^p , 모재의 진 응력-진 변형률 선도의 기울기를 $E_t (= \frac{d\sigma_M}{d\epsilon_M})$ 라고 하면 모재의 소성 일량과 보이드 재료의 소성 일량이 일치한다는 가정에 의해 다음 식이 얻어진다.

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = (1 - C_v) \sigma_M \dot{\epsilon}_M^p \quad (5)$$

$$\dot{\epsilon}_M^p = \left(\frac{1}{E_t} \right) \dot{\sigma}_M, \dot{\sigma}_M = \frac{E E_t}{E - E_t} \frac{\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p}{(1 - C_v) \sigma_M} \quad (6)$$

여기서 $\sigma_M = \sigma(\epsilon_M^p)$ 으로 모재의 가공 경화 특성을 나타내고, 모재의 경화률 $H' (= \frac{d\sigma_M}{d\epsilon_M^p})$ 은

$$\frac{1}{H'} = \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E}$$

소성변형에 따른 보이드 룰의 발전 방정식(evolution equation)으로서 다음 식⁽¹⁶⁾을 이용한다.

$$\dot{C}_v = (\dot{C}_v)_{growth} + (\dot{C}_v)_{nucleation} \quad (7)$$

여기서 $(\dot{C}_v)_{nucleation}$ 은 변형률 제어 모델의 경우에 $(\dot{C}_v)_{nucleation} = A \dot{\sigma}_M + B \frac{\sigma_{kk}}{3}$ 으로 정의된다.

$$A = \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) \frac{\psi}{S\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_M^p - \epsilon_N}{S} \right)^2 \right], B = 0$$

여기서 A, B 는 평균 변형률 ϵ_N , 표준편차 S 와 체적분률 ψ 를 가지는 보이드가 정규 분포에 따라 발생하도록 선정된 값이다. 강재의 경우는 $0.3 \leq \epsilon_N \leq 0.7$, $0.01 \leq S \leq 0.1$ 그리고 $\psi = 0.04$ 이다.⁽¹⁶⁾

모재에 대한 소성 변형률 속도의 법선성이 성립한다고 가정하면 거시적인 소성 변형률 속도의 법선성도 성립한다고 볼 수 있기 때문에 보이드 재료의 소성 변형률 속도 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 은 식 (4)의 f 를 소성 포텐셜로 간주하여 다음과 같이 나타내진다.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (8)$$

식 (8)의 소성 승수 $\dot{\lambda}$ 는 프라거의 적합 조건식으로부터 얻어진다.

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_M} \dot{\sigma}_M + \frac{\partial f}{\partial C_v} \dot{C}_v = 0 \quad (9)$$

식 (9)로 부터 유도된 $\dot{\lambda}$ 의 정의를 식 (8)에 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \frac{1}{H} m_{ij}^G m_{kl}^F \dot{\sigma}_{kl} \\ m_{ij}^G &= \frac{3\sigma_{ij}'}{2\sigma_M} + \alpha \delta_{ij}, \quad m_{kl}^F = \frac{3\sigma_{kl}'}{2\sigma_M} + \beta \delta_{kl} \\ \alpha &= \frac{C_v}{2} q_1 q_2 \sinh\left(\frac{q_2 \sigma_{kk}'}{2\sigma_M}\right), \quad \beta = \alpha + \frac{B\sigma_M}{6} \cdot \frac{\partial f}{\partial C_v} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 \bar{H} 는 거시적인 경화률이다. 식 (10)의 역관계를 구하면 다음과 같은 응력 속도에 대한 구성식이 얻어진다.⁽¹⁷⁾

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}, \quad D_{ijkl} = D_{ijkl}^e - \mu^* M_{ij}^F M_{kl}^G / H \\ M_{ij}^G &= D_{ijkl}^e m_{kl}^G, \quad M_{kl}^F = m_{rs}^F D_{rskl}^e \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} H &= \bar{H} + m_{rs}^F D_{rskl}^e m_{kl}^G \\ \mu^* &= 0 \text{ 일때는 탄성제하, } \mu^* = 1 \text{ 일때는 소성부하} \\ D_{ijkl}^e &= (M_{ijkl}^e)^{-1} = 2G \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

비국소 모델의 경우 모재의 가공 경화 특성은 식 (3)으로 부터 $\sigma_M = \sigma(\epsilon_M^p) - g \nabla^2 \epsilon_M^p$ 으로 나타낼 수 있다. 최종적으로 보이드 재료에 대한 비국소 구성식은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(D_{ijkl}^e - \mu^* \frac{M_{ij}^F M_{kl}^G}{H} \right) \left(\dot{\epsilon}_{kl} - \frac{g}{H} \nabla^2 \dot{\epsilon}_{kl}^p m_{kl} \right) \quad (13)$$

여기서, $g=0$ 인 경우에는 식 (13)는 국소 모델에 대한 구성식이 된다. 본 연구에서는 함수 g 에 대한 구체적인 형태로 Mikkelsen⁽¹⁸⁾이 인장을 받는 봉의 넥킹 해석과 내압을 받는 원관 불안정 해석에 이용한 $g=l^2 \sigma_Y$ 를 이용하였다.

4. 유한차분 및 수치계산

4.1 1 차원 문제

구성식에 비국소 형태의 변형률에 대한 도함수 항의 도입이 봉의 소성변형 거동에 미치는 영향을 해석적으로 검토하였다. 여기서는 길이가 $L(=20mm)$ 인 재료가 단축 인장 하에서 다음 식으로 표현되는 소성 변형률이 영역($w=2.0mm$)에 집중해 있다고 가정한다. 단, 특성 길이 l 은 $w/2\pi$ 이다.

$$\begin{aligned} \epsilon^p &= 0.333 \left[1 + \cos\left(\frac{x}{l}\right) \right], \quad |x| \leq 1.0 \\ \epsilon^p &= 0, \quad |x| > 1.0 \end{aligned} \quad (14)$$

재료는 $\sigma = \sigma_Y + h\epsilon^p$ 의 가공 연화 특성을 따르고 $h = -2.94kN/mm^2$, $\sigma_Y = 294N/mm^2$, $E = 206kN/mm^2$ 으로 가정하였다.

Δx 구간에서 소성 변형률의 도함수 및 2 차도함수는 각각 다음과 같이 중앙 차분 근사(central difference approximation)에 의해 계산된다.

$$\begin{aligned} \nabla \epsilon^p &= \left(\frac{d\epsilon^p}{dx} \right)_i = \frac{\epsilon_{i+1}^p - \epsilon_{i-1}^p}{2\Delta x} \\ \nabla^2 \epsilon^p &= \left(\frac{d^2 \epsilon^p}{dx^2} \right)_i = \frac{\epsilon_{i+1}^p - 2\epsilon_i^p + \epsilon_{i-1}^p}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

4.2 2 차원 문제

2 차원 변형 문제에서는 재료의 변형 국소화에 의한 성형 한계에 미치는 비국소 구성식의 영향을 검토하기 위해 평면 변형하에서 인장 변형을 받는 보이드 재료에 대한 유한 요소 해석을 수행하였다. 이러한 변형 집중 거동을 해석 하기 위해 Mikkelsen⁽¹⁸⁾에 의해 주어진 g 의 정의를 이용하여 국소 구성 모델의 경우에는 특성 길이 변수 l 을 영으로 하였고 비국소 구성 모델의 경우에는 영이 아닌 값을 택하여 해석을 수행하였다. 변형의 대

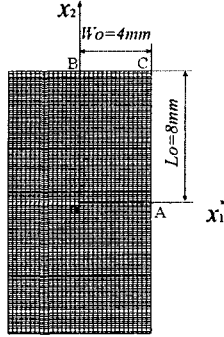


Fig. 1 FEM modeling of the plane strain tension test with the width $w_0 = 4mm$ and the length $L_0 = 8mm$

칭성으로 인해 해석은 전체 시편의 1/4 만을 대상으로 하였다. 경계조건으로는 대칭축(OA 와 OB)에서 대칭 경계조건과 자유 표면(AC)에서의 자유 경계 조건을 도입하였고 또한 시편의 상단(BC)에 변위 경계조건으로는 일정한 변위를 가하였다. 해석은 보이드의 성장과 발전을 고려하도록 개발된 Tomita 와 김영석⁽¹⁹⁾의 EPLAN 코드를 비국소 항복 함수에 근거한 탄소성 대변형 유한요소 해석이 가능하도록 수정하여 수행하였다. 사용한 유한 요소는 4 개의 가우스 적분점을 갖는 등방 매개 4 절점 평면 요소이다.

변형 집중 거동에 미치는 비국소 구성식의 영향과 유한요소의 크기 의존성을 검토하기 위해 4 종류의 요소분할- $8 \times 32, 16 \times 64, 24 \times 96, 32 \times 128$ -에 대해서 유한요소 해석을 각각 수행하였다. 첫 번째와 두 번째 숫자는 각각 x_1 과 x_2 방향의 요소의 분할 수이다.

Fig. 1 에 2 차원 해석을 위한 유한요소 모델을 나타내었다. 모재의 단축 응력-변형률 특성은 다음 식으로 나타내지는 것으로 하였다.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_M &= \frac{\sigma_Y}{E}, & \sigma_M < \sigma_Y \\ \epsilon_M &= \epsilon_Y \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_Y} \right)^N, & \sigma_M \geq \sigma_Y \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

여기서 σ_Y 는 모재의 초기 항복 응력이고, $\epsilon_Y = \sigma_Y / E$ 이다. 모재의 탄소성 특성은 $\sigma_Y / E = 1/300, \nu = 0.33, N = 10$ 으로 가정하였다. 또한 식 (7)에서 변형률 제어 모델에 의한 보이드 발생은 $\psi = 0.1, \epsilon_N = 0.4, S = 0.1$ 로 하였고 초기 보이드 률은 $C_v = 0.05$ 로 하였다. 경계 조건 하에서

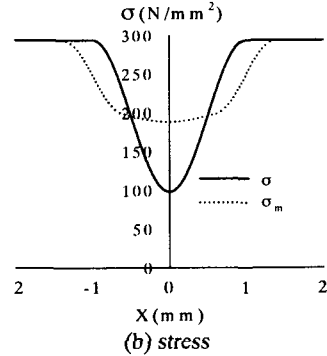
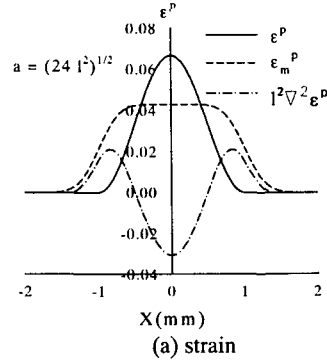


Fig. 2 (a) strain distribution and (b) stress distribution for $l = 0.318mm$ with 5 meshes

재료의 변형 중에 자연스러운 변형 집중을 발생시키기 위해서 변형 전 재료에 초기 결함으로서 (initial imperfection) 보이드 률 분포의 불균일을 가정하였다. 즉, 초기 보이드 률은 재료의 중앙에서 큰 값을 가지고 길이 방향(x_2)을 따라 다음과 같이 2 차 함수적으로 감소하지만 횡방향(x_1)으로는 균일하게 분포한다고 가정하였다.

$$C_v = C_{v0} \left\{ 1 - 0.03 \left(\frac{x_2}{L_0/2} \right)^2 \right\} \quad (17)$$

5. 해석결과 및 고찰

5.1 1 차원 문제

Fig. 2(a)와 (b)에 소성 변형 집중 영역의 요소 수를 5 개로 하고 소성 변형률의 도함수 계산에서 $\Delta x = 0.4mm$ 로 하였을 때의 변형률 분포와 응력

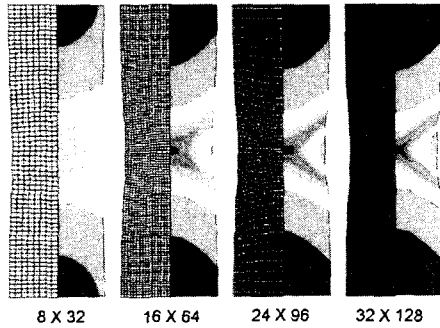


Fig. 3 Local analysis of deformed meshes(left) and equivalent strain contours(right) for the four different meshes($l = 0$)

분포를 나타내었다. 변형 집중영역에서 평균변형을 ϵ_m^p 는 식 (1)로부터 공간 평균거리 ($a = \sqrt{24l^2} = 1.6mm$)에 대해서 계산하였고, 평균응력은 $\sigma_m = \sigma_y + h\epsilon_m^p \approx \sigma_y + h\epsilon^p + hl^2\nabla^2\epsilon^p$ 로 부터 계산하였다.

그림으로부터 함수 값의 평균화 개념인 도함수의존 항복 조건식의 도입은 변형이 집중되어 있는 중심 영역에서는 2 계 도함수 값($= l^2\nabla^2\epsilon^p$)이 음의 값이 되어 항복강도를 상승시켜 변형 집중 현상을 억제하며 재료의 변형을 안정화 시켰음을 알 수 있다. 반대로 소성 변형이 거의 없는 탄소성 경계 부근의 탄성영역에서는 이 도함수 값이 양의 값이 되어 항복강도를 저하시켜 오히려 소성변형을 촉진시켜 변형을 불안정하게 하고 있음을 알 수 있다.

5.2 2차원 문제

5.2.1 국소 해석

Fig. 3은 특성길이가 $l=0$ 인 경우의 국소모델을 이용하여 네 종류의 요소 분할에 대해 인장 변형률이 $\epsilon_2 = \ln(1+U_2/L_0) = 0.14$ 까지 변형된 유한 요소 형상(왼쪽)과 소성 변형률 분포(오른쪽) 결과를 나타낸다. 각 등가 소성 변형률 분포에 대한 등고선은 최소값 0.05 부터 최대값 0.5 까지 0.05의 간격으로 나타내었다. 중심부에 완만한 확산 핵이 발생하고 있는 8x32의 요소분할의 경우를 제외하고는 요소 분할이 증가하여 요소 크기가 작아질수록, 중심부에서 소성 변형이 매우 커지면서 대각선 방향의 자유 표면(AC)쪽으로 변형집중이 발

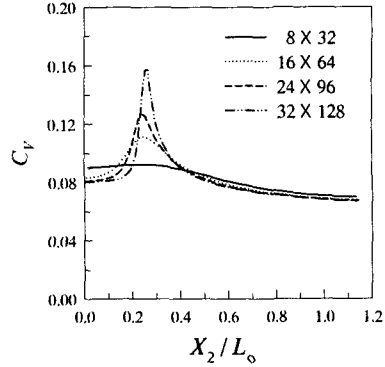


Fig. 4 Local analysis of void volume fraction for four different meshes at tensile strain $\epsilon_2 = 0.14$ along AC($l = 0$)

생하는 것을 알 수 있다. 32x128의 요소 분할의 경우에는 변형 집중이 일어나는 매우 좁은 밴드가 시편의 축에 대해 55.0⁰ 기울어져 있는데 이 밴드의 기울기는 비 보이드 재료에 대해서 Hill⁽²⁰⁾이 계산한 54.7⁰ 보다 약간 큼을 알 수 있다. 이는 보이드 재료에서의 변형 집중 현상이 인장 변형에 의해 시편의 중심부로부터 보이드가 성장 및 생성 되면서 보이드 룰이 증가하여 비록 모재의 가공 경화률이 양의 값을 갖더라도 거시적인 가공 경화률은 음이 되면서 변형 연화가 발생하기 때문으로 판단된다.

Fig. 4는 네 가지의 다른 유한 요소 형상에 대해서 자유 표면(AC)의 위 축을 따라 변형률 $\epsilon_2 = 0.14$ 에 대해서 보이드 룰(C_v) 분포를 나타낸다. Fig. 3의 변형된 요소에서 예상할 수 있듯이 8x32인 요소 분할의 경우는 시편 중심부에서 국부 핵 발생 없이 완만한 확산 핵의 존재에 의해 전체적으로 균일한 보이드 룰의 분포를 보인다. 그러나 요소가 32x128까지 커질수록 보이드 룰의 분포는 국부적으로 $x_2/L_0 = 0.25$ 위치 부근에서 집중되어 이 영역에서 변형이 집중되고 있음을 알 수 있다. 또한 요소 수가 증가할수록 보이드 룰은 변형 집중 영역 내에서는 큰 값을 가지고 그 영역 바깥에서는 낮은 값을 가짐을 알 수 있다. 이는 요소 분할이 적을수록 대부분의 변형이 국부적으로 매우 좁은 밴드에 집중하므로 상대적으로 밴드 밖에서는 조기에 탄성 재하가 발생하여 재료의 인장 변형을 흡수할 능력을 상실하기 때문이다. 이상의 결과로부터 국소 구성 모델의 경우에는 변형 국소화 이후(post-localization) 거동은 요소 의존성이 크다는 것을 알 수 있다.

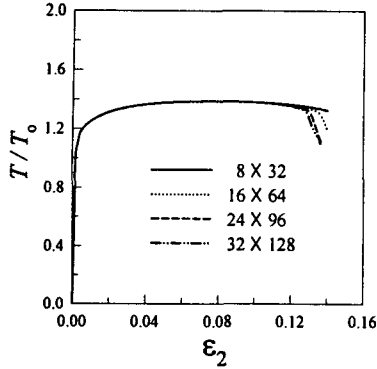


Fig. 5 Local analysis of non-dimensional tensile load-strain curves for four different meshes($l = 0$)

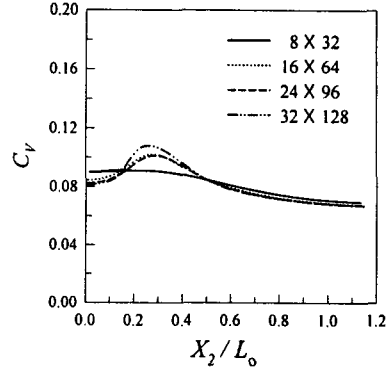


Fig. 7 Nonlocal analysis of void volume fraction for four different meshes at tensile strain $\epsilon_2 = 0.14$ along AC($l = 0.12L_0$)

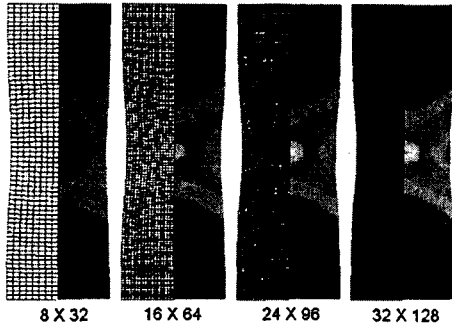


Fig. 6 Nonlocal analysis of deformed meshes(left) and equivalent strain contours(right) for the four different meshes($l = 0.12L_0$)

Fig. 5 는 각 요소 분할에 대해서 무차원화 한 인장 하중($T/T_0 = \sigma_2 A / \sigma_y A_0$)-변형률 곡선을 나타낸다. 인장 하중-변형률 곡선으로부터 최대 하중 이후의 재료의 거동은 요소 분할에 따라 큰 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. 요소 분할이 8x32 인 경우에 재료는 최대 하중 이후에도 상당한 인장 변형률까지 하중의 급격한 하강 없이 변형이 계속되고 있음을 알 수 있다. 그러나 요소 분할이 증가할수록 최대 하중 이후에 하중이 급격하게 감소하여 재료가 인장 변형을 흡수 할 능력을 조기에 상실하고 있음을 알 수 있다. 이는 요소 분할이 적을수록 재료는 중심부에서 균일 변형하면서 확산 넥에 의한 가공 경화에 의해 인장 변형을 흡수하고 있는데 반해서 요소 분할이 증가할수록 재료 중심부의 국부적인 변형과 함께 보이드를 증가로 재료 손상에 의한 인장 변형 흡수 능력이 현저하게 저하되는 것에 기인한 것으로 생각된다.

5.2.2 비국소 해석

Fig. 6 은 네 종류의 요소 분할에 대해 특성길이 가 $0.12L_0$ 인 경우의 비국소 모델을 이용하여 인장 변형률이 $\epsilon_2 = 0.14$ 까지 변형된 유한 요소 형상(왼쪽)과 소성 변형률 분포(오른쪽) 결과를 나타낸다.

국소 모델과 달리 요소 분할이 증가하여도 중심부에서의 대각선 방향으로의 변형 국소화는 두드러지게 나타나지 않고 시편은 전체적으로 요소 분할에 무관하게 중심부에 완만한 확산 넥을 형성하면서 거의 동일한 형상으로 변형되고 있음을 알 수 있다.

Fig. 7 은 비국소 모델의 경우에 변형률 $\epsilon_2 = 0.14$ 에서 네 가지의 다른 유한 요소 형상에 대해 자유면의 위 축을 따라 구한 보이드률(C_v) 분포를 나타낸다. 8x32 인 요소분할의 경우에는 국소 모델과 거의 동일한 보이드률 분포를 보이고 있음을 알 수 있다. 한편, 요소가 증가함에 따라 보이드률의 최대값이 조금 증가하고 있으나 그 차이는 크지 않고 전체적으로 요소 분할 수에 크게 의존하지 않고 거의 동일한 분포를 나타내고 있음을 알 수 있다. 보이드률의 최대값이 $C_v = 0.11 \sim 0.16$ 인 Fig. 4 의 국소 모델과 비교하면 비국소 모델은 보이드률의 최대값이 $C_v = 0.10 \sim 0.11$ 의 낮은 범위에 있음을 알 수 있다. 이는 국소 모델과 달리, 변형률 구배 의존 항복 함수를 사용한 비국소 모델에서는 변형이 집중하고 있는 영역 중심에서 변형률 도함수 항의 존재가 재료의 항복 응력을 상승시켜 국소 변형을 억제하는 반면, 소성 변형이 거의 없는 탄소성 경

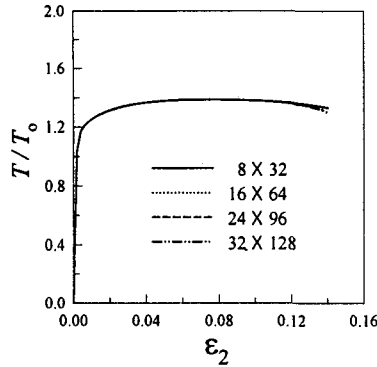


Fig. 8 Nonlocal analysis of non-dimensional tensile load-strain curves for four different meshes ($l = 0.12L_0$)

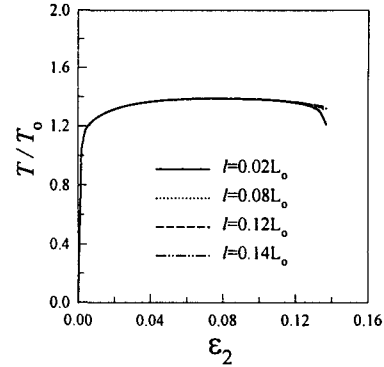


Fig. 9 Non-dimensional tensile load-strain curves for different characteristic lengths with 24×96 mesh ($l = 0.02L_0, 0.08L_0, 0.12L_0, 0.14L_0$)

계부근의 탄성영역에서는 오히려 변형률 포함수 항의 존재로 인해 재료의 항복응력이 저하되어 소성 변형이 촉진되고 있기 때문이다.

Fig. 8 은 비국소 모델에서 특성 길이가 $0.12L_0$ 인 경우에 각 요소 분할에 대해서 무차원화한 인장 하중-변형률 곡선을 나타낸다.

비국소 모델의 경우는 네 가지의 다른 유한 요소 분할에 대해 인장 하중-변형률 선도에 있어서 인장 변형이 증가하여도 최대하중 이후 재료 내부의 손상으로 야기되는 하중의 급격한 감소가 발생하지 않음을 알 수 있다. 또한 요소분할이 8×32 인 경우를 제외하고는 모든 요소 분할에 대한 인장 하중-변형률 선도는 하나의 곡선으로 수렴하고 있음을 알 수 있다. 즉 전체적으로 비국소 모델의 도입은 재료의 부하능력의 평가에 있어서 Fig. 5 의 국소 모델의 경우와는 달리 요소 분할의 의존성을 해소하는데 기여하고 있음을 알 수 있다.

본 해석에서는 특성 길이가 $0.12L_0$ 인 경우에 요소 분할이 16×64 이상이면 재료의 변형 거동에 있어서 요소 분할의 의존성이 해소되고 있음을 알 수 있다. 그러나 어느 정도의 요소 분할에서 해석 결과의 요소 의존성이 해소되는지는 대상으로 하는 경계값 문제와 재료의 특성길이에 따라서 달라진다.

5.3 특성길이의 영향

Fig. 9 는 비국소 모델의 경우에 24×96 요소 분할된 시편에서 인장 하중-변형률 선도에 미치는 특성 길이의 영향을 나타낸다.

24×96 요소 분할의 경우에 요소의 한 변의 크기는 약 $0.16mm$ 인데, 특성 길이가 $0.02L_0, 0.08L_0, 0.12L_0$ 와 $0.14L_0$ 의 경우에 특성 거리는 $0.16mm, 0.64mm, 0.96mm$ 와 $1.12mm$ 가 된다.

특성 길이가 $0.02L_0$ 과 $0.08L_0$ 와 같이 요소의 한 변의 길이 보다 상대적으로 작은 경우에는 특성 길이의 도입에 대한 효과가 무시되어지기 때문에 비국소 해석에서 넥 발생 후(post-necking)의 거동은 국소 해석결과와 거의 같게 된다. 따라서 인장 하중-변형률 선도에서 알 수 있듯이 최대 하중을 지나서 재료 내부의 손상으로 인한 하중의 감소와 함께 재료가 인장 변형을 흡수할 능력을 상실하게 된다.

반면에 특성 길이가 $0.12L_0$ 와 $0.14L_0$ 와 같이 커지는 경우에는 변형률 포함수의 효과로 인해 재료가 외부의 인장 변형에 강건하게 반응하면서 변형 집중의 개시를 늦추고 있기 때문에 인장 하중-변형률 선도가 완전히 일치하며 하중의 감소 없이 외부의 부하에 따라 시편이 균일하게 변형하고 있음을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서 대상으로 하고 있는 모델의 경우에 변형 국소화의 유한 요소 해석에서 특성길이가 유한 요소의 길이 보다 약 6 배 이상 커야만 요소 크기의 의존성을 억제할 수 있으며 또한 인장 하중-변형률 선도가 하나의 곡선으로 수렴하게 됨을 알 수 있다.

6. 결론

본 연구에서는 종래의 국소 구성식의 도입에

따른 변형 국소화 현상의 유한 요소 해석에서의 불합리성의 해소와 재료 변형 특성의 내부 거리의 의존성을 효과적으로 다루기 위한 수단으로 최근 활발히 연구 되고 있는 비국소 구성식과 유동 이론을 이용하여 보이드를 함유한 연성 재료의 변형 국소화 현상을 해석하기 위한 알고리즘을 개발하였다. 비 국소형 구성식을 도입하여 보이드를 포함한 연성 재료의 변형 해석에서 해석 결과의 요소 의존성을 제거할 수 있음을 밝혔고, 특성길이의 크기가 변형 국소화에 미치는 영향을 파악하였다. 본 연구에서 대상으로 한 모델의 경우는 특성 길이가 적어도 유한요소의 한 변 길이의 6 배 이상, $l \geq 6 \times$ (요소 길이), 이 되어야 변형 국소화 현상의 유한요소 해석에 대한 요소 크기의 의존성을 억제할 수 있고 또한 인장 하중-변형을 선도가 하나의 곡선으로 수렴함을 밝혔다. 비국소 모델을 이용한 결과, 국소 모델을 이용한 것 보다 변형 국소화 거동을 해석하는데 있어서 요소 크기 의존성이 덜 민감하고 큰 특성 길이를 도입함으로써 요소 크기 의존성을 제거할 수 있었다.

후 기

본 연구는 학술진흥재단의 해외 파견 교수 (KRF-2000-013-EA0012) 연구비 지원에 의해 행해졌으며 이에 관계자 제위께 감사 드린다.

참고문헌

- (1) Needleman, A., 1988, "Material Rate Dependence and Mesh Sensitivity on Localization Problems," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 67, pp. 69~86.
- (2) Tomita, Y., 1995, "Computational Simulation of Flow Localization Behavior," *JSME Int. J.*, Vol. 38, pp. 145~154.
- (3) Hong, S.I., Hwang, D.S., and Lee, B.S., 2000, "A Study of Localization with Material Properties using Numerical Method," *Trans. Mat. Proc.*, Vol. 9, No. 4, pp. 395~403.
- (4) Pijaudier-Cabot, G., and Bazant, Z.P., 1987, "Nonlocal Damage Theory," *J. Engng. Mech. ASCE*, Vol. 113, pp. 1512~1533.
- (5) Leblond, J.B., Perrin, G., and Devaux, J., 1994, "Bifurcation Effects in Ductile Metals with Nonlocal Damage," *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 61, pp. 236~242.
- (6) Tvergaard, V. and Needleman, A., 1995, "Effects of Nonlocal Damage in Porous Plastic Solids," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 32, pp. 1063~1077.
- (7) Mindlin, R.D., 1963, "Influence of Couple-Stresses on Stress Concentrations," *Exp. Mech.*, Vol. 3, pp. 1~7.
- (8) Aifantis, E.C., 1984, "On the Microstructural Origin of Certain Inelastic Models," *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, Vol. 106, pp. 326~330.
- (9) Zbib, H., and Aifantis, E.C., 1989, "On the Localization and Postlocalization Behavior of Plastic Deformation. Part I. On the Initiation of Shear-Bands ; Part II. On the Evolution and Thickness of Shear Bands. Part III. On the Structure and Velocity of Protevin-Le Chatelier Bands," *Res. Mech.*, pp. 261~277, 279~292, and 293~305.
- (10) Muhlhaus, H.B., and Aifantis, E.C., 1991, "A Variational Principle for Gradient Plasticity," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 28(7), pp. 845~857.
- (11) de Borst, R., and Muhlhaus, H.B., 1992, "Gradient-Dependent Plasticity : Formulation and Algorithm Aspects," *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 35, pp. 521~539.
- (12) Hutchinson, J.W., 2000, "Plasticity at the Micron Scale," *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 225~238.
- (13) Bazant, Z.P., and Chang, T.P., 1984, "Instability of Nonlocal Continuum and Strain Averaging," *J. Engng. Mech.*, Vol. 110, pp. 1441~1450.
- (14) Gurson, A.L., 1977, "Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth ; Part I - Yield Criterion and Flow Rules for Porous Ductile Materials," *J. Engng. Mat. Tech.*, Vol. 99, pp. 2~15.
- (15) Needleman, A. and Tvergaard, V., 1978, "Void Growth and Local Necking in Biaxially Stretched Sheets," *J. Eng. Mat. Tech.*, Vol. 100, pp. 164~169.
- (16) Hutchinson, J.W., and Tvergaard, V., 1981, "Shear Band Formation in Plane Strain," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 17, pp. 451~470.
- (17) Kim, Y.S., 2001, "Theory of Engineering Plasticity," Sigma Press, Seoul, Korea.
- (18) Mikkelsen, L.P., 1997, "Post Necking Behavior Modeled by a Gradient Dependent Plasticity Theory," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 34, pp. 4531~4546.
- (19) Tomita, Y., and Kim, Y.S., 1984, "Development of FEM Code for Elastic - Plastic Large Strain Analysis (EPLAN)," Kobe university, Kobe, Japan.
- (20) Hill, R., 1950, "The Mathematical Theory of Plasticity," Oxford University Press, Oxford, UK.