

정렬불량을 가진 기어 커플링의 동역학적 모델 개발에 관한 연구 (I)

- 기어 커플링의 동적모델 구축을 중심으로 -

김 병 옥[†] · 김 용 철^{*}

(2002년 1월 25일 접수, 2003년 3월 31일 심사완료)

A Study on Development the Dynamic Model to Misaligned Gear Coupling (I)

- The Focus on Development of Dynamic Model to a Gear Coupling -

Byung Ok Kim and Yong Chul Kim

Key Words: Misalignment(정렬불량), Gear Coupling(기어커플링), Rotor(회전체), Coulomb Damping(쿨롱감쇠), Bending Stiffness(굽힘강성)

Abstract

In rotating machinery, unbalance and misalignment are major concerns in vibration. Unbalance can be eliminated by balancing procedure to some degree, but little work has been done on the vibrations that occur in a misaligned rotor system. Currently, no generalized theoretical model based on a rotor system with flexible coupling is available to describe the vibrations caused by misalignment. As a part of systematic investigation on the misalignment, first of all, the study on flexible coupling with misalignment should be preceded. In this study, the geometry and reaction force and moment of a gear coupling with misalignment was investigated, also the theoretical model of a gear coupling with misalignment was presented by using the relationship between geometry and moment of gear coupling. It is expected that the proposed procedure can be applied to derive the theoretical model of other couplings.

1. 서 론

회전기계(rotating machinery)의 구성요소 중에서 유연 커플링(flexible coupling)은 동력전달의 중요한 요소로서 구동부(driving part)와 피동부(driven part) 사이의 정렬불량(misalignment)을 어느 정도 수용할 수 있는 부품이다. 일반적인 구동설비의 동력전달은 커플링으로 전달하기 때문에 커플링의 이상유무가 설비효율에 미치는 영향은 매우 크다. 그러므로 설계단계에 있어서 커플링의 선

택에 세심한 주의를 기울여야 한다.

회전기계에서 가장 흔히 나타나는 불평형(unbalance)은 밸런싱(balancing) 과정을 거치면 어느 정도 문제를 해결할 수 있으나, 정렬불량은 작동 전에 적절한 정렬을 하였다 하더라도 운전 중의 여러 가지 조건에 의하여 발생할 수 있다. 이러한 정렬불량은 유연 커플링을 사용하여 어느 정도 보정할 수 있으나 정렬문제를 완전히 해결하는 것은 불가능하다.

Piotrowski⁽¹⁾는 정렬에 대한 여러 가지 측정방법에 대해 기술하였으며, 특히 커플링의 종류에 따라 진동특성이 달라짐을 실험적으로 관찰하였다. Mancuso⁽²⁾는 여러 종류의 커플링에 대한 반력과 모멘트 관계를 언급하였고, 특히 현장에서 많이 사용되고 있는 기어 커플링(gear coupling)에 대해

[†] 책임저자, 회원, 한국기계연구원

E-mail : kbo2612@kimm.re.kr

TEL : (042)868-7491 FAX : (042)868-7440

^{*} 회원, 영남대학교 기계공학부

서 집중적으로 조사하였으나 커플링의 해석적 모델은 제시하지 못하였다. Renzo⁽³⁾와 Moked⁽⁴⁾는 기어커플링의 기하학적 관계에 대해 연구했으며, 특히 Neale⁽⁵⁾과 Dewell⁽⁶⁾은 기어커플링에서 생성되는 모멘트를 구했으나 실제 회전체 시스템(rotor system)에는 적용시키지 못했다.

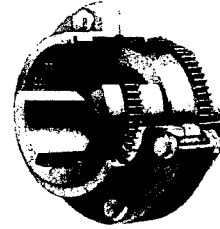
지금까지의 선행연구는 커플링에 정렬불량이 존재할 경우 발생하는 반력과 모멘트를 파악하는데 국한시켜 연구를 수행하였다. 그러나 커플링을 통해 구동되는 회전체 시스템의 보다 더 정확한 동특성 예측을 위해서는 커플링의 동역학적인 모델이 필수적이며, 특히 정렬불량이 존재할 경우에 대한 해석적인 모델을 수립하여 커플링이 전체 시스템에 미치는 영향을 파악하여야 한다.

따라서, 본 연구에서는 커플링의 동역학적 모델 수립의 일환으로 기어 커플링에 대한 해석적 모델을 제시함으로써 다른 커플링에의 적용방안에 대하여 검토하고자 한다.

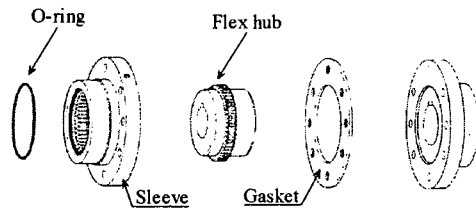
2. 이론해석

2.1 기어 커플링의 기하학적 형상

기어 커플링의 구조는 Fig. 1에서와 같이 구동부와 피동부에 각각 장착되어 있는 허브(hub)와 허브와 결합되는 슬리브(sleeve)로 구성되어 있다. 허브에는 외치(outer tooth)형, 슬리브(sleeve)에는 내치(inner tooth)형의 기어를 가지고 있고, 또한 허브와 슬리브는 O-링으로 지지되어 있으며 이것은 실링(sealing)의 역할을 하고 있다. 기어 커플링에서의 정렬불량의 형태는 Fig. 2에서와 같이 정렬불량 각 α (원점 O에 관한 임의의 미소회전)와 YZ평면에 투영된 α 의 공간각을 정의하는 β 로 정의될 수 있다. 정렬불량 각 α 가 존재할 경우 내치와 외치의 상대운동 양상을 Fig. 3에 나타내었다. 여기서, 좌표계 X_s, Y_s, Z_s 는 슬리브의 관성기준계를 나타낸다. 만약 α 만 고려한다면 Fig. 3에서처럼 치가 기울림 상태(tilting condition ①)에 있는 근방에서만 치면 간극(tooth face clearance)이 줄어들고, 선회상태(pivot condition ②) 근방에서는 치면 간극의 감소가 거의 없다. β 와 함께 고려하면 단지 상태 ①, ②의 위치만 변동될 뿐이다.



(a) A gear coupling



(b) Components of a gear coupling

Fig. 1 Structure of a gear coupling

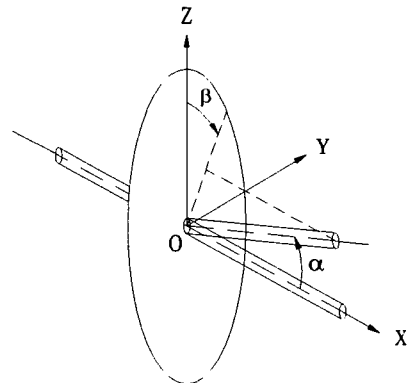


Fig. 2 Misalignment angles at gear coupling

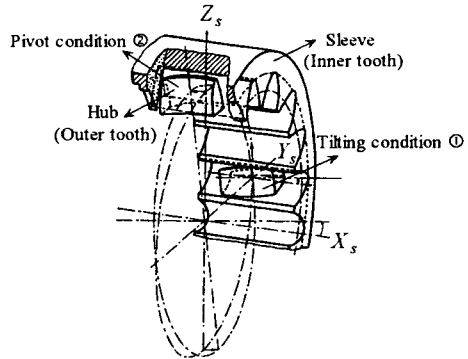


Fig. 3 Relative movement of teeth

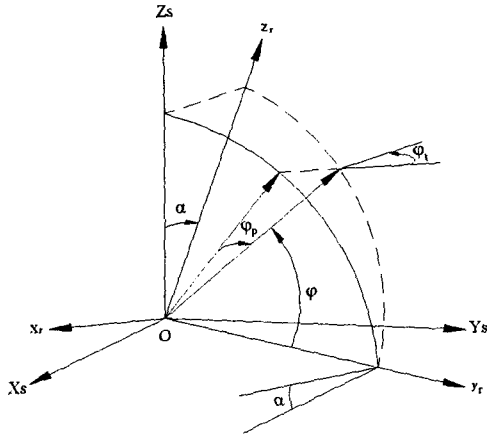


Fig. 4 Rotation of gear line of external gear

2.2 기어 커플링의 치면간극

앞에서 언급한 α 와 β 를 고려한 치면간극의 변화 양상을 알아보자. 정렬불량 각 α 와 β 를 동시에 고려한다면 치의 기울림각(tilting angle) φ_i 와 선회각(pivot angle) φ_p 는 Fig. 4와 같이 나타낼 수 있다. 그림에서 좌표계 x_r, y_r, z_r 은 허브에 대한 관성기준계이고, α 와 β 에 대한 기울림각과 선회각은 식 (1)과 같다. 이 각들은 슬리브에 대한 원주방향으로의 치 안착형태를 표현한 각이다.

$$\varphi_i = \alpha \cos \varphi, \quad \varphi_p = \alpha \sin \varphi \quad (1)$$

여기서, $\varphi = \theta - \beta$ 이고 θ 는 특정위치에 있는 치의 각위치(angular position)이다. 이러한 기울림각과 선회각에 의한 치면 간극의 감소량을 각각 Δ_t, Δ_p 라고 한다면 다음과 같다.

$$\Delta_t = (R_c - t/2)(1 - \cos \varphi_i) \quad (2)$$

$$\Delta_p = R_c \cdot \varphi_i \cdot \varphi_p \cdot \tan(\phi - \pi/2n) \quad (3)$$

여기서, t, ϕ, n, R_c 는 각각 치폭(face width), 압력각, 치의 개수, 크라운(crown)반경을 나타낸다.

각위치에 따른 치면의 간격 감소는 식 (2)와 식 (3)을 더한 것이고 이것을 $\Delta(\varphi)$ 라고 한다면 Fig. 5에 $\Delta(\varphi)$ 를 나타내었다. 계산에 사용된 기

Table 1 Specification of gear

Item	Symbol(unit)	Dimension
Module	$m(\text{mm})$	1.5
Number of tooth	n	44
Radius of pitch circle	$r(\text{mm})$	33
Pressure angle	$\phi(\text{deg})$	20°
Radius of crown	$R_c(\text{mm})$	800
Face width	$t(\text{mm})$	11
Elastic coefficient of tooth	$K(\text{N/mm})$	143000

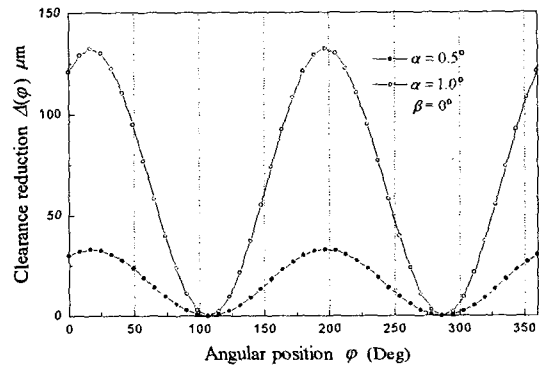


Fig. 5 Aspect of clearance reduction

어의 사양은 Table 1과 같다. Fig. 5에서 보는 바와 같이 100° 와 280° 부근에서는 치면간극의 감소가 거의 없음을 알 수 있다.

2.3 치면의 하중분포

정렬불량 상태에서 상대적으로 작은 토크(torque)가 피동부에 전달되면 간극 감소가 최대가 되는 근방에서만 비교적 작은 하중이 치면에 가해지고, 다른 부분은 하중이 전달되지 않는다. 만약 토크가 증가되면 하중이 전달된 치면에 탄성변형이 발생하고, 하중을 공유하는 치면의 간극형태는 식 (4)와 같이 정의된다. Fig. 6에 $\bar{\Delta}(\varphi)$ 의 변화양상을 나타내었다.

$$\bar{\Delta}(\varphi) = \Delta(\varphi) - \Delta_{\max} + \Delta_e \quad \text{if } \bar{\Delta}(\varphi) \geq 0$$

$$= 0 \quad \text{if } \bar{\Delta}(\varphi) < 0 \quad (4)$$

여기서, Δ_e 는 최대하중을 받는 치의 원주방향 변위를 나타낸다. 원주상에 작용하는 치면력(접선력, tangential force)은 다음과 같다.

$$F(\varphi) = K \bar{\Delta}(\varphi) \quad (5)$$

또한, 치면에 작용하는 법선력(normal force)는 다음과 같다

$$F_N(\varphi) = \frac{F(\varphi)}{\cos \phi} \quad (6)$$

식 (4)와 (5)를 이용하면 전달된 토크를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T = r \cdot K \sum_{i=1}^n (\Delta(\varphi_i) - \Delta_{\max} + \Delta_e) \quad (7)$$

여기서, n 은 $\bar{\Delta}(\varphi) > 0$ 을 만족시키는 치의 개수이다. 주어진 데이터 즉, 토크와 정렬불량 각, 기어에 대한 사양에 대해서 Δ_e 를 가정하고 식 (7)이 만족할 때까지 반복적으로 계산하면 Fig. 6와 같이 치면력 $F(\varphi)$ 의 변화를 알 수 있다. 치면력 $F(\varphi)$ 를 이용하면 Fig. 7과 같이 치에 작용하는 수직력 $F_N(\varphi)$ 의 분포를 알 수 있다. 정렬불량 각이 커짐에 따라 하중을 공유하는 치의 개수가 감소함을 알 수 있다.

2.4 치면의 모멘트 분포

기어 커플링에 정렬불량이 발생하면 두 가지 메카니즘에 의해서 모멘트가 발생된다. 첫째, 치면사이의 마찰력에 의해 모멘트가 발생되고 둘째, 치면 접촉의 오프셋(offset)에 의해 모멘트가 발생된다.^(2,7) 좌표계 x_r, y_r, z_r 에 대해서 $\bar{\Delta}(\varphi) > 0$ 을 만족시키는 i 번째 치에 발생하는 힘 성분은 식 (8)과 같고, 위치벡터는 식 (9)와 같다.

$$\begin{pmatrix} F_{x_r}^i \\ F_{y_r}^i \\ F_{z_r}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu F_N \cos \alpha - F_N \cos \varphi_i \sin \alpha \\ F_N \sin \varphi_i \\ \mu F_N \sin \alpha - F_N \cos \varphi_i \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} x_r^i \\ y_r^i \\ z_r^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_c \varphi_i \\ r \cos \varphi_i \\ r \sin \varphi_i \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} M_{x_r}^i \\ M_{y_r}^i \\ M_{z_r}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r F_N \sin^2 \varphi_i - r F_N \cos \alpha \cos^2 \varphi_i + \mu r F_N \sin \alpha \cos \varphi_i \\ -r F_N \sin \alpha \cos \varphi_i \sin \varphi_i - F_N R_c \varphi_i \cos \alpha \cos \varphi_i - \mu r F_N \cos \alpha \sin \varphi_i + \mu F_N R_c \varphi_i \sin \alpha \\ r F_N \sin \alpha \cos^2 \varphi_i - F_N R_c \varphi_i + \mu r F_N \cos \alpha \cos \varphi_i \end{pmatrix} \quad (10)$$

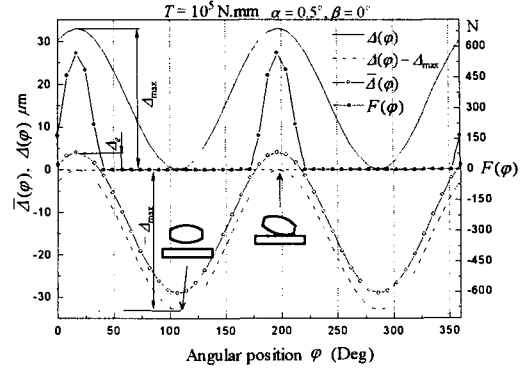


Fig. 6 Variation of clearance and tangential force with misalignment

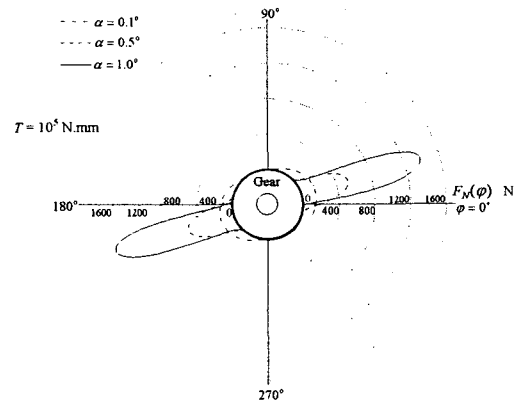


Fig. 7 Distribution of the normal force

여기서, μ 는 마찰계수를 나타낸다. 식 (8)과 (9)를 이용하면 커플링에 작용하는 모멘트 성분을 식 (10)과 같이 구할 수 있다. 식 (10)을 사용하여 기어에 가해지는 모멘트 성분분포를 Fig. 8과 Fig. 9에 나타내었다. 정렬불량 각이 증가함에 따라 기어에 발생하는 모멘트가 상승됨과 동시에 모멘트 하중을 받는 치의 개수가 감소함을 알 수 있다.

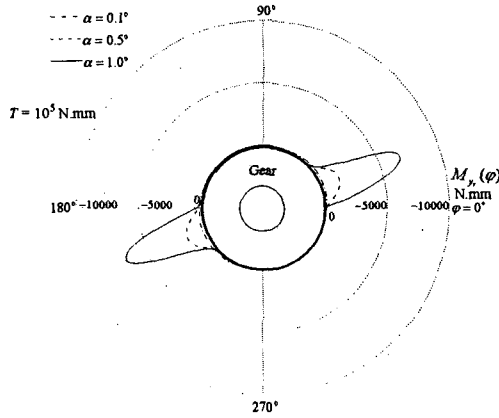


Fig. 8 Moment distribution of M_y ,

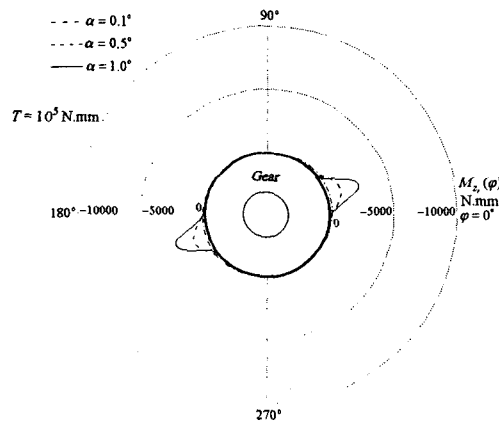


Fig. 9 Moment distribution of M_z ,

2.5 기어 커플링 모델링

앞에서 구한 하중분포와 모멘트분포를 이용하여 기어 커플링의 동적모델을 개발하였고 기본적인 내용은 다음과 같다. 기어 커플링에 정렬불량이 발생되면 모멘트가 발생되고 이 모멘트는 복원모멘트로 작용하게 된다. 이를 이용하면 커플링의 굽힘강성(bending stiffness)을 구할 수 있다. 또한, 감쇠는 허브와 슬리브 사이의 마찰에 의한 쿨롱감쇠를 고려함으로써 얻을 수 있다.

복원모멘트에 의한 y_r 과 z_r 축에 관한 굽힘강성 K_λ 와 K_γ 는 각각 다음과 같다.

$$K_\lambda = -\frac{\sum_{i=1}^n M_{y_r}^i}{a}, \quad K_\gamma = -\frac{\sum_{i=1}^n M_{z_r}^i}{a} \quad (11)$$

만약 a 가 작다고 가정한다면, 모멘트 성분은 다음과 같이 단순화시킬 수 있다.

$$M_{y_r}^i = -2F_N^i R_c \alpha, \quad M_{z_r}^i = -2\mu F_N^i r \quad (12)$$

식 (12)를 사용하면 굽힘강성을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K_\lambda = 2R_c \sum_{i=1}^n F_N^i, \quad K_\gamma = 2\mu r \sum_{i=1}^n F_N^i \quad (13)$$

또한, 병진강성(translational stiffness)은 허브와 슬리브 사이에 들어가는 O-ring에 의한 강성으로서 각 방향의 병진강성은 다음과 같다.⁽⁸⁾

$$K_{y_r} = 3.95ED(\delta_{y_r}/d)^{1/2} \quad (14)$$

$$K_{z_r} = 3.95ED(\delta_{z_r}/d)^{1/2} \quad (15)$$

여기서, E, D, d 는 O-링의 탄성계수, 링의 평균직경, 단면직경을 각각 나타내고, δ_{y_r} 와 δ_{z_r} 은 각 방향으로서의 변형을 나타낸다.

감쇠계수는 한 사이클 당 소산에너지를 이용한 등가감쇠계수를 이용하여 산출하였다. Marmol⁽⁹⁾은 쿨롱감쇠(Coulomb damping)를 가정하여 스플라인(spline) 기어에 대한 등가감쇠계수를 다음과 같이 산출하였다.

$$C_{eq}^s = \frac{\mu b T}{r \pi \omega \cos^2 \phi} \quad (16)$$

여기서, b 는 스플라인의 길이, ω 는 각진동수(angular frequency)를 나타낸다. 그러나 식 (16)은 치면이 모두 접촉한다는 가정 하에서 유도된 계수이기 때문에 치에 크라운(crowning)이 있는 기어 커플링에서는 적용할 수 없다. 기어 커플링에 대한 감쇠계수도 쿨롱감쇠를 기본으로 하여, 등가점성감쇠 형태로 크라운이 있는 감쇠계수를 쓰면 다음과 같다.

$$C_{eq}^g = \frac{W_d}{\pi\omega\alpha^2} \quad (17)$$

여기서, W_d 는 마찰토크와 α 의 곱으로 정의되는 일(work)이며 다음과 같다.

$$W_d^{y_r} = \mu\alpha \sum_{i=1}^n F_N^i \sin \phi_i \quad (18)$$

$$W_d^{z_r} = \mu\alpha \sum_{i=1}^n F_N^i \cos \phi_i \quad (19)$$

식 (18)과 (19)를 식 (17)에 대입하면 y_r 과 z_r 축에 관한 감쇠계수 C_λ 와 C_γ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C_\lambda = \frac{W_d^{y_r}}{\pi\omega\alpha^2} \quad (20)$$

$$C_\gamma = \frac{W_d^{z_r}}{\pi\omega\alpha^2} \quad (21)$$

허브와 슬리브의 관성영향은 집중질량(lumped mass)으로 대체하였으며 Fig. 10은 허브와 슬리브와의 결합을 나타내는 가상적인 조인트 구조를 나타내며, 이를 바탕으로 앞에서 구한 강성계수와 감쇠계수를 고려하여 Fig. 11과 같은 동적모델을 제시하였다.

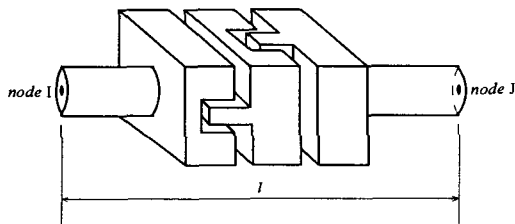


Fig. 10 Virtual joint structure of gear coupling

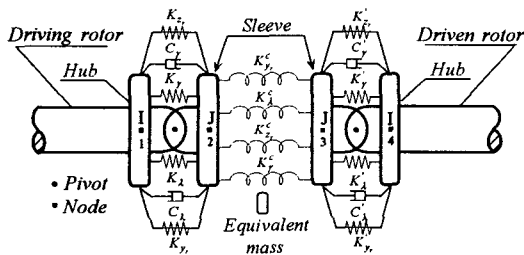


Fig. 11 Dynamic model of gear coupling

이 모델은 절점당 4자유도(degree of freedom) 즉, 두 개의 병진변위(v, w)와 두 개의 회전변위(λ, γ)를 가진 것으로 가정하였으며, 또한 조인트간 연결은 슬리브에 체결되는 볼트의 결합강성으로 대체하였다.⁽¹⁰⁾

이러한 가정 하에서 질량행렬 $[M]$, 감쇠행렬 $[C]$, 강성행렬 $[K]$, 변위벡터 $\{q\}$, 가진력 벡터 $\{Q\}$ 를 이용한 기어커플링의 운동방정식은 식 (22)와 같이 쓸 수 있다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (22)$$

$$\text{여기서, } [M] = \begin{bmatrix} [m]_1 & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [m]_2 & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [m]_3 & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [m]_4 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [c]_{11} & [c]_{12} & [0] & [0] \\ [c]_{21} & [c]_{22} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [c]_{33} & [c]_{34} \\ [0] & [0] & [c]_{43} & [c]_{44} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [k]_{11} & [k]_{12} & [0] & [0] \\ [k]_{21} & [k]_{22} & [k]_{23} & [0] \\ [0] & [k]_{32} & [k]_{33} & [k]_{34} \\ [0] & [0] & [k]_{43} & [k]_{44} \end{bmatrix}$$

$$[m]_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{d_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{d_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

m_i : Mass

I_{d_i} : Diametral mass moment inertia

$$[c]_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_\lambda & -\Omega I_p \\ 0 & 0 & \Omega I_p & C_\gamma \end{bmatrix}$$

$$[c]_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_\lambda & -\Omega I_p \\ 0 & 0 & \Omega I_p & C_\gamma \end{bmatrix}$$

$$[c]_{22} = [c]_{11}, \quad [c]_{12} = [c]_{21} = -[c]_{11}$$

$$[c]_{44} = [c]_{33}, \quad [c]_{34} = [c]_{43} = -[c]_{33}$$

Ω : Rotational speed

I_p : Polar mass moment inertia

$$[k]_{11} = \begin{bmatrix} k_{yr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{zr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$[k]_{22} = \begin{bmatrix} k_{yr} + k_{yr}^c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{zr} + k_{zr}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\lambda} + k_{\lambda}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\gamma} + k_{\gamma}^c \end{bmatrix}$$

$$[k]_{23} = \begin{bmatrix} -k_{yr}^c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{zr}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{\lambda}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{\gamma}^c \end{bmatrix}$$

$$[k]_{33} = \begin{bmatrix} k_{yr} + k_{yr}^c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{zr} + k_{zr}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\lambda} + k_{\lambda}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\gamma} + k_{\gamma}^c \end{bmatrix}$$

$$[k]_{44} = \begin{bmatrix} k_{yr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{zr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$[k]_{12} = [k]_{21} = -[k]_{11}, \quad [k]_{23} = [k]_{32}$$

$$[k]_{43} = [k]_{34} = [k]_{44}$$

$$\{q\} = [\{q\}_1 \{q\}_2 \{q\}_3 \{q\}_4]^T$$

$$\{q\}_i = \{v_i \ w_i \ \lambda_i \ \gamma_i\}^T, \quad i=1,2,3,4$$

$$\{Q\} = [\{Q\}_1 \{Q\}_2 \{Q\}_3 \{Q\}_4]^T$$

3. 결론

본 연구에서는 정렬불량에 대한 체계적인 연구의 일환으로 회전체 시스템의 구동부와 피동부를 연결시키는 커플링에 정렬불량이 존재할 경우 커플링에 발생하는 기하학적인 관계와 반력 등을 이용하여 커플링의 동적 모델을 제시하였다. 이러한 동적 모델은 커플링에서 발생될 수 있는 기하학적 변형, 이로 인해 발생하는 반력 등을 면밀히 조사하여야 한다. 본 연구에서는 그 예로 기어 커플링에 정렬불량이 존재할 경우 발생하는 기하학적 관계와 반력 등을 조사함으로써 동적 모델을 수립하였고, 모델에 대한 운동방정식을 제시하였다. 뿐만 아니라 본 연구에서 제시한 절차는 다른 커플링의 동적 모델 수립에도 적용할 수 있으리라 판단된다. 그 이유는 커플링에

정렬불량이 발생되면, 커플링의 종류에 따라 기본적인 기하학적 형상이나 반력 등은 조사할 수 있고, 이러한 데이터를 앞서 제시한 절차에 적용시킬 수 있기 때문이다.

향후 기어 커플링의 동적 모델을 회전체 시스템에 적용시켜 전체 시스템에 미치는 영향을 조사할 예정이며, 또한 실험적인 관찰로 이루어질 계획이다.

참고문헌

- (1) Piotrowski, J., 1986, Shaft Alignment Handbook, Marcel Dekker, New York.
- (2) Mancuso, R. T., 1986, Couplings and Joint, Marcel Dekker, New York.
- (3) Renzo, P. C., Kaufman, S. and Rocker, D. E. de, 1968, "Gear Couplings," *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 90, No. 3, pp. 467-474.
- (4) Moked, I., 1968, "Toothed couplings-Analysis and optimizations," *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 90, No. 3, pp. 425-434.
- (5) Wang, X. and Kirkhope, J., 1994, "Component Mode Synthesis for Multi-Shaft Rotors with Flexible Inter-Shaft Bearings," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 173, No. 4, pp. 537-555.
- (6) Dewell, D. L. and Mitchell, L. D., 1984, "Detection of a misaligned disk coupling using spectrum analysis," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. 106, No. 1, pp. 9-16.
- (7) B. O. Kim, C. G. Park and Y. C. Kim, 1999, "A Study on the Dynamic Characteristics of a Rotor System with a Misaligned Gear Coupling," *Journal of Korean Society of Mechanical Engineers*, Vol. A 23, No. 8, pp. 1399-1406.
- (8) Walter, D. P., 1994, Stress, Strain and Structural Matrices, John Wiley & Sons.
- (9) Marmol, R. A., Smalley, A. J. and Tecza, J. A., 1980, "Spline Coupling Induced Non synchronous Rotor Vibrations," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 102, No. 1, pp. 168-176.
- (10) J. H. Ko and J. M. Lee, 2001, "Dynamic Modeling of Bolt Joints Using Lumped Mass-Spring Model," *Journal of Korean Society of Mechanical Engineers*, Vol. A 25, No. 3, pp. 495-501.