

## 스퍼 기어 치면 사이의 탄성유체 윤활해석

구영필\* · 김형자 · 김영대

부경대학교 기계공학부

### Elastohydrodynamic Lubrication Analysis on the Contacting Surfaces between Spur Gear Teeth

Young-Pil Koo<sup>†</sup>, Hyung-Ja Kim and Young-Dae Kim

School of Mechanical Engineering, Pukyong National University

**Abstract** – An elastohydrodynamic lubrication analysis was performed on the contacting teeth surfaces of involute spur gears. Kinematics of the gear and the pinion were taken into account to get accurate geometric clearances around the elastohydrodynamic lubrication region of the contacting teeth. Pressure and film thickness distribution for the whole contacting faces in lubricated condition at several time steps were obtained through the analysis. Besides the pressure spike at the outlet region, a representative phenomenon in elastohydrodynamic lubrication regime, the pressure at the inlet region was slightly higher than that of the center region. The film thickness of transient condition was thicker than that of steady condition.

**Key words** – elastohydrodynamic lubrication, transient, spur gear, kinematics.

#### 1. 서 론

기어는 동력전달 핵심부품으로서 그 응용범위가 매우 넓기 때문에 대부분의 기계 장치에 기어가 사용되고 있다. 기어의 설계, 제작 및 검사 등에 대하여 오래 전부터 많은 연구가 이루어져 왔으며 이들에 대한 규격들이 현재는 다양하게 이용 가능하다[1,2]. 기어 치면에 관한 연구로서 Jiang은 반 스키핑 첨가제와 금속의 화학작용에 의하여 기어 치면에 생성된 반응막의 파괴 모델과 파괴 과정을 연구하였다[3]. Murakawa등은 무정질 탄소막을 PVD공정에 의하여 기어 치면에 코팅하고 윤활유 공급 실패 조건에서 치면의 성능을 기어시험장치를 이용하여 실험하였다[4]. Cheng과 Wu는 스퍼 기어에서의 동적 상태와 부분 탄성유체 윤활을 고려한 슬라이딩 마멸에 관하여 연구하였다[5].

기어는 탄성유체 윤활영역에서 운전되는 대표적인 기계요소이므로 기어 치면 사이의 윤활 현상에 관한 연구는 기어의 설계 개선에 크게 도움이 될 것으로 여겨

진다[6]. R. Larsson은 과도효과를 고려하여 작용선을 따라서 압력과 유막 두께를 계산하였다[7]. 유체 모델은 비뉴턴 모델을 적용하였으며 등은 완전 유막 윤활을 가정하여 2차원 탄성유체 윤활해석을 수행하였다. 탄성유체 윤활영역의 최소 유막 두께를 연구한 Dowson과 Higginson은 그들의 유막 두께식을 기어 조건에 적용하여 기어 치면 사이의 최소유막 두께식을 제시하였다[8].

기존의 기어 치면 윤활해석에 주로 적용되는 치면의 틈새 형상 모델은 접촉점에서 곡률 반경을 그 반지름으로 하는 두 개의 실린더 접촉으로 근사한 것이다. 그러나 실제 치형의 곡률 반경은 접촉점 주위에서도 연속적으로 변화하는 값을 가지므로 실린더 접촉 모델로서는 정밀한 기어 이 사이의 틈새를 얻을 수 없다.

따라서 본 연구에서는 기어의 회전 운동에 의한 치면 사이의 틈새 변화를 수치적으로 계산하고, 과도효과를 고려한 기어 치폭 전체에 대한 탄성유체 윤활해석을 수행하여 기어 치면의 윤활 현상을 면밀하게 분석하고자 한다.

<sup>†</sup>주저자 · 책임저자 : ypkoo@naver.com

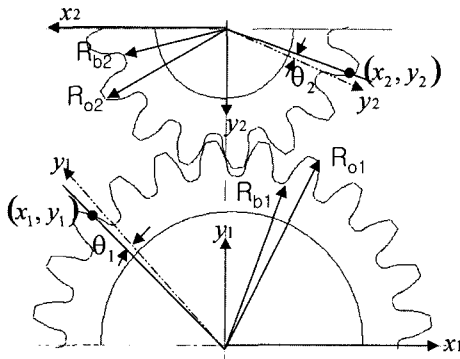


Fig. 1. Schematics of gears and coordinates systems.

## 2. 기어 치면의 틈새 형상

기어 치면에 대하여 탄성유체 윤활해석을 수행하기 위해서는 기어 이와 피니언 이가 접하고 있을 때 그들 사이의 틈새 형상을 먼저 알아야 한다. 회전에 의하여 두 이가 접하는 부분이 시시각각 변화하므로 회전을 고려한 틈새의 형상을 정밀하게 계산해야 한다. 다음은 기어 이 사이의 틈새를 계산하는 절차이다.

1. 먼저 기어와 피니언 이에 대한 프로파일을 생성시킨다. 스퍼 기어 인벌류터 치형의 프로파일은 Fig. 1에 나타낸 각각의 회전 중심을 원점으로 하는 직교좌표계에 대하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} x_i &= R_{bi}(\theta_i \cos \theta_i - \sin \theta_i) \\ y_i &= R_{bi}(\cos \theta_i + \theta_i \sin \theta_i) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $i$ 는 기어 또는 피니언을 나타내는 하첨자이다. 즉  $i=1$ 이면 기어,  $i=2$ 이면 피니언이다.

치형의 한 쪽 프로파일에 대한 각도 범위는;

$$0 \leq \theta_i \leq \frac{\sqrt{R_{oi}^2 - R_{bi}^2}}{R_{bi}} \quad (2)$$

2. 기어 이와 피니언 이의 최초 접촉 위치를 구하기 위하여 생성된 치형 프로파일의 최외곽점을 Fig. 2와 같이 이끝원과 작용선의 교점에 일치하도록 치형 프로파일을 회전 이동시킨다.

여기서 교점  $P$ 의 좌표  $(x_{o1}, y_{o1})$ 는;

$$\begin{aligned} x_{o1} &= \frac{-2R_{p1} \tan \alpha + \sqrt{4R_{p1}^2 \tan^2 \alpha - 4(1 + \tan^2 \alpha)(R_{p1}^2 - R_{o1}^2)}}{2(1 + \tan^2 \alpha)} \\ y_{o1} &= (\tan \alpha)x_{o1} + R_{p1} \end{aligned} \quad (3)$$

3. 피니언 이의 프로파일 상의 한 점이 교점  $P$ 와

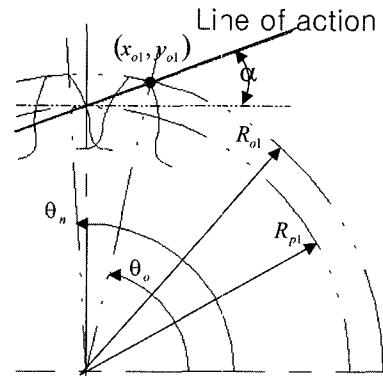


Fig. 2. Decision of the initial reference point.

일치하도록 피니언을 회전시킨다. 즉, 식(4)와 같이 피니언의 원점에서  $P$ 점까지의 거리와 피니언의 원점에서 피니언 이의 프로파일 상의 한 점까지의 거리가 같은 지점이 피니언 이 프로파일에서의 최초 접촉점이 된다.

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(-x_{o1}^2)^2 + (R_{p1} + R_{p2} - y_{o1})^2} \quad (4)$$

4. 회전에 의한 두 프로파일의 접촉위치의 변화를 구하기 위하여 식(5)에 의하여 기어와 피니언의 직교좌표계를 각각의 회전 중심을 원점으로 하는 극좌표계로 변환시킨다.

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \\ \theta_i &= \pi/2 + \tan^{-1}(-x_i/y_i) \quad \forall x_i \leq 0, y_i > 0 \\ \theta_i &= \tan^{-1}(-y_i/x_i) \quad \forall x_i > 0, y_i > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

작용선을 따라 해석하고자 하는 위치에 해당되는 몇 단계의 각도를 선정한 다음, 피니언을 구동축으로 하여 기어와 피니언을 단계별로 서로 회전시킨다. 각 회전단계마다 기어 이와 피니언 이의 프로파일을 식(5)에 의하여 계산하고 극좌표계를 전역 직교좌표계로 변환시켜서 프로파일 데이터를 저장해둔다. Fig. 3은 피치점 부근의 회전 각도에서 기어 이와 피니언 이의 프로파일 모양이다.

5. 다음은 두 개의 이가 서로 회전한 상태에서 프로파일을 따라서 접촉점을 찾는다. 접촉점은 두 프로파일에서 상대방의 각 격자점까지의 거리를 구하여 가장 가까운 점을 접촉점으로 한다. 이론적으로 접촉점에서 거리는 0이지만 수치해석에서 각 격자점들의 위치는 이산적으로 표현되므로 접촉점의 거리는 0에 근접한 값이 된다.

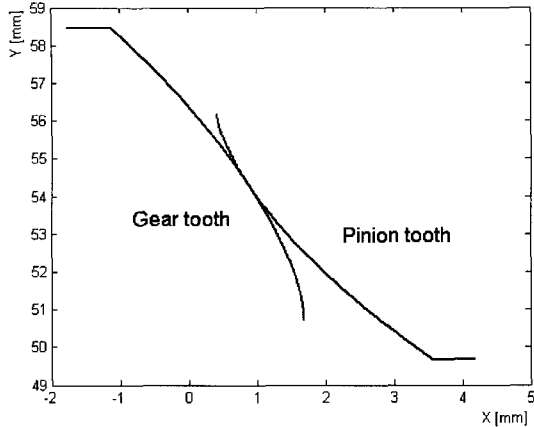


Fig. 3. Profile detail of contacting gear tooth and pinion tooth.

6. 접촉점이 구해지면 접촉점 전, 후로 두 프로파일에서 각각 동일한 거리를 탄성유체 윤활 계산영역으로 선정한다. 기어 이 프로파일의 좌표는 극좌표계를 직교좌표계로 변환한 것이므로 격자 간격이 균일하지 않고 두 이의 격자점들이 서로 짝을 이루지 못하므로 접촉점을 기준으로 하여 프로파일을 따라서 등간격으로 격자점들을 재배열한다.

7. 최종적으로 식(6)에 의하여 두 프로파일에서 짝을 이루는 격자점 사이의 거리를 계산하여 각 회전 각도 별 기하학적 틈새를 구한다.

$$h_g = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (6)$$

Fig. 4에 Fig. 3의 프로파일에 대한 치면 사이의 틈새를 나타내었다.

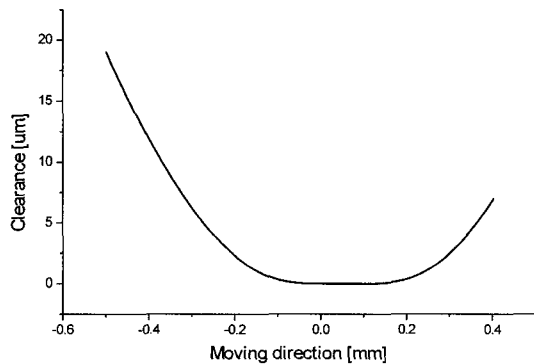


Fig. 4. Initial clearance between the contacting gear teeth.

### 3. 탄성유체 윤활해석

#### 3-1. 지배방정식

3차원 탄성유체윤활 해석에 이용되는 지배방정식은 Reynolds에 의하여 다음과 같이 주어진다[9].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12 \tilde{u} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (7)$$

식(7)의 우변에서 두 번째 항은 시간의 경과에 따른 유막 두께와 점도의 변화로서 인접 단계로의 접촉점 이동에 의한 효과로서 고려되어진다. 치면의 평균 속도는;

$$\tilde{u} = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

$$u_1 = \omega_1 (R_{p1} \sin \alpha + x)$$

$$u_2 = \omega_2 (R_{p2} \sin \alpha - x) \quad (8)$$

압력 분포에 의한 합력은 식(9)와 같이 외부하중과 평형을 이루어야한다.

$$w = \iint p \, dx dy \quad (9)$$

탄성유체 윤활영역에서 점도와 밀도는 다음과 같이 압력의 함수로 표현된다[8][10].

$$\eta = \eta_0 \left( \frac{6.31 \times 10^{-5}}{\eta_0} \right)^{1 - (1 + p/1.96 \times 10^5)^2} \quad (10)$$

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{0.6 \times 10^{-9} p}{1 + 1.7 \times 10^{-9} p} \right) \quad (11)$$

무차원화된 Reynolds 방정식은;

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 12 U \frac{\partial(\bar{\rho} H)}{\partial X} + 6 \frac{\omega_1 \eta_0}{\pi E} \frac{\partial(\bar{\rho} H)}{\partial T} \quad (12)$$

무차원 변수들은;

$$X = \frac{x}{R}, \quad Y = \frac{y}{R}, \quad H = \frac{h}{R}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad P = \frac{p}{E}$$

$$U = \frac{\eta_0 \tilde{u}}{ER}, \quad T = \frac{\omega_1 t}{2\pi}$$

비정상 상태에서 인접단계의 유막 두께들은 서로 영향을 받기 때문에 동일한 기준 길이를 적용해야 한다. 따라서 최초 회전 단계의 접촉점 평균 곡률 반경 R을 무차원화 기준 길이로 적용하였다.

$$R = (1/R_1 + 1/R_2)^{-1} \quad (13)$$

### 3-2. 해석 절차

식(7) - 식(11)은 비선형성이 매우 강하므로 비정상 상태의 탄성유체 윤활해석에서 수렴된 해를 얻기 위해서는 주의를 기울여야 한다. 본 연구에서는 이러한 경우에 비교적 수렴이 잘 된다고 알려진 Newton-Rapson 법을 사용하였다. 그러나 Newton-Rapson법은 초기치에 따라 그 안정성이 민감하게 변하므로 본 연구에서는 윤활해석 이전에 3차원 탄성접촉해석을 수행하여 하중조건을 만족하는 접촉압력분포를 윤활해석의 압력 초기치로 적용하였다[11]. 접촉압력으로서 정상상태를 가정하여 윤활해석을 수행하여 3차원 압력분포를 구한 다음, 다시 정상상태의 압력을 초기치로 적용하여 비정상 상태의 탄성유체 윤활해석을 수행함으로써 정밀하게 수렴된 해를 구하고자 하였다. Fig. 5에 전체 해석 절차를 나타내었다.

### 3-3. 해석 조건

Table 1에 탄성유체 윤활해석에 선정된 스퍼 기어의 데이터를, Table 2에 윤활유의 물성치를 각각 나타내

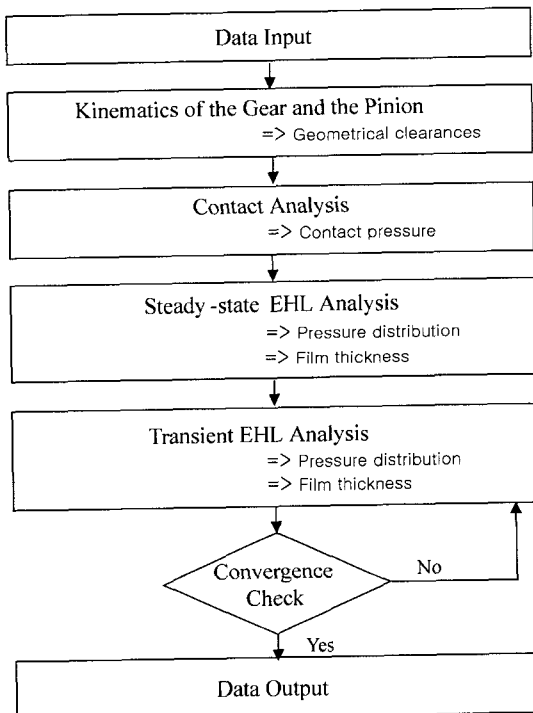


Fig. 5. Overall analysis procedure.

Table 1. Specification of the gear and pinion

	Gear	Pinion
Number of teeth	24	16
Pressure angle, $\alpha$	20°	
Module	4.5 mm	
Face width	20.0 mm	
Angular speed	1460 rpm	2190 rpm
Power transmitted	12 kW	
Effective Young's modulus, $E$	220 GPa	

Table 2. Property of the Lubricant

Grade	SAE30
Absolute viscosity, $\eta_0$	0.07 Ns/m <sup>2</sup> @80°C
Pressure-viscosity coefficient, $a$	1.51×10 <sup>-8</sup> m <sup>2</sup> /N
Dimensionless viscosity-pressure index, $Z$	0.4223

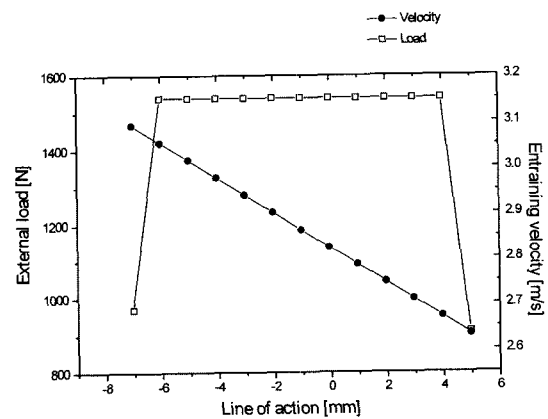


Fig. 6. External load and entraining velocity.

었다.

작용선을 따라 13개의 단계에서 윤활해석을 수행하였다. Fig. 6에 작용선을 따른 각 단계별 치면의 평균 속도와 작용하중을 나타내었다. 이것은 이 접촉이 두 쌍의 이 접촉에서 한 쌍의 접촉, 다시 두 쌍의 접촉으로 변화하는 피치점 부근의 회전각도 단계에 대한 것이다.

하중에 의한 기어 이의 거시적 변형은 두 이가 모두 같은 방향으로 변형될 것이므로 유막 두께에 영향을 미치지 않는다고 가정하였다. 기어의 무차원화 유막 두께는;

$$H = H_g + H_d + H_o \quad (14)$$

식(14)에서  $H_g$ 는 식(6)에서 구한 기하학적 형상,  $H_d$

는 탄성 변형량,  $H_s$ 는 유막 상수이다. 유막상수의 초기 치로서 Dowson과 Higginson이 제시한 최소 유막 두께식을 변형한 식(15)를 적용하였다.

$$H_s = 4H_m = 10.6U^{0.7}G^{0.54}W^{-0.13} \quad (15)$$

그리고 치꼭 가장자리의 피크 압력을 완화시키기 위하여 가장자리를 프로파일링한 치면 형상을 도입하였으며 문제의 단순화를 위하여 표면 거칠기의 영향은 고려하지 않았다.

#### 4. 해석 결과 및 검토

스피어 기어의 회전운동에 의하여 시시각각 변화하는 치면의 접촉영역에 대하여 탄성유체 윤활해석을 수행하였다.

Fig. 7은 하중은 크고 상대적으로 속도가 느린 단계인 작용선 3 mm에 대한 치면 접촉영역의 3차원 압력 분포이다. 치꼭 가장자리의 출구 영역에 뚜렷한 압력 스파이크가 나타나고 있으며 입구 영역에도 접촉압력의 영향으로 완만한 압력 봉우리가 나타나고 있다. 이

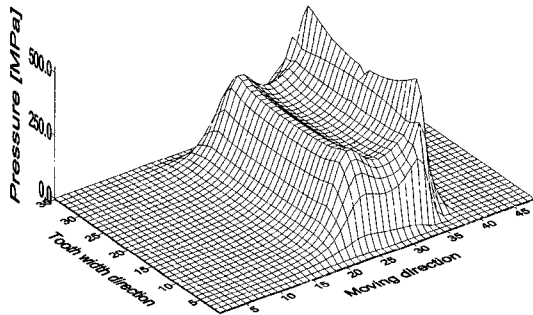


Fig. 7. Pressure distribution at line of action; 3 mm.

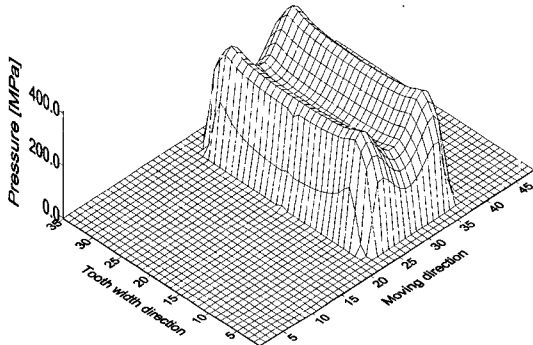


Fig. 8. Contact pressure distribution at line of action; 3 mm.

것은 접촉압력 패턴과 이 접촉 폭의 크기와 관련이 있다고 여겨진다. Fig. 8에 나타낸 접촉압력 분포에서 입구 영역 및 출구 영역에 높은 압력이 나타나고 있는데 이것은 평면과 편치의 접촉에서 나타나는 압력 분포 패턴과 유사하다. 즉 기어 치면의 접촉은 완전한 선 접촉이 아니라 면 접촉에 가깝다는 것을 의미한다. 기어 이 접촉을 두 개의 실린더 접촉으로 가정한 기존의 연구에서는 이러한 결과를 얻을 수 없었다[7]. Fig. 9는 상대적으로 하중은 작고 속도가 빠른 단계인 작용선 -7 mm에 대한 치면 접촉영역의 3차원 압력분포이다. Fig. 7과 유사한 경향이며 전체적으로 낮은 압력을 보이고 있다.

Fig. 10은 중앙에서 각 단계별 압력의 단면 형상을, Fig. 11은 유막 프로파일을 각각 비교하여 나타낸 것이다. 전반적으로 압력 프로파일은 서로 유사한 경향을 보이고 있으며 하중의 크기 1540 N으로 동일한 구간인, 작용선 -5~3 mm 구간에서 접촉 영역이 좁아지면 최고 압력의 크기가 증가함을 알 수 있다. Fig. 12는 작용선 1 mm 단계에서 치꼭 중앙에서의 유막 프로파일과 압력 프로파일을 나타낸 것이다. 출구 영역에

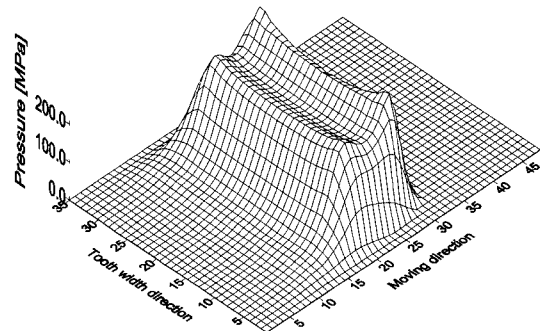


Fig. 9. Pressure distribution at line of action; -7 mm.

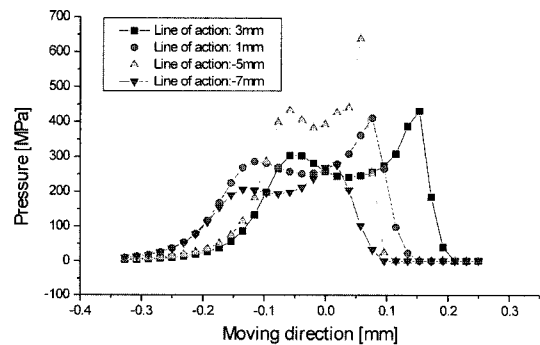


Fig. 10. Pressure profiles at center of tooth width.

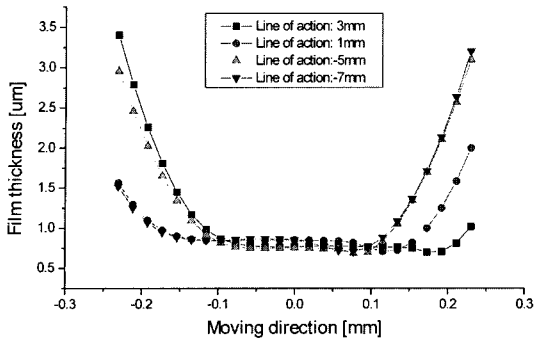


Fig. 11. Film profiles at center of tooth width.

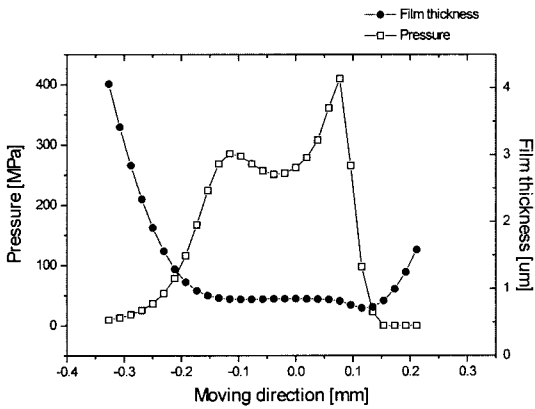


Fig. 12. Pressure and Film profiles at line of action; 1 mm.

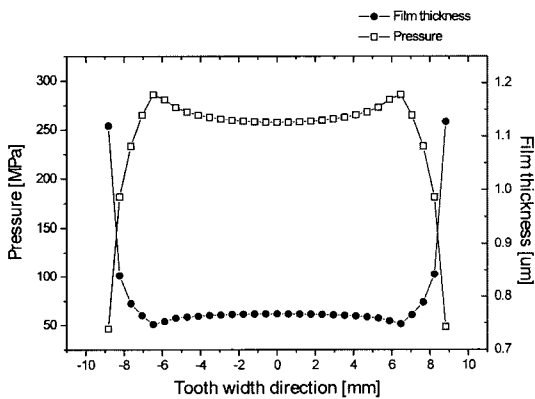


Fig. 13. Pressure and Film profiles in tooth width direction at line of action; 3 mm.

탄성 변형에 의한 유막 수축현상을 볼 수 있으며 최고 압력은 최소 유막 두께 직전에 나타나고 있다. 접촉 중심선 부근의 압력은 입구영역의 압력보다 낮다는 것을 알 수 있다. Fig. 13은 접촉선을 따라 치폭 방향으

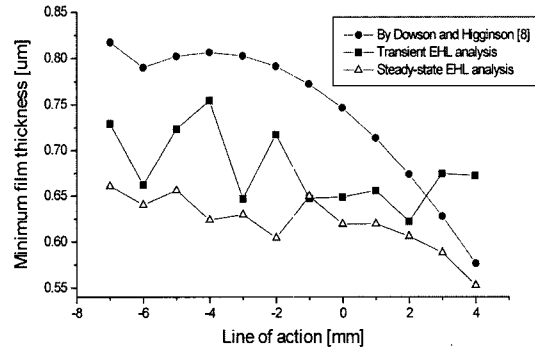


Fig. 14. Comparison of minimum film thickness.

로의 유막 프로파일과 압력 프로파일을 도시한 것이다. 가장자리에 미미하지만 표면의 탄성변형에 의하여 돌출부가 형성되어 있는 것을 볼 수 있는데 이는 윤활제의 측면유출 방지에 도움이 될 것으로 예상된다.

정상상태로 가정한 해석결과와 유막두께와 비정상상태의 유막두께를 비교하였다. 정상상태의 해석은 식 (7)에서 시간에 대한 밀도와 유막두께의 변화율을 무시하고 계산한 것이다. Fig. 14에 나타난 바와 같이 비정상 상태의 항의 존재는 두꺼운 유막 두께를 얻는데 도움이 된다는 것을 알 수 있다. 전반적으로 동일한 하중에서 표면의 속도가 빨라지면 유막 두께도 두꺼워지고 있다. 정상상태에서 유막두께의 변동은 접촉 반경의 변화에 의한 것으로 여겨지며 비정상 상태 해석에서 유막 두께는 시간에 대한 점도와 유막 두께의 변화율에 의하여 더 많이 영향을 받는 것을 알 수 있다.

### 5. 결 론

인벌류터 스퍼 기어에 대하여 운전 중 치면의 접촉 영역에서 탄성유체 윤활상태의 윤활 압력과 유막 두께의 분포에 관하여 해석적으로 연구하였다. 기어의 회전 운동에 의하여 변화하는 회전 단계별 치면의 틈새를 정밀하게 계산하였으며 치폭 전체에 대한 윤활 현상을 분석하기 위하여 3차원 탄성유체 윤활해석을 수행하였다.

본 연구의 결과, 기어 치면의 접촉은 면 접촉 형태로서 입구 영역에도 낮은 압력 봉우리가 나타났으며 기어의 회전에 의한 접촉 폭의 변화에 따라 동일하중에서도 압력분포는 다른 양상을 보였다. 또한 운전 중 기어 치면의 유막 두께는 동적 효과에 의하여 정상상태보다 두꺼워진다는 것을 알 수 있었다. 기어 치면

사이의 윤활 현상에 관한 본 연구는 치형 수정, 치폭 방향 프로파일링 등 기어의 설계 개선에 활용될 수 있다고 기대된다.

### 기호 설명

$a$	: pressure-viscosity coefficient [ $\text{m}^2/\text{N}$ ]
$E$	: the equivalent Young's modulus [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]
$G$	: dimensionless material parameter, $G=\alpha E$
$H$	: dimensionless film thickness
$H_d$	: dimensionless elastic deformation
$H_g$	: dimensionless geometric film thickness
$H_m$	: dimensionless minimum film thickness by Dowson and Higginson
$H_o$	: dimensionless film constant
$h$	: film thickness [m]
$P$	: dimensionless pressure
$p$	: pressure [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]
$R$	: equivalent radius [m]
$R_i$	: radius of curvature of gear/pinion tooth [m] ( $i=1$ for gear, $i=2$ for pinion)
$R_{bi}$	: base circle radius of gear/pinion [m]
$R_{ai}$	: addendum circle radius of the gear/pinion [m]
$R_{pi}$	: pitch circle radius of the gear/pinion [m]
$r_i$	: radius in polar coordinates [m]
$T$	: dimensionless time
$t$	: time [s]
$U$	: dimensionless velocity parameter
$\tilde{u}$	: mean surface velocity [m/s]
$u_i$	: surface velocity of the gear/ pinion tooth [m/s]
$w$	: external load [N]
$X, Y$	: dimensionless Cartesian coordinates
$x, y$	: global Cartesian coordinates
$x_i, y_i$	: local Cartesian coordinates
$Z$	: dimensionless viscosity-pressure index
$\alpha$	: pressure angle [rad]

$\eta$	: viscosity [ $\text{Ns}/\text{m}^2$ ]
$\eta_0$	: viscosity at $p=0$ [ $\text{Ns}/\text{m}^2$ ]
$\bar{\eta}$	: dimensionless absolute viscosity
$\theta_i$	: rotation angle of the gear/ pinion [rad]
$\rho$	: density [ $\text{Ns}^2/\text{m}^4$ ]
$\rho_0$	: density at $p=0$ [ $\text{Ns}^2/\text{m}^4$ ]
$\bar{\rho}$	: dimensionless density
$\omega_i$	: angular velocity of the gear [rad/s]

### 참고문헌

1. AGMA Standard, American Gear Manufacturers Association, Alexandria, Virginia, 1977.
2. Dudley, D. W., Gear Handbook, McGRAW-HILL, 1967.
3. Jiang, Q. Y. and Barber, G. C., "Modeling of reaction film failure in gear lubrication," Wear 231, pp.71-76, 1999.
4. Murakawa, M., Komori, T., Takeuchi, S., and Miyoshi, K., "Performance of a rotating gear pair coated with an amorphous carbon film under a loss-of-lubrication condition," Surface and Coatings Technology 120-121, pp. 646-652, 1999.
5. Wu, S. and Cheng, H. S., "Sliding Wear Calculation in Spur Gears," J. of Tribology, Vol. 115, pp.493-500, 1993.
6. Dowson, D., "Elastohydrodynamic and micro-elastohydrodynamic lubrication," Wear 190, pp.125-138, 1995.
7. Larsson, R. "Transient non-Newtonian elastohydrodynamic lubrication analysis of an involute spur gear," Wear 207, pp.67-73, 1997.
8. Dowson, D. and Higginson, G. R., "Elastohydrodynamic lubrication, the Fundamentals of Roller and Gear Lubrication," Pergamon, Oxford, 1966.
9. Hamrock, B. J. "Fundamentals of Fluid Film Lubrication," McGRAW-HILL, pp.141-165, 1994.
10. Roelands, C. J. A. Correlational Aspects of the Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of Lubricating Oils, Doctoral thesis, Technische Hogeschool te Delt, Netherlands, 1966.
11. Koo, Y.P., Cho, Y.J., Lee, D.W. "3-Dimensional Elastohydrodynamic Lubrication Analysis on the Cam-Roller Contact with Consideration of Roller Profiling," JSME International J. 45(C), pp. 316-322 2002.