大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 13 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIII, No.2, 159-178. May 2003

초등 수학 교재에서 활용되는 추론 분석

서동엽*

본 연구는 초등 수학 교재에서 정당화 과정이나 문제 해결 과정에서 활용되는 추론을 분석한 것이다. 본 연구의 분석 결과, 한 가지 전형적인 예에 대한 국소적 연역 추론이 가장 전형적인 특징으로 드러났으며, 사각형에 대한 몇 가지 명제는 연역 추론으로 정당화할 뿐 아니라 일반성을 요구하고 있는 것으로 드러났다. 또한, 열거에 의한 귀납 추론은 그리 많이 활용되고 있지 않으며, 구체물을 통한 유추가 많이 활용되고 있음을 알 수 있었다. 전형적인 한 가지 예에 대한 설명은 Miyazaki가 제시한 예에 의한 설명이나 Semadeni가 제시한 활동 증명과 유사한 면을 지니고 있지만, 학생들의 학년 단계가 높아지더라도 계속 낮은 수준머물러 있는 점이 문제점으로 부각되었다. 또한, 사각형의 일반적인 성질을 다루는 몇몇 명제는 Piaget의 이론에 비추어 너무 어려운 것으로 분석되었다. 본 연구에서는 이러한 문제점을 해결할 수 있는 방안으로서 보다 점진적인 추론의 지도를 제안하였는바, 전형적인 예에 대한 경험적 정당화, 전형적인 예에 대한 경험으로부터 추측의 구성, 다양한 예에 대한 추측의 타당성 조사, 일반성에 대한 스키마 형성, 함의 관계의 이해를 위한 기초 경험의 다섯 가지 수준이다.

I. 서론

추론이란 이미 알고 있는 판단으로부터 새로운 판단을 이끌어 내는 사유 작용으로(우정호, 2000), 우리의 삶은 추론의 연속이라고 볼 수 있다. 어느 겨울 날 최저 기온이 영하 15도일 정도로 매우 춥다면 길어야 3~4일 후에는 매서운 추위는 끝날 것으로 예상한다. 이는 겨울철 추위는 대체로 3~4일 주기로 강한 추위와 약한 추위가 반복된다는 그 동안의 삶의 경험으로부터 귀납적으로 추론하는 것이라고 할 수 있다. 오후 5시에 약속이 있는데 현재 시간이 오후 4시 30분이고, 지하철역이 20개만큼 떨어져 있는 곳에 가야한다면 지하철로는 약속시간을 지킬 수 없으므로 다른 교통 수단을 생각하게 되며, 이는 지하철은 평균적으로 1개 역에 2분 정도 걸린다는 원리에 바탕한 연역 추론으로 볼 수 있다. NCTM(2000)에서는 추론과 증명이 유치원 단계부터 최종 학년까지 모든 학생들의 수학적 경험에서 일관된 일부분을 이루어야 하는 것으로 보고 있으며, 그 이유로 수학적 추론은 일종의 습관이기에 다른 모든 습관과 마찬가지로 다양한 문맥에서 지속적으로 이용함으로써 발달되어야 하는 것이라는 점을 들고 있다. 또한, 수학적인 아름다움 중 하나는 어떤 흥미로운 사실이 성립할 때 대체로 이에 대한 적절한 이유가 있다는 점임을 지적하고 있다.

수학적 방법의 전형으로 널리 받아들여지는

* 춘천교육대학교, dseo@cnue.ac.kr

유클리드의 원론은 그리스 이래 진리에 눈을 뜨게 하는 도야재로서, 추론에 엄밀성과 우아함과 힘을 부여하는 연역적 방법의 지도를 위한 교재로서 2000여년 동안 수학 교육의 주축이 되어 역사를 이어 왔다(우정호, 1998). 하지만 근래에 와서 수학은 귀납적 추론에 의해 발견되고 연역적 추론에 의해 확립되어 간다는 점이 널리 받아들여지고 있는 것으로 보인다(Polya, 1986; 우정호, 2000). 수학교육 근대화 운동기와 수학교육 현대화 운동기, 문제해결 운동기 등으로 대변되는 최근 수학교육의 역사를 보더라도 귀납 추론과 연역 추론에 대한 강조점의 차이는 변화했을지라도 추론이 중심적인 지도 내용이라는 점은 변화하지 않았음을 알 수 있다.

우리 나라에서는 전통적으로 중학교 2학년 단계부터 평면도형의 여러 성질을 정당화하는 수단으로서 연역 추론에 바탕한 수학적 증명을 도입하여 지도하여 왔으며, 초등학교에서 지도되는 여러 원리에 대한 정당화는 대체로 귀납 추론에 의하여 지도하여 왔다. 이러한 지도 원리의 바탕에는 Piaget의 인지 발달 이론이 있으며, 가설연역적 사고가 가능한 형식적 조작기부터 증명의 도입이 가능한 것으로 판단하고 있는 것으로 보인다. 그리고, 연역 추론을 중심으로 중학생들의 증명 능력을 조사하는 여러 연구가 있어 왔으며(우정호, 1994; 류성림, 1998; 서동엽, 1999), 중학교에서 이루어지는 증명 수업을 분석하는 연구도 있었다(나귀수, 1998).

하지만, 상대적으로 초등학교에서 다루어지는 추론에 대한 분석적인 연구는 찾아보기가 쉽지 않다. 초등학생들의 추론 능력과 관련된 연구로서, 라병소, 신경자, 신준식, 서동엽(2002)의 연구에서는 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 정당화를 위한 추론 능력을 조사하였다. 여기서는 약 15% 정도의 학생들이 상당한 정도의 논리적 추론 능력을 보여 주었으며, 약 25% 정도의 학생들도 부분적으로 논리적 추론 능력을 보여 주었다고 한다. 하지만, 그 외의 연구를 찾아보기는 쉽지 않으며, 그 이유 중 하나는 초등학교에서 수학교육에 대한 최근의 관심이 여러 구체물 조작이나 활동을 통한 교수·학습에 놓여 있기 때문인 것으로 보인다. Piaget가 조작적 구성주의라는 인지 심리학을 주장한 이래로 초등 수학교육에서의 논의는 아동들의 학습에 도움이 되는 구체물과 활동의 개발에 집중되어 온 면이 있으며, 상대적으로 아동들의 조작과 활동 과정에 자연스럽게 포함되는 추론 과정에 대한 논의는 부족했던 것으로 보인다.

본 연구는 초등 수학 교재에서 지도되고 있는 추론의 실제를 파악해 보는 데 초점이 있다. 추론은 크게 연역 추론과 귀납 추론으로 나누어지는 바, 각각의 추론 방법이 초등학교 수학 교재에 반영되어 있는 실태를 조사해 보고자 하는 것이다. 추론은 주로 수학적인 원리를 설명하는 과정에서 정당화를 위해 이용되거나, 추론을 통한 문제 해결 과정에서 이용된다. 이러한 과정을 분석하여 봄으로써 초등 수학 교재에서 활용되고 있는 추론의 형태와 도입 시기 등에 대한 실태를 연역 추론과 귀납 추론이라는 틀로 해석해 보고 수학교육학적인 입장의 논의를 전개해 본다. 이어지는 제 II장은 이론적 배경으로서 추론과 관련된 국내외 선행 연구를 바탕으로 추론의 본질에 대하여 조사해 본다. 제 III장에서는 제 7차 교육 과정의 6개 내용 영역을 기준으로 추론에 대한 교과서 분석 결과 및 분석에서 드러나는 특징적인 결과를 제시한다. 제 IV장에서는 제 III 장의 결과를 바탕으로 하여 추론 지도에 대한 수학교육학적인 논의를 전개한다. 마지막으로 제 V장에

서는 초등 수학교육에서 추론 지도의 방향으로서 추론의 수준 설정에 대한 논의와 이에 따르는 후속 연구를 제안하고자 한다.

II. 추론의 본질

수학에서 이용되는 추론은 크게 연역 추론과 귀납 추론으로 나누어 볼 수 있을 것이다. 이 절에서는 이러한 추론의 본질에 대하여 살펴본다.

1. 연역 추론과 수학적 증명

연역 추론은 일반적으로 받아들여지는 참인 사실에 근거하여 주어진 사실로부터 결론을 추리하는 것이다. 예를 들면, '모든 사람은 죽는다, 너는 사람이다, 그러므로 너는 죽는다'와 같은 삼단논법은 연역 추론의 전형적인 예이다(우정호, 2000). 여기서는 '모든 사람은 죽는다'는 일반적으로 받아들여지는 참인 사실에 의하여 결론을 도출하고 있는 것이다.

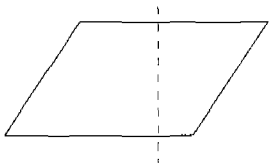
수학적 증명은 이러한 연역 추론에 바탕하여 가정으로부터 결론을 추론하는 것으로 볼 수 있다. Garnier와 Taylor(1996)에 따르면, 조건 명제 $P \Rightarrow Q$에 대한 수학적 증명은 명제 S_1, S_2, $\cdots$, S_n의 계열로서 $S_1 = P$, $S_n = Q$이고 각각의 S_i는 첫째, 공리 또는 앞서 증명된 정리이거나, 둘째, 추론 규칙을 이용하여 선행 명제로부터 추론될 수 있거나, 셋째, 대체 규칙을 이용하여 선행 명제와 동치임을 보일 수 있는 것이다. NCTM(2000)에서 지적하고 있는 바와 같이 수학적 증명은 특별한 종류의 추론과 정당화를 표현하는 형식적인 방식인 것으로 볼 수 있다.

현행 제 7차 교육과정을 포함한 최근 몇 차례의 교육과정에서 수학적 증명이 중학교 2학년부터 도입된다고 보는 것은 명제, 증명, 가정, 결론 등의 용어가 이 시기에 도입되기 때문이지만, 초등학교 과정에서도 부분적으로 간단한 연역 추론이 이용되는 예는 찾아 볼 수 있다. 5학년에서 평행사변형의 넓이는 다음과 같이 도입된다(교육인적자원부, 2001a)

평행사변형의 넓이를 구하는 방법을 알아보아라.

· 종이에 밑변이 4cm이고 높이가 3cm인 평행사변형을 그린 후, 오려 보아라.

· 이 평행사변형을 다음과 같이 자른 다음, 직사각형 모양이 되게 다시 붙여 보아라.



· 만들어진 직사각형의 넓이는 얼마인가?

· 처음 평행사변형의 넓이는 얼마라고 생각하는가?

·· 평행사변형의 넓이를 구하는 방법을 말하여 보아라.

(평행사변형의 넓이)=(직사각형의 넓이)

=(가로)×(세로)=(밑변)×(높이)

이 추론 방법은 밑변이 4cm이고 높이가 3cm인 하나의 평행사변형으로부터 일반적인 평행사변형의 넓이를 구하는 방법을 추론하고 있다는 점에서 귀납 추론인 것으로 볼 수 있다. 또한, 임의의 평행사변형에 대하여 오려붙이는 방법을 통하여 직사각형을 만들 수 있다는 방법의 일반성에 대한 어떠한 근거도 없다는 점도 귀납 추론으로 보게 한다. 하지만, '밑변이 4cm이고 높이가 3cm인 평행사변형의 넓이는 가로가 4cm이고 세로가 3cm인 직사각형의 넓이와 같다, 직사각형의 넓이는 (가로)×(세로)이다, 따라서, 이 평행사변형에 대하여 넓이는

(밑변)×(높이)이다'라는 부분은 연역 추론에 의한 것으로 볼 수 있다.

보다 엄밀하게 논의한다면 주어진 평행사변형의 넓이가 직사각형의 넓이와 같다는 것은 어떤 근거에서 사실인지가 문제가 될 수 있을 것이다. 하지만, 초등학교는 물론 중·고등학교에서도 아직 공리라는 용어는 공식적으로 도입하고 있지 않으며 상당한 부분을 학생들의 직관에 의존하고 있는 점을 감안한다면 두 도형의 넓이가 같다는 것을 그림으로 보이고 있는 위의 방법을 근거로 사실이라고 할 수 있을 것이다. 또한 Thom(1986)의 다음과 같은 지적에 유념할 필요가 있다.

> 엄밀성에 대한 엄밀한 정의는 없다. 따라서, 우리는 어떤 정리에 대하여 그것을 이해할 만큼 적당히 교육받고 준비된 독자들에 의해 수용될 때, 그 증명은 엄밀하다고 확신한다. 더군다나, 확신으로 이끄는 증거는 포함된 각각의 기호들을 충분히 명확하게 이해하는 것으로부터 나오는 결과이며, 그것들을 조합한 것이 독자들을 납득시킨다.

이 논의가 매우 설득력 있게 받아들여지는 것은 수학에서 공리로 받아들여지는 것조차도 수학자들의 직관으로 더 이상 간단한 사실로 쪼갤 수 없는 최종 산물이기 때문이다. 또한, Hamming(1980)이 지적하고 있는 바와 같이, '수렴하는 연속함수열은 어떤 연속함수에 수렴한다'는 초기의 Cauchy 정리가 몇 십 년 후에 증명의 오류가 발견되고 가정에서 '수렴'을 '평등수렴'으로 대체하면서 현재까지 정리로 받아들여지고 있는 데에서도 엄밀함의 개념은 다소 상대적인 것임을 알 수 있다. 이러한 점에서 초등 수학 수업이라는 환경을 고려할 때 위에서 두 도형의 넓이가 같음을 설명하는 방식은 적정한 수준의 엄밀성을 지닌 것으로 보는 것이 타당할 것이다. 제 III장에서 초등학교 수학 교재에 반영되어 있는 연역 추론에 대한 분석도 이러한 기준에 따른다.

2. 귀납 추론

귀납 추론은 관찰된 사실 뒤의 규칙성을 찾는 사고 과정이며, 그 근거는 다수의 사례에서 관찰되는 법칙이 동종의 다른 사례에서도 성립한다고 보는 자연의 균일성에 있다(우정호, 2000). 이를테면 우리는 '지금까지 살았던 사람이 모두 죽었다'는 사실로부터 '모든 사람은 죽는다'는 명제를 참으로 받아들이며 이는 귀납 추론에 의한 것이다. 귀납 추론은 부분적 사례로부터 일반적 결론을 이끌어 내는 것이므로 경험적·확률적 판단이라고 볼 수 있으며, 항상 참이라고는 할 수 없고 최선의 가정을 제공해 줄 수 있을 뿐이다. 우정호(2000)는 귀납 추론의 유형을 열거에 의한 귀납, 통계적 귀납, 인과적 귀납, 유추, 가설의 설정으로 나누고 있으며, 이 중 통계적 귀납은 열거에 의한 귀납으로 볼 수 있고, 인과적 귀납과 가설의 설정은 주로 과학에서 이용됨을 지적하고 있다. 따라서, 본 연구에서는 열거에 의한 귀납과 유추를 중심으로 살펴보기로 한다.

열거에 의한 귀납의 전형적인 예는 다음과 같은 것이다(교육인적자원부, 2000a).

· □에 어떤 모양을 놓아야 한다고 생각합니까?

위 문항의 답은 정육면체 모양의 그림이 될 것이나, 구가 될 수도 있다. □ 안에 구가 들어간 전체 12개의 도형이 반복되는 규칙을 생각할 수도 있기 때문이다. 앞의 1절에서 살펴본 평행사변형의 넓이를 구하는 방법은 하나의 예

를 이용하고 있다는 점에서 여러 예를 열거한 것으로 보기는 어려우나, 다음 장에서 살펴보게 될 바와 같이 초등 수학에서 원리를 정당화하는 주된 방법으로 이용되고 있다. 이러한 두 방법은 연역 추론이 갖는 '일반성'을 보장하지 못한다는 점에서 공통되며, 우정호(2000)의 지적처럼 귀납적 비약을 동반하고 있다. 하지만, 앞서 논의된 평행사변형의 넓이를 구하는 원리를 설명하는 방법은, 예를 들어 '1, 2, 4 다음에 오는 수는 무엇인가? 8이다'라는 주장에 이용되는 설명 방법과는 차별되는 점을 지니고 있다. 그것은 1, 2, 4 다음에 오는 수는 7도 될 수 있고 여러 가능성이 있는 반면에, 평행사변형의 넓이 지도에서는 하나의 평행사변형의 예로부터 넓이를 구하는 원리를 설명하고 있지만 그 방법적 일반성은 반박되기 어려운 실제로 성립하는 사실이라는 점이다. 나아가 학생들로 하여금 하나의 예로부터 이 방법의 일반성을 직관적으로 파악하기를 의도하고 있을 수도 있다.

이 점에서 이 방법을 열거에 의한 귀납과 구분하여 Miyazaki(1991)의 용어로 '예에 의한 설명'이라고 부를 수도 있을 것이다. Miyazaki는 예에 의한 설명 방법을 제안하고 있는 바, 이는 실제적인 설명과 연역적인 설명의 중간 단계로서 작용하는 것이다. 예에 의한 설명은 구체적인 행위에 의존하면서 어떤 추측의 일반성을 함께 보여주는 설명으로서, 추측의 구성, 경험적 방법에 의한 추측의 정당화, 일련의 해석 및 조작을 하나의 대응하는 스키마로서 확인하는 것, 그 스키마의 불변성에 대한 확신이라는 4단계로 이루어진다. 따라서, 다음 장에서 논의할 귀납 추론의 한 유형으로서 예에 의한 설명을 포함하며, 이러한 설명 방법이 어떻게 활용되고 있는지를 살펴보기로 한다.

한편, 유추란 유사성을 바탕으로 어떤 대상에 대하여 성립하는 성질로부터 그와 유사한 대상의 성질을 추측하는 것이다(우정호, 2000). 유추에 의한 추론에서 아동들에게 요구되는 것은 주어진 상황이나 아이디어의 표면적인 특징보다는 관계적 속성에 주목하는 것이다(English, 1999). English에 따르면, 구체물이나 그림을 이용하여 수학적 개념을 표현하는 것은 모두 유추로 볼 수 있다. 따라서, 두 자리 수의 대소를 비교하기 위하여 십 모형과 낱개 모형을 이용하여 개수를 통하여 비교하는 것은(교육인적자원부, 2001b), 유추에 의한 추론으로 볼 수 있을 것이다. 이러한 유추가 반영된 실제도 분석해 보기로 한다.

III. 초등 수학 교재의 추론 지도 과정

이 장에서는 제 7차 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서를 대상으로 추론 유형에 따른 실제를 분석한 결과를 제시한다. 제 7차 교육과정에는 수와 연산, 도형, 측정, 문자와 식, 확률과 통계, 규칙성과 함수의 6개 내용 영역이 있는 바, 이 장에서는 크게 수와 연산 영역, 도형 및 측정 영역, 기타 영역의 3개 영역으로 나누어 분석하기로 한다. 분석의 틀이 되는 추론 유형은 연역 추론과 귀납 추론이며, 귀납 추론은 다시 열거에 의한 귀납과 예에 의한 설명, 유추로 나눈다.

1. 수와 연산 영역

가. 수의 크기 비교와 계산

4-가 단계에서는 큰 수를 지도하면서 '321600과 289800은 어느 것이 더 큰가? 왜 그렇게 생각하는가?'라는 질문을 통하여 학생들

의 연역 추론에 의한 사고를 유도하고 있다(교육인적자원부, 2001c). 위의 문제에 대한 답은 '321600이다. 십만의 자리가 크기 때문이다'라는 정도가 될 것이며, 이는 '가장 큰 자리 수가 큰 수가 더 크다'는 일반적인 원리에 근거하는 것이다. 이러한 지도 방법은 저학년에서 두 종류의 구체물을 일대일 대응으로 비교해보는 경험으로 두 수의 대소를 비교하는 것과 비교해 볼 수 있다. 1-가 단계에서 한 자리 수의 크기 비교는 5개의 컵과 4개의 접시가 있는 상황에서 컵을 접시 위에 올려 보게 하여 컵이 남는다는 사실로부터 컵이 접시 보다 많으므로 5는 4보다 크다고 지도되고 있다(교육인적자원부, 2000a). 이는 각각의 자연수 개수만큼 두 종류의 구체물을 제시하고서 일대일로 대응시킬 때 남는 쪽이 크다는 내용을 유추를 통하여 지도하고 있는 것이다. 1학년에서 구체물의 일대일 대응을 통한 대소 비교나 4학년에서 자리값을 이용한 대소 비교는 예를 이용하여 각 학년에서 다루는 범위의 수에 대한 대소 비교를 위한 방법을 예시하고 있다는 점에서 귀납 추론으로 볼 수 있는 공통점을 지니고 있다.

또한, 4-가 단계에서 도입되는 세 자리 수와 두 자리 수의 곱셈은 '749×6은 얼마인가? 749×30은 얼마인가? 749×36은 얼마라고 생각하는가?'와 같은 질문 후에749×36=749×(30+6)=749×30+749×6과 같이 계산하는 방법을 알아보고 있는 바(교육인적자원부, 2001c), 이는 분배법칙에 근거한 것으로 볼 수 있다. 분배법칙이라는 용어가 공식적으로 도입되는 것은 아니지만, 학생들이 학습 경험에 의하여 직관적으로 체득하고 있는 것으로 가정하고 있는 것으로 볼 수 있다. 2-가 단계에서 곱셈은 묶어세기를 했을 때 묶는 단위와 묶음의 수의 곱이라는 유추를 통하여 도입되며(교육인적자원부, 2000c), 구구단에 이어 두 자리 수 이상의 곱셈을 위하여 분배법칙을 암묵적으로 가정한 계산 방법을 도입하고 있는 것이다. 수 개념 지도와 같이 예를 통하여 계산 방법을 설명한 후에 일반화하고 있는 점에서 귀납 추론을 이용하고 있다는 점은 공통되고 있다.

나. 분수 및 소수의 계산

5-가 단계에서 분모가 다른 두 분수의 덧셈은 다음과 같은 방식으로 지도되고 있다(교육인적자원부, 2002a).

$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}$을 여러 가지 방법으로 계산하여 보아라.

· 공통분모를 6과 4의 곱인 24로 하여 두 분수를 통분한 다음, 합을 구하여 보아라.

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{1\times4}{6\times4}+\frac{3\times6}{4\times6}$$
$$=\frac{\square}{24}+\frac{\square}{24}=\frac{\square}{24}=\frac{\square}{12}$$

위의 방법은 앞서 학습한 통분의 원리와 분모가 같은 두 분수의 덧셈 방법을 순차적으로 적용함으로써 $\frac{11}{12}$이라는 답을 유도하고 있다는 점에서 연역적 추론을 적용한 예로 볼 수 있다.

5-나 단계에서 도입되는 소수를 자연수로 나누는 나눗셈은 비커에 담은 물에 의한 유추와 수직선 유추를 거친 후에 연역적으로 도입되고 있다.

$$2.4\div2=\frac{\square}{10}\div2=\frac{\square}{10}\times\frac{1}{2}$$

이 식은 소수의 정의로부터 $2.4=\frac{24}{10}$이고, 분수를 자연수로 나누는 원리에 의하여 $\frac{24}{10}\div2$

$= \frac{24}{10} \times \frac{1}{2}$ 이며, 분수의 곱셈에 의하여 $\frac{24}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{12}{10}$ 이므로, 다시 소수의 정의에 의하여 1.2라는 답을 유도하도록 하고 있는 것이다. 한 가지 예로부터 소수를 자연수로 나누는 계산 방법을 지도한다는 점에서 귀납 추론이기도 하지만, 위의 예에 대한 도입 방법은 연역 추론으로 볼 수 있는 것이다.

6-나 단계에서 도입되는 분모가 다른 두 분수의 나눗셈 계산 방법에서도 연역 추론이 이용되고 있음을 알 수 있다(교육인적자원부, 2002d). 먼저 분모가 같은 두 분수의 나눗셈을 유추에 의한 방법으로 도입한 후에, 분모가 다른 두 분수의 나눗셈을 통분에 의하여 나누는 방법을 도입한다. 그 후에 분모가 다른 두 분수의 나눗셈은 오른쪽 분수의 역수를 곱하는 것과 같음을 연역 추론으로 다음과 같이 설명하고 있는 것이다.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3\times5}{4\times5} \div \frac{2\times4}{5\times4} = \frac{3\times5}{2\times4}$$

그런데, $\frac{3\times5}{2\times4} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$ 이므로, $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$ 입니다.

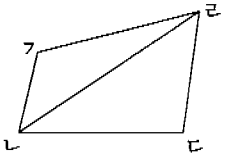
이상에서 살펴본 이분모 분수의 덧셈이나 소수의 나눗셈, 분수의 나눗셈은 연역 추론을 활용하고 있지만, 궁극적으로는 제시된 한 가지 예를 통하여 일반적인 분수 및 소수의 계산 방법을 지도하고 있다는 점에서는 귀납 추론이다.

2. 도형 및 측정 영역

가. 도형 영역

3-가 단계에서는 직사각형과 정사각형의 개념을 도입하면서 직사각형 모양의 종이를 비스듬히 접고 남은 부분을 오려서 정사각형을 만드는 활동이 도입되고 있다(교육인적자원부, 2001a). 그런 후에 '만들어진 사각형이 정사각형이라고 생각합니까? 왜 그렇게 생각했습니까?'와 같은 문제를 통하여 그 이유를 생각하게 하고 있다. 이 문제에 답하기 위해서는 '접어 올린 두 선분이 일치하므로 두 변의 길이가 같고, 원래 직사각형이므로 각이 직각이다'는 식의 정사각형의 정의를 언급하지 않을 수 없으며, 이는 아동들의 연역 추론을 유도하고 있는 문제로 볼 수 있다. 또한, 3-가 단계에서는 도형 옮기기, 도형 뒤집기, 도형 돌리기 등의 활동이 도입되고 있는 바, 이는 각각 평행이동, 대칭이동, 회전이동에 대한 유추로 볼 수 있을 것이다.

4-가 단계에서 사각형의 네 각의 크기의 합을 지도하는 방법에서 연역 추론을 활용하는 예를 찾아볼 수 있다(교육인적자원부, 2001c). 여기서는 먼저 두 개의 사각형을 주고서 네 각의 크기의 합을 각도기로 재어 보고, 직사각형 모양의 종이를 잘라 네 각을 맞추어 보는 활동을 통하여 사각형의 네 각의 크기의 합은 360°가 된다는 것을 경험적으로 조사하게 하고 있으며, 이는 두 개의 예에 의한 귀납 추론으로 볼 수 있다. 그런 다음 사각형을 삼각형 2개로 나누고 삼각형을 이용하여 사각형의 네 각의 크기의 합을 알아보게 하고 있는 바, 이는 연역 추론을 적용한 예로 볼 수 있다.



(사각형의 네 각의 크기의 합)
=(삼각형의 세 각의 크기의 합) ×2
= [ ] ×2 = [ ]

위의 방법은 사각형은 두 개의 삼각형으로 나뉘어질 수 있다는 사실과 앞서 귀납 추론으로 학습한 삼각형의 세 각의 크기의 합은 180° 라는 사실로부터 사각형의 네 각의 크기의 합을 연역적으로 추론하고 있는 것으로 볼 수 있다. 또한, 위의 추론 방법이 특이한 점은 '모든 사각형'이라는 점을 명시적으로 언급하고 있지는 않지만, 사실상 모든 사각형에 대하여 성립함을 의도하고 있다는 점이다. 이는 앞서 살펴본 연역 추론에서는 특별한 예를 대상으로 하여 국소적으로 전개되었던 것과 비교하여 일반성을 첨가했다는 점에서 의의가 있다.

4-나 단계에서 지도되는 여러 가지 사각형에 대한 내용에서도 연역 추론을 적용하는 예를 찾아볼 수 있다(교육인적자원부, 2001d). 사다리꼴의 개념에 이어 평행사변형의 개념을 도입한 후에, '평행사변형은 마주 보는 두 쌍의 변이 평행이므로 사다리꼴임을 알 수 있습니다'라고 하여 연역 추론에 의하여 평행사변형과 사다리꼴의 포함 관계를 설명하고 있다. 그리고, 평행사변형에 이어 마름모의 개념을 도입하면서 '마름모를 평행사변형이라고 할 수 있습니까? 왜 그렇게 생각합니까?', '마름모를 사다리꼴이라고 할 수 있습니까? 왜 그렇게 생각합니까?' 라는 물음을 통하여 마름모와 다른 사각형의 포함 관계를 생각해 보게 하고 있다. 이러한 물음에 대하여 답할 수 있는 방법은 각각의 사각형의 정의에 의존하는 것으로 그 과정은 연역 추론이라고 볼 수 있는 것이다. 계속해서, 직사각형과 정사각형의 개념을 도입하면서 다른 도형과의 포함 관계를 생각하게 하고 있으며, 이를 제시하는 방법은 마름모에서 이용한 방법과 유사하다. 이러한 도형의 포함 관계 역시 명제의 일반성과 관련된다는 점에서 특이한 면을 지니고 있다.

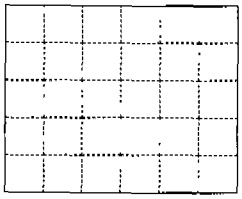
나. 측정 영역

2-가 단계에서 매우 간단하기는 하지만 연역 추론을 적용하는 예를 찾아볼 수 있다(교육인적자원부, 2000c). 그것은 책상의 짧은 쪽의 길이와 교실 출입문의 폭을 재는 활동을 하게 한 후에 '새 책상을 교실에 들여놓을 수 있다고 생각합니까?'라고 묻고 있는 것이다. 이는 '새 책상을 교실에 들여놓기 위해서는 책상의 짧은 쪽의 길이는 교실 출입문의 폭보다 작아야 한다. 책상의 짧은 쪽의 길이는 교실 출입문의 폭보다 작다(또는 크다). 따라서 책상을 교실에 들여놓을 수 있다(또는 없다)'라는 식의 삼단논법에 의한 판단을 요구하고 있는 문제이다.

5-가 단계에서는 직사각형의 둘레의 길이를 구하는 방법을 다음과 같이 도입되고 있는 바(2002a), 다소 복합적인 양상의 추론을 보여 주고 있다.

직사각형의 둘레의 길이를 구하는 방법을 알아보아라.

· 가로가 5cm이고 세로가 3cm인 직사각형을 모눈종이에 그려보아라.



· 이 직사각형의 둘레의 길이를 재어보아라.

· 직사각형의 둘레의 길이를 구하는 방법을 말하여 보아라.

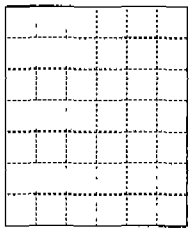
직사각형의 둘레의 길이

(직사각형의 둘레) = {(가로) + (세로)} × 2

위의 설명 방법은 우선 가로가 5cm이고 세로가 3cm인 직사각형의 둘레를 구하는 방법으로부터 일반적인 둘레를 구하는 방법을 유도하

고 있다는 점에서 예에 의한 귀납 추론으로 볼 수 있다. 하지만, 적어도 위 그림에 예시된 직사각형에 대해서는 (직사각형의 둘레) = {(가로) + (세로)} ×2가 성립한다는 점에서 연역 추론을 적용한 것으로 볼 수도 있다. 이는 둘레의 길이를 구하면 (가로 + 세로 + 가로 + 세로)가 되므로 계산 규칙에 따라서 정리한 것이기 때문이다. 한편으로 위의 설명은 가로와 세로가 유리수인 경우까지 적용되는 것을 의도하고 있다는 점에서 유추로 볼 수도 있다. 가로와 세로가 자연수 값인 경우 위의 모눈종이에서 모눈의 개수를 세어 보는 것으로 둘레를 구할 수 있지만, 유리수 값을 갖는 경우까지 세어 보는 방법을 적용할 수는 없으며, 유리수인 경우는 자연수인 경우로부터 유추하여 생각하게 하고 있는 것으로 볼 수 있다는 것이다.

직사각형의 둘레에 이어 곧바로 지도되는 직사각형의 넓이에서도 비슷한 양상으로 추론이 전개되고 있음을 알 수 있다(교육인적자원부, 2001a)..



직사각형의 넓이를 구하는 방법을 알아보아라.

· 가로가 3cm이고 세로가 5cm인 직사각형을 모눈종이에 그려보아라.

· 이 직사각형에는 모눈이 가로로 몇 칸 놓여 있는가?

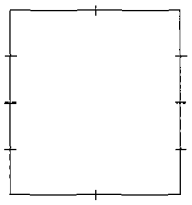
· 이 직사각형에는 모눈이 세로로 몇 줄 놓여 있는가?

· 이 직사각형의 넓이는 얼마라고 생각하는가?

· 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 말하여 보아라.

(직사각형의 넓이)=(가로)×(세로)

직사각형의 둘레에서와 마찬가지로 귀납 추론과 연역 추론이 복합된 추론의 형식에 따라 직사각형의 넓이가 지도되고 있음을 알 수 있으며, 둘레의 지도와 다른 점은 분수의 곱셈을 도입하는 과정에서 직사각형의 가로와 세로가 분수인 경우를 다루고 있다는 점이다(교육인적자원부, 2002a).



$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$은 얼마인지 알아보아라.

· 직사각형에서 $\frac{1}{4}$만큼 파란색을 칠하여 보아라.

· 빗금 친 부분 중에서 다시 $\frac{1}{2}$만큼 빨간색을 칠하여 보아라.

· 겹쳐서 색칠한 부분은 전체의 몇 분의 몇이 되는가?

· $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$은 얼마라고 생각하는가?

· 왜 그렇게 생각하는가?

위의 예에서 가장 중요하게 의도하고 있는 내용은 분수의 곱셈에 대한 예로서 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$는 전체의 $\frac{1}{4}$의 $\frac{1}{2}$로 볼 수 있으며, 이것이 결과적으로 전체의 $\frac{1}{8}$이 된다는 것이다. 하지만, 부수적인 결과로 가로와 세로가 분수로 주어진 직사각형의 넓이도 (가로) ×(세로)로 구할 수 있음을 보여 주고 있는 것이다.

한편, 직사각형의 넓이를 구하는 방법에서 평행사변형의 넓이를 구하는 방법을 추론하는 방식은 제 II장에서 논의하였으며, 비슷한 형태의 추론을 이용하여 평행사변형의 넓이를 구하는 방법으로부터 삼각형의 넓이를 구하는 방법을 유도하고 있다.

또한, 이를 활용하여 비슷한 방법으로 5-나 단계에서 사다리꼴과 마름모의 넓이를 구하는 방법을 추론하고 있다.

6-가 단계에서는 직육면체의 부피를 도입하고 있다(교육인적자원부, 2002c). 쌓기나무를 가로로 3개, 세로로 5개, 위로 6층으로 쌓은 그림을 주고서, 가로, 세로, 밑넓이, 높이, 부피를 차례로 구한 후에 직육면체의 부피를 구하는 방법을 말해 보게 하고 있는 바, 여기서는 (직육면체의 부피) =(밑넓이) ×(높이) =(가로) ×(세로) ×(높이)라는 공식을 유도하고자 하고 있다. 앞에서 다룬 도형의 넓이를 구하는 예에서와 마찬가지로 귀납 추론과 연역 추론, 유추가 복합적으로 적용되는 추론 방법을 따르고 있다.

6-나 단계에서는 원과 원기둥의 여러 값에 대한 측정 방법이 도입된다(교육인적자원부, 2002d). 이 중 가장 먼저 도입되는 것은 원주이며, 종이에 그린 원, 병, 음료수, 캔 등의 원주와 지름의 길이를 재어 본 후 (원주) ÷(지름)의 값의 크기를 계산하게 함으로써 열거에 의한 귀납 추론 방법을 적용하고 있다. 또한, 원의 넓이는 한 원을 선택하여 이 원을 점점 더 작은 부채꼴로 분할하여 평행사변형과 유사한 모양을 만들고, 부채꼴이 작아질수록 직사각형에 근사한다는 점을 이용하여 지도되고 있다. 이 방법은 앞서 학습한 원주를 구하는 방법과 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 적용한다는 점에서 연역 추론의 성격을 띠고 있으며, 원을 점점 더 작은 부채꼴로 쪼개어 간다는 근사적인 방법을 활용한다는 점에서 열거에 의한 귀납 추론을 활용하고 있는 것이다. 원주와 원의 넓이 모두 열거에 의한 귀납 추론의 방법을 활용하지만, 원주에서는 임의적인 예를 열거하는 데 비하여 원의 넓이에서는 부채꼴의 크기가 작아지는 쪽으로 열거한다는 점에서 차이가 있다. 원기둥의 겉넓이는 전형적인 예에 의하여 설명되고 있으며, 원기둥의 부피는 전형적인 예로부터 원의 넓이에서와 같이 점점 작은 도형으로 분할하는 방법으로 지도된다. 원과 원기둥의 측정값을 정당화하는 추론에서는 무한 개념이 적용된다는 점을 특이한 내용으로 지적할 수 있다. 원주율을 설명하는 과정에서 '3.14159…'와 같은 표현을 활용하고 있으며, 원의 넓이와 원기둥의 부피를 설명하는 과정에서 '한없이 잘게 잘라 붙이면'이라는 표현을 활용하고 있다.

3. 기타 영역

가. 문자와 식 영역[1)]

2-나 단계에서부터 연역 추론을 적용하는 활동이 도입되고 있다(교육인적자원부, 2000d). 삽화를 통하여 전화번호의 국번을 맞추어 보는 활동을 제시하고 있으며, '백의 자리는 7이다, 일의 자리부터 거꾸로 읽어도 똑같은 국번이다, 국번에 121을 더하면 모두 똑같은 숫자가 된다'는 세 가지 조건이 제시되어 있다. 거꾸로 읽었을 때 백의 자리는 일의 자리가 된다는 사실에서 일의 자리가 7임을 연역적으로 추론하고, 7□7에 121을 더하면 백의 자리와 일의 자리가 8이라는 것에서 십의 자리도 8이 된다는 사실을 추론하고, 8−2=6이므로 □=6이라는

1) 규칙성과 함수 영역은 문자와 식 영역의 규칙 찾기 문제 해결 전략과 유사하므로 문자와 식 영역에서 같이 다루기로 한다.

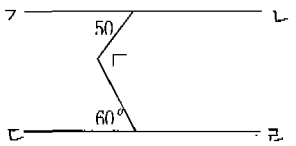
사실을 추론함으로써 '767'이라는 답을 순차적으로 구하게 하고 있다. 이와 유사한 방식으로 □4×□=68과 같은 유형의 계산식을 세로로 주고 □에 들어갈 수를 연역 추론을 통하여 찾게 하는 다양한 문제가 포함되어 있다.

3-나 단계에서도 연역적 추론을 적용하는 예를 찾아볼 수 있다(교육인적자원부, 2001b). 삽화를 통하여 영수의 통장에 9543원이 있고, 현미의 통장에 영수보다 4985원 적게 있고, 병서가 현미보다 3652원이 많은 상황을 제시한 후에 현미와 병서의 저금액을 식을 통해 알아보는 문항을 제시하고 있으며, 이어서 '만일, 현미가 영수보다 3879원 적게 저금했고, 병서가 현미보다 2838원 더 많이 저금했다면, 병서의 저금 통장에는 얼마가 저금되어 있겠습니까?'라고 하여, 문제의 조건으로 주어진 가정을 바꾸었을 때 결과를 계산을 통하여 연역적으로 추론하게 하고 있는 것이다. 또한 규칙 찾기 전략을 활용하는 문항의 예에서는 달력을 1일과 8일이 일요일, 2일과 9일이 월요일이라는 정보만 들어 있는 가려진 달력을 주고서 가려진 부분의 날짜를 구하는 문항을 다루고 있는 바, 이는 복합적인 성격의 추론을 요구하는 것으로 보인다. 즉, 숫자만을 보고서 요일이 하나씩 오른쪽으로 갈 때 1이 커지고 같은 요일인 날짜는 7씩 커진다는 것을 활용한다면 열거에 의한 귀납 추론으로 볼 수 있을 것이지만, 일주일은 7일로 되어 있다는 사실에 근거하여 추론한다면 이는 연역 추론이 될 것이다.

4-가 단계에서는 규칙 찾기 전략을 적용하는 문제에서 바둑돌을 정삼각형 모양으로 1개, 3개, 6개, 10개를 배열한 그림을 주고서 그 다음에 올 수를 묻는 문항을 다루고 있으며(교육인적자원부, 2001c), 이는 열거에 의한 귀납 추론을 적용하는 예로 볼 수 있다.

4-나 단계에서는 다음과 같은 각도를 구하는 문제를 다루고 있다(교육인적자원부, 2001d).

직선 ㄱㄴ과 직선 ㄷㄹ은 평행입니다. □ 안에 알맞은 각도를 써 넣으시오.



이 문제를 해결하기 위해서는 각 □의 꼭지점을 지나고 직선 ㄱㄴ에 평행한 직선을 그린 다음 엇각이 같다는 사실에 근거한 연역 추론을 적용하여 110°라는 답을 구할 수 있다. 한편, 규칙 찾기를 적용하는 문항 중에는 대응표를 보고 빈 칸에 알맞은 수를 쓰고 관계를 찾는 문항이 다수 포함되어 있는 바, 이는 열거에 의한 귀납 추론의 예로 볼 수 있을 것이다.

5-가 단계에서는 표 만들기 전략과 거꾸로 생각하기 전략에 관한 문제에서 연역 추론을 적용하는 예를 찾아볼 수 있다(교육인적자원부, 2002a). 먼저 표 만들기 전략의 문제로서 '네 사람이 각각 동화책, 잡지, 만화책, 사전 중에서 한 권씩을 가지고 있다. 정민이와 가현이가 가지고 있는 책은 동화책이 아니고, 인수는 만화책을 가지고 있다. 정민이가 가지고 있는 책은 잡지책이 아니라면, 철원이는 무슨 책을 가지고 있는가?'라는 문제가 제시되어 있다. 표를 만들어 이 문제를 해결하는 과정에 필요한 사고 과정은 여러 단계의 연역 추론을 거치게 된다. 인수가 만화책을 가지고 있다는 사실로부터 인수는 동화책, 잡지, 사전은 가지고 있지 않으며, 정민, 가현, 철원이는 만화책을 가지고 있지 않다는 사실을 추론하게 된다. 또한, 정민

이는 동화책, 잡지를 가지고 있지 않다는 사실에서 정민이는 사전을 가지고 있음을 추론하게 된다. 또한, 이로부터 가현이는 동화책, 만화책, 사전을 가지고 있지 않으므로 잡지를 가지고 있으며, 마지막으로 철원이는 동화책을 가지고 있음을 추론하게 된다. 한편, 거꾸로 생각하기 전략을 활용하는 문제에서는 최종적으로 주어진 결과로부터 연산을 적용하여 처음의 조건을 연역적으로 추론하게 하고 있다.

6-가 단계에서는 열거에 의한 귀납에 의하여 십이각기둥의 모서리와 꼭지점의 개수를 구하는 문제를 다루고 있다(교육인적자원부, 2002c). 이 문제를 해결하게 하기 위하여 삼각기둥, 사각기둥, 오각기둥, 육각기둥의 모서리의 수와 꼭지점의 수를 각각 조사한 후에 모서리의 수는 꼭지점의 수의 $\frac{3}{2}$배이고, 꼭지점의 수는 각기둥 이름에 들어 있는 수의 2배임을 귀납 추론으로 발견해야 한다. 그런 다음 이 원리를 연역적으로 적용하여 정십이각기둥의 꼭지점의 수는 24개이고 모서리의 수는 36개임을 구하게 되는 것이다.

나. 확률과 통계 영역

2-나 단계에서는 표와 그래프를 이용하여 자료를 정리하는 내용이 도입되고 있다(교육인적자원부, 2000d). 여기서 자료를 정리한 표로부터 도수가 가장 큰 값이나 가장 작은 값을 구하는 활동은 표에 제시된 자료를 근거로 하는 연역 추론으로 볼 수 있을 것이다. 이와 유사하게 3-나 단계에서 막대 그래프나 그림 그래프를 보고서 도수가 가장 큰 값이나 가장 작은 값을 구하는 활동이나(교육인적자원부, 2001b), 4-나 단계에서 꺾은선 그래프로부터 가장 변화가 심한 구간을 찾는 활동(교육인적자원부, 2001d), 5-나 단계에서 줄기와 잎 그림을 이용한 활동(교육인적자원부, 2002b), 6-가 단계에서 비율 그래프를 이용한 활동은(교육인적자원부, 2002c), 모두 그림으로 표현된 자료에 근거한 연역 추론으로 볼 수 있을 것이다.

4. 연구 결과의 요약

초등 수학 교재에서 이용되는 추론 지도 과정에 대하여 제 1절에서 제 3절까지 분석된 결과로부터 다음과 같은 사실을 확인할 수 있다.

첫째, 2-가 단계에서부터 간단한 연역 추론을 활용하고 있고, 대부분의 내용 영역과 단계에서 연역 추론을 활용하고 있다.

둘째, 초등 수학 교재에서 일반적인 원리를 설명하기 위하여 연역 추론을 도입하는 대개의 경우는, 한 가지 예시 상황을 제시하고 이 상황을 연역적으로 해결하는 것으로, 결과적으로는 일반화된 전체에 정당화를 귀납적으로 추론하고 있다.

셋째, 사각형의 내각의 합과 여러 가지 사각형의 포함 관계를 설명하는 과정에서는 연역 추론을 이용할 뿐만 아니라 명제에 언급되는 대상의 일반성을 언급하고 있다.

넷째, 열거에 의한 귀납은 규칙성을 발견하는 부분과 원주율, 원기둥의 부피와 겉넓이를 지도하는 과정에서 활용되고 있으나 그리 많이 다루어지지 않는다.

다섯째, 다양한 장면에서 구체물이나 그림을 통하여 원리를 설명하는 유추를 활용하고 있다.

결과적으로 초등 수학 교재에서 가장 두드러진 특징은 한 가지 예를 활용하여 지도한다는 점이며, 이 예에 대한 정당화 과정에서 부분적으로 연역 추론을 활용한다는 점이 될 것이다. 또한, 예에 대한 대부분의 경험은 자연수에 대한 것이지만, 직사각형의 둘레나 직육면체의 부피 등과 같은 내용을 지도하는 과정에서는

이 결과를 분수와 소수에 대한 유추로서 활용하고 있다는 점도 지적할 수 있을 것이다. 열거에 의한 귀납은 규칙성을 찾는 것과 관련된 내용 이외에는 그리 많이 이용되지 않고 있다는 점도 알 수 있었다.

본 연구에서 주목하고자 하는 부분은 둘째와 셋째 특징이다. 초등 수학 교재에서는 많은 일반적인 원리를 설명하기 위하여 한 가지 예에 대하여 국소적으로 연역적으로 추론하여 정당화하고 이 결과를 전체 대상에 적용하도록 의도하고 있다. 하지만, 전체 대상에 대한 일반화 과정을 교재에서는 명시적으로 다루고 있지 않으며, 교사나 학생의 개인적인 교수·학습에 따라서 상당히 다양하게 다루어질 수 있는 여지를 남겨 두고 있다. 하지만, 서동엽(1999)의 연구에 참여하였던, 증명을 학습한 중학생들의 반응은 몇 가지 예를 통한 귀납 추론과 증명을 모두 정당한 것으로 받아들이고 전자를 더욱 선호하는 경향이 있다는 것이며, 이는 초등학교에서 주로 경험하였던 귀납적 비약을 동반하는 귀납 추론의 타당성에 대한 의문을 제기하지 못한다는 점을 드러내는 것이기 때문이다. 따라서, 한 가지 예에 대한 국소적인 연역 추론에 근거한 귀납 추론이라는 현행 지도 방법에 대한 심도 있는 논의가 필요한 것으로 보인다.

또한, 사각형에 대한 몇 가지 성질에서 다루는 연역 추론을 통한 일반화 과정은 학생들에게 매우 어렵다는 것이 본 연구자와 면담한 교사들의 반응이었다.[2] 앞의 분석 과정에서 살펴본 바와 같이 사각형에 대한 몇몇 명제는 다른 내용에서 활용되는 추론 방법과는 질적으로 다르며 일반적인 방법을 적용하고 있다는 점에서, 학생들이 어렵게 생각하는 원인을 분석해 볼 필요가 있는 것으로 보인다. 그리고, 열거에 의한 귀납이나 유추를 통한 추론 지도 과정에 대하여 본 연구자와 면담한 교사들이 특별히 지적한 문제점은 없었다. 하지만 무엇보다도 열거에 의한 귀납 추론은 사례가 그리 다양하지 않다는 점에서, 또한 유추를 통한 추론의 대부분은 추론보다는 구체적 조작기 학생들의 특성과 관련된 구체물의 활용 문제와 관련된다는 점에서 본 연구에서는 심도 있는 논의는 하지 않고자 한다.

IV. 추론 지도 과정에 대한 논의

제 III장에서 제 7차 교육 과정에 따른 교과서를 대상으로 추론 과정이 반영되어 있는 방식은 무엇인가라는 관점에서 추론 지도의 실제를 분석해 보았다. 이 장에서는 우리 나라 초등 수학 교과서의 가장 중요한 특징으로 보이는 예를 활용한 지도 문제와 사각형의 성질 지도에서 드러나는 일반성의 문제를 추론 지도에 대한 여러 이론을 바탕으로 논의해 보고자 한다.

1. Miyazaki의 예에 의한 설명

수와 연산 영역 및 도형 영역, 측정 영역에서 지도되는 여러 원리를 정당화하는 과정에서 이용하는 추론 방식은 대부분 한 가지 전형적인 예로부터 국소적인 연역 추론을 활용하는 것이며, 궁극적으로는 이 하나의 예를 이용하여 예가 속하는 전체 대상에 대한 일반성을 주장하고 있다는 점에서 연역 추론이라기보다는 귀납 추론으로 볼 수 있는 방법이다. 이러한

2) 면담은 형식적으로 이루어진 것은 아니었으며, 본 연구자 소속 학교의 교육대학원 수업에 참여 중인 교사들과 함께 자유 토론 형식으로 이루어진 것이다.

지도 방법은 Miyazaki(1991)가 쓰고 있는 용어인 '예에 의한 설명'과 매우 유사한 측면이 있는 것으로 생각된다. 하지만, Miyazaki가 제안한 예에 의한 설명은 4단계로 이루어진다는 점에서 앞서 살펴본 우리 나라의 추론 방법과 일치하는 것으로 보기는 어렵다.

예에 의한 설명은 추측의 구성, 경험적 방법에 의한 추측의 정당화, 일련의 해석 및 조작을 하나의 대응하는 스키마로서 확인하는 것, 그 스키마의 불변성에 대한 확신이라는 4단계로 이루어진다. 우리 교재에서는 5-가 단계에 제시된 직사각형의 둘레의 예에서 본 것처럼, 가로가 5cm이고 세로가 3cm인 특별한 직사각형에 대하여 '이 직사각형의 둘레의 길이를 재어 보아라. 직사각형의 둘레의 길이를 구하는 방법을 말하여 보아라'라는 문장을 통하여 학생들의 활동을 지시한 후에 일반적인 직사각형의 둘레의 길이를 구하는 원리를 제시하고 있다. 따라서, 명시적으로 드러나는 것은 직사각형의 둘레를 구하는 방법을 추측해 보게 하는 '추측의 구성' 단계이며, 처음에 구한 값의 타당성을 확인하는 절차는 필연적으로 따를 것으로 예측된다는 점에서 '경험적 방법에 의한 추측의 정당화' 단계도 포함되어 있는 것으로 볼 수 있을 것이다. 그러나, 스키마를 구성하고 스키마의 불변성을 확인하는 두 단계는 명시적으로 포함되어 있지 않으며, 이러한 단계가 이루어지는가의 문제는 교사나 학생에 맡겨져 있는 것으로 볼 수 있다. 하지만, 이 두 단계는 이루어지지 않는 것으로 보는 것이 일반적인 경우일 것 같다. 이렇게 보는 이유는, 많은 초등학교 교사들이 호소하는 어려움 중에는 상당수의 학생들이 이미 최종 원리를 암기한 상태에서 수업에 임하기 때문에 원리를 유도하는 과정에 큰 흥미를 갖지 못한다는 것이기 때문이다.

이렇듯 대부분의 추론 과정에서 불변성을 명시적으로 다루고 있지 않고 있다는 점에서, 4-가 단계에서 사각형의 네 각의 합을 삼각형 두 개로 나누어 지도하는 내용이나 4-나 단계에서 여러 가지 사각형의 포함 관계를 지도하는 부분은 다소 당혹스럽기까지 하다. 4-가 단계에서 사각형의 네 각의 합을 연역적으로 지도하는 부분에서는 '모든 사각형'에 대한 일반성을 지도하려는 것인지를 명시적으로 드러내고 있지는 않다. 그러나, 사각형 모양의 종이를 오려서 각을 모아 보는 활동 다음에 이러한 추론으로 정당화하는 내용이 다시 도입된다는 점에서 어느 정도는 일반적인 방법을 지도하려는 의도가 있는 것으로 보이며, 일반성의 문제는 전적으로 교사와 학생에게 맡겨져 있는 상태이다.

이러한 일반성은 중학교에서도 명시적으로 언급되고 있지는 않은 것으로 보인다. 중학교에서 증명을 도입한 이후에 제시되는 명제는 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다'와 같은 것으로, '모든 이등변삼각형'임을 명시적으로 제시하지는 않기 때문이다. 또한, 서동엽(1999)의 연구에 참여한 중학교 2학년 및 3학년 학생들 중 상당수는 이러한 일반성을 인식하지 못하고 있었다. 보조 그림을 이용하여 명제를 증명하는 과정에 대하여, 이 증명 역시 하나의 그림에 대한 특수한 논의일 뿐이라는 반응을 보인 학생들이 상당 수 있었으며, 측정을 통한 경험적 정당화와 연역 추론을 이용한 수학적 증명의 차이를 바르게 인식하고 있는 학생은 극소수였다. 이러한 점에 비추어본다면, 초등학생들이 사각형의 내각의 합에 대한 문장에 내포되어 있는 일반성을 이해하기를 기대하기는 매우 어려움을 알 수 있다.

그리고, 4-나 단계에서 도입되는 여러 가지 사각형의 포함 관계는 일반적일 수밖에 없는 내용이다. 이에 대하여 본 연구자와 면담한 교사들은 사각형 단원에서 여러 가지 사각형의

포함 관계를 이해하는 초등학생들이 거의 없음을 지적하였다. P 교사는, 교재의 내용 중 가장 먼저 제시되는 사다리꼴과 평행사변형의 포함 관계에 대하여 다양한 예를 계속 제시함으로써 많은 학생들에게 이 포함 관계를 이해시킬 수 있었다고 한다. 하지만, 평행사변형과 마름모의 포함 관계를 이해시키기는 매우 어려웠으며, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모의 전반적인 포함 관계를 이해하는 학생은 거의 없었다고 한다. 또한, H 교사는 학생들이 '평행사변형은 사다리꼴이다'와 같은 표현을 이해하는 데 큰 어려움이 있음을 지적하였다. 'A는 B이다'와 같은 표현은 다양하게 이용되는 바, 포함 관계를 의미하는 경우로는 '무궁화는 꽃이다'와 같은 예를 들 수 있다. 하지만, 학생들은 평행사변형이나 사다리꼴의 개념을 처음 접하기 때문에 둘 다 사각형이라는 점은 이해하지만 곧바로 새로운 두 개념간의 포함 관계를 받아들이는 데에는 어려움이 있다는 것이다. 이러한 포함 관계의 지도 문제를 Piaget의 인지 발달 이론과 관련하여 이어지는 절에서 논의해 보고자 한다.

2. Piaget의 인지 발달 이론

*Piaget*의 인지 발달 단계 이론에 따르면 우리나라의 초등 학교 학생들은 구체적 조작기에 속하며, 제 III장에서 살펴본 바와 같이 대부분의 지도 내용은 구체물이나 그림과 연관되어 있다. 하지만, '평행사변형은 사다리꼴이다'와 같이 일반적인 포함 관계를 의미하는 명제에 대해서는 좀 더 논의할 여지가 있는 것으로 보인다. 앞에서 언급한 바와 같이 교과서에 제시된 설명은 '평행사변형은 마주 보는 두 쌍의 변이 평행이므로 사다리꼴임을 알 수 있습니다'라는 것으로, 이는 순수히 언어명제적인 조작이며 Piaget의 이론에 따른다면 형식적 조작기에서 가능한 조작이다. 본 연구자와 면담한 교사들의 지적과 같이 이러한 설명을 대부분의 아동들이 이해하지 못하며, 많은 예를 통하여 설명했을 때 이해하는 아동이 생기는 것으로 보아 Piaget의 해석과 아동들의 반응은 일치하는 것으로 볼 수 있다.

그러나, 앞에서 언급한 P 교사가 이용한 것과 같이 평행사변형의 예를 들었을 때 그것이 모두 사다리꼴임을 확인하여 '평행사변형은 사다리꼴'임을 보여 주는 귀납 추론 방식은 다소간의 위험성을 지니고 있다. 그것은 동일한 예를 제시하는 상황으로부터 '사다리꼴은 평행사변형'이라고 주장할 수도 있기 때문이다. 여러 가지 원리를 설명하면서 전형적인 한 두 가지의 예를 이용해 왔던 경험에 비추어 보면, 이러한 상황은 충분히 가능할 수 있는 것이다. 여기서, '사다리꼴은 평행사변형'임을 설명하기 위하여 고려해볼 수 있는 두 가지 방법이 있다.

첫 번째 방법은 유목 관계를 이용하여 설명하는 방법이다. 다양한 예시 상황을 통하여 사다리꼴에는 평행사변형인 사다리꼴과 평행사변형이 아닌 사다리꼴이 있음을 이해시키는 것이다. 그리고, 평행사변형에는 마름모인 평행사변형과 마름모가 아닌 평행사변형이 있음을, 또는 직사각형인 평행사변형과 직사각형이 아닌 평행사변형이 있음을 이해시킬 수 있을 것이다. Inhelder와 Piaget(1958)에 따르면 구체적 조작기의 아동들은 유목에 관한 군성체를 먼저 형성하게 되는 바, A라는 하위 유목과 B라는 상위 유목이 있고, B 중 A가 아닌 것을 A'으로 나타낼 때, A + A' = B임을 이해할 수 있다고 한다. 따라서, 위의 명제를 설명하는 것이 가능할 수도 있을 것이다. 그러나, Inhelder와 Piaget는 구체적 조작기의 유목에 관한 군성체는 초기에는 인접한 조작의 합성만이 가능함을

지적하고 있는 바, 평행사변형이 사다리꼴임을 이해하고, 마름모가 평행사변형임을 이해할 수는 있지만 마름모가 사다리꼴임을 이해하는 것은 어려울 수도 있다는 점에 주목할 필요가 있다. 이 점에서 P 교사가 다양한 예를 통하여 '평행사변형이 사다리꼴'인 것은 많은 아동들이 이해하게 할 수 있었지만, 그 이상은 어려웠다는 지적을 해석해 볼 수 있을 것이다. 또한, 사각형의 포함 관계가 어려운 것은 사각형처럼 다양한 하위 유목간의 포함 관계를 볼 수 있는 예가 흔하지 않다는 이유도 작용할 것으로 보인다. '정사각형⊂직사각형⊂평행사변형⊂사다리꼴⊂사각형'과 같은 포함 관계는 '국화⊂꽃⊂식물⊂생물'과 같은 포함 관계와는 심리적으로 느끼는 거리감에서 차이가 있다.

두 번째 방법은 함의 관계를 이용하여 지도하는 방법이다. Inhelder와 Piaget(1958)에 따르면, 구체적 조작기에서 형식적 조작기로 이행하는 결정적 단계는 조합적 체계를 구성하는 것으로, p와 q라는 두 변인이 있을 때 두 변인 사이에 일어날 수 있는 가능한 모든 16가지의 조합을 인식하는 것이다. 이 중에서 '평행사변형은 사다리꼴이다'와 같은 관계는 함의 관계이며, 평행사변형을 p, 사다리꼴을 q로 볼 때, $(p.q) \vee (\sim p.q) \vee (\sim p.\sim q)$인 관계로 나타낼 수 있다. 즉, '평행사변형은 사다리꼴이다'라는 명제를 완전히 이해한다는 것은 '평행사변형이면서 사다리꼴인 도형이 있고, 평행사변형이 아니면서 사다리꼴인 도형이 있고, 평행사변형도 사다리꼴도 아닌 도형이 있다'는 것을 이해하는 것이다. Inhelder와 Piaget(1958)는 구체적 조작기의 초기에는 유목에 관한 군성체만이 형성되며, 말기에 두 변인 p와 q에 대하여 $p.q$, $\sim p.q$, $p \vee \sim q$, $\sim p.\sim q$라는 기본적인 연합을 이루는 승법적 군성체를 구성하게 된다고 지적하고 있는 바, 이 역시 4학년 정도에서는 쉽지 않을 것으로 생각된다.

V. 결론 및 제언 : 추론 지도의 수준

지금까지의 논의를 통하여 우리 나라의 초등수학 교재에서 정당화와 문제 해결 과정에서 이용하고 있는 추론의 실제를 분석하였다. 분석한 주요 내용은 첫째, 한 가지 예로부터 일반적인 원리를 설명하는 방법이 주를 이루고 있다, 둘째, 이러한 방법으로부터 추론 방법의 일반성, 나아가 설명되는 원리의 일반성을 명시적으로 지도하고 있지는 않다, 셋째, 사각형에 대한 내용에서 시도되고 있는 일반성의 지도는 여러 이론에 비추어 보아 지도하기 어렵다는 세 가지를 들 수 있다. 서동엽(1999)의 연구에서 드러난 바와 같이 수학적 증명을 학습한 상당수의 중학생들조차도 명제의 일반성을 인식하지는 못한다는 점에서, 이러한 추론의 일반성을 보다 점진적으로 지도할 수 있는 방안을 모색해 보는 일이 자연스러워 보인다.

Miyazaki(1991)가 제시한 '예에 의한 설명'은 궁극적으로 실제적인 설명과 연역적인 설명의 중간 단계로서 기능하면서, 추측의 일반성을 함께 보여주는 설명을 말하는 것이었음을 상기해 보자. 이처럼 학생들에 대한 추론의 지도는 일련의 단계를 따라 이루어진다고 보는 것이 적절할 것 같다. Hoyles(1996)에 의하면 학생들의 증명에 대한 이해는 어떤 계층을 따라서 조직된다고 보는 것이 일반적 입장이며, 가장 낮은 수준은 행동에 의한 경험적 '증명'이나 절차적 정당화이고, 가장 높은 수준은 전제와 여러 성질에 근거한 엄밀한 연역적 논증이나 관계적 정당화라고 한다. 또한, Semadeni(1984)는

다음과 같이 '활동 증명'의 단계를 제안하고 있다.

1단계 : S의 특별한 경우를 선택하여라. 그 경우는 (특별한 특징이 없다는 점에서) 포괄적이어야 하며, 너무 복잡해도 너무 단순해도 안 된다(자명한 예는 나중에 일반화시키기가 특히 어렵다). 그 경우에 대한 활동적이거나 영상적인 표현이나 범례적인 예를 선택하여라. 어떤 구체적이고 신체적인 활동(대상을 조작해보고 그림을 그리고 몸을 움직이는 것 등)을 수행하여 주어진 경우에 그 진술을 입증하여라.
2단계 : 일반적인 양식은 불변인 채 보존되지만 관련된 상수를 바꾸어가면서 다른 여러 가지 예를 선택하여라. 각 경우에 1단계에서와 같은 방법을 이용하면서 그 명제를 입증하여라.
3단계 : 더 이상 신체적인 활동을 필요로 하지 않을 때, 다른 많은 예에 대해서도 똑같은 것을 하는 방법을 안다는 확신이 들 때까지 그 방법을 계속해서 마음 속에서 수행하여라.
4단계 : 그러한 방법이 적용되는 경우를 분류해 보려고 시도하여라.

이러한 4단계에 비추어 본다면, 현재 우리 나라 초등학교에서 다루는 추론 지도 방법은 1단계에 머물러 있는 것으로 볼 수 있으며, 2단계 이후의 내용은 다루어지지 않고 있는 것으로 볼 수 있다. 세 가지 문제 상황을 주고서 단계적인 문제를 통하여 5학년 학생들의 추론 능력을 조사한 라병소 외(2002)의 연구에서는 50% 이상의 아동들이 단계적인 활동을 통하여 주어진 문제로부터 추론하는 과정에서 일련의 스키마를 구성해 가고 있으며, 10% 정도의 학생들은 상당한 정도의 관계적 추론을 하고 있음을 보여 주고 있다. 이런 점에서 초등학교에서 추론 지도 수준을 점진적으로 높이는 방안을 생각해 보는 일은 의미가 있다고 할 것이다.

위에서 언급한 여러 연구로부터 우리 나라의 초등 수학 교재에서 다루고 있는 '전형적인 예에 대한 경험적 정당화'는 추론 지도의 첫 번째 수준임을 알 수 있다. 그리고, 다음 수준의 활동으로서 '전형적인 예에 대한 경험으로부터 추측의 구성'을 제안하고자 한다. NCTM(2000)에서는 추론과 증명에서 학생들이 필수적으로 학습할 내용으로서 다음의 네 가지를 제시하고 있다.

· 추론과 증명이 수학의 근본적인 측면임을 인식하는 것.
· 수학적인 추측을 만들고 조사하는 것.
· 수학적 논의나 증명을 전개하고 평가하는 것.
· 다양한 추론 유형과 증명 방법을 선택하고 이용하는 것.

이렇듯 추측을 만들고 타당성을 조사하는 활동은 Lakatos(1991)의 준경험주의 수리철학관에 기초한 수학교육 원리에서 중요하게 다루어지는 부분이기도 하며, 현재 우리 나라의 교과서에서도 문제 상황을 통하여 원리를 추측하게 하고 있음을 알 수 있었다.

그리고, 우리 나라에서는 전반적으로 다루어지고 있지 않지만 다음 수준에서 이루어져야 할 활동으로서 '다양한 예에 대한 추측의 타당성 조사'가 필요한 것으로 보인다. 우리 나라의 교과서에서는 원주율을 구하는 부분을 제외하고는 그리 다양한 예를 활용하지 않고 있음을 알 수 있었으며, 이러한 점에서 다른 내용에 대한 추론 과정에서도 보다 다양한 예를 다루는 일이 필요할 것으로 생각된다. 또한, 보다 다양한 예를 다루는 것이 좋다는 점은 Dienes (1960)가 주창한 '수학적 다양성의 원리'에 의해서도 지지된다. 그리고, 이렇게 타당성을 조사하는 과정은 '일반성에 대한 스키마 형성'과 자연스럽게 관련되는 것으로 보이므로 이를 다음 수준으로 볼 수 있을 것이다.

경험으로부터 스키마를 형성하였다면 다음 수준의 활동은 경험을 초월하는 '함의 관계의 이해를 위한 기초 경험'을 제시할 수 있다. Inhelder와 Piaget(1958)의 연구에 의하면 이는 형식적 조작기에 해당하는 중학교 단계에서 가능한 일이 되겠지만, 함의 관계의 가장 간단한 형식으로서 $p = p.q$를 제시하고 있는 바, 이를 적용해 볼 수 있을 것으로 생각된다. 즉, '평행사변형은 사다리꼴이다'라는 명제와 관련짓는다면 평행사변형인 것은 평행사변형이면서 사다리꼴인 것과 같다는 것을 인식시켜주는 것이 될 것이다. Inhelder와 Piaget(1958)는 구체적 조작기의 말기에 있는 아동들은 승법적 군성체를 구성하는 일이 가능함을 지적하고 있으므로 '평행사변형이면서 사다리꼴인 도형'과 같은 존재를 생각해 보게 하는 일은 시도할만한 것으로 생각된다. 더욱이 우리 나라의 교과서에서도 '동전 한 개와 주사위 한 개를 동시에 던질 때 나오는 경우의 수'와 같은 승법적 군성체가 관련되는 개념을 6-나 단계에서 다루고 있다(교육인적자원부, 2002d). 이는 경우의 수에 국한되어 지도되고 있기는 하지만, 이와 연결하여 함의 관계의 기초를 형성하는 것을 시도해 볼 수 있는 것으로 생각된다.

수학이 다른 학문과 구분되는 중요한 특징의 하나는 일반적인 명제를 다룬다는 것이며, 주어진 명제의 일반성을 연역 추론에 기초한 수학적 증명 방법으로 정당화한다는 점이다. 하지만, 초등 수학 교재에서 다루어지는 정당화 과정에서는 대부분 이러한 일반성으로 명시적으로 다루지 않고 있거나, 사각형에 대한 내용에서와 같이 다소 급작스럽게 일반적인 명제를 다루어 학생들의 어려움을 유발하고 있다는 점이 문제점으로 부각되고 있다. 이와 더불어 수학적 증명을 학습한 상당수의 중학생들조차도 이러한 일반성의 개념이 부족하다는 점은 보다 점진적인 추론 지도의 필요성을 제기하는 것으로 보인다. 물론, 중학생조차 이해하지 못하는 일반성을 초등학생이 이해할 수 있느냐고 생각하는 일도 가능할 것이다. 하지만, 라병소 외(2002)의 연구에서는 초등학생들도 적절한 문제 상황이나 교수·학습 기회가 주어진다면 상당한 수준에서 일반성을 파악할 수 있음을 보여주고 있다. 이 점에서 본 연구에서는 현재 초등학교에서 다루어지고 있는 추론 지도의 수준을 점진적으로 높여볼 필요가 있다고 보는 것이다.

본 연구자는 초등학교에서 지도할 수 있을 것으로 보는 추론 지도의 점진적인 수준으로서 전형적인 예에 대한 경험적 정당화 수준, 전형적인 예에 대한 경험으로부터 추측의 구성 수준, 다양한 예에 대한 추측의 타당성 조사 수준, 일반성에 대한 스키마 형성 수준, 함의 관계의 이해를 위한 기초 경험 수준의 다섯 가지를 제안하였다. 이러한 수준이 실제로 점진적으로 배열된 것인지에 대한 후속 연구가 필요할 것으로 보인다. 나아가 어느 정도 수준의 활동이 어느 정도의 학년 단계에서 적절한지를 살펴보는 후속 연구도 필요할 것이라 생각된다. 또한, 이렇게 점진적으로 추론을 지도하고 일반성을 인식시키는 일이 중학교에서 학습하게 되는 수학적 증명을 위한 기초로서 긍정적으로 기여할 수 있는지의 문제도 검증이 필요할 것으로 보인다.

참고문헌

교육인적자원부(2000a). **수학 1-가**. 서울 : 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2000b). **수학 1-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2000c). **수학 2-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2000d). **수학 2-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2001a). **수학 3-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2001b). **수학 3-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2001c). **수학 4-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2001d). **수학 4-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2002a). **수학 5-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2002b). **수학 5-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2002d). **수학 6-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

나귀수(1998). **증명의 본질과 지도 실제의 분석 - 중학교 기하 단원을 중심으로 -**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

라병소 · 신경자 · 신준식 · 서동엽(2002). 초등학생들의 형식적 추론 능력에 관한 연구. **수학교육**, 41(3), 291-318.

류성림(1998). **피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

서동엽(1999). **증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 : 중학교 수학을 중심으로**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

우정호(1994). 증명 지도의 재음미. **대한수학교육학회 논문집**, 4(1), 3-24.

우정호(1998). **학교 수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판부.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교출판부.

Dienes, Z. P.(1960). *Building up Mathematics*. Hutchinson Educational.

English, L. D. (1999). Reasoning by analogy: a fundamental process in children's mathematical learning. In NCTM(Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*, 22-36. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Garnier, R., & Taylor, J. (1996). *100% Mathematical Proof*. Chichester: John Wiley & Sons.

Hamming, R. W. (1980). The unreasonable effectives of mathematics. *The American Mathematical Monthly, 87*, 81-90.

Hoyles, C. (1996). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 7-16.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The Growth of Logical Thinking: from childhood to adolescence*. A. Parsons & S. Milgram (Trans.). London: Routledge & Kegan Paul Ltd.

Lakatos, I .(1991). **수학적 발견의 논리**. (우정호, 역). 서울: 민음사.

Miyazaki, M. (1991). The explanation by 'example' - for establishing the generality of conjectures. In Fulvia Furin ghetti(Ed.). *Proceedings of Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematical Education, III*, 9-16.

Movshovits-Hadar, N. (1988). Stimulating presentation of theorems followed by responsive proofs. *For the Learning of Mathematics, 8*(2), 12-20.

NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National

Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1986). **어떻게 문제를 풀 것인가.** (우정호, 역). 서울 : 천재교육.

Zbigniew, S. (1984). Action proof in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics*, *4*(1). 32-34.

Thom, R. (1986). 'Modern' mathematics: an educational and philosophic error. In T. Tymochko(Ed.). *New Directions in the Philosophy of Mathematics* (pp.67-78). Birkh- äuser: Birkhäuser Boston Inc.

Analyses on the reasoning in primary mathematics textbooks

Seo, Dong Yeop (Chuncheon National University of Education)

This study analyzes on the reasoning in the process of justification and mathematical problem solving in our primary mathematics textbooks. In our analyses, we found that the inductive reasoning based on the paradimatic example whose justification is founnded on a local deductive reasoning is the most impo- rtant characteristics in our textbooks. We also found that some propositions on the properties of various quadrangles impose a deductive reasoning on primary students, which is very difficult to them. The inductive reasoning based on enumeration is used in a few cases, and analogies based on the similarity between the mathematical structures and the concrete materials are frequntly found. The exposition based on a paradigmatic example, which is the most important characteristics, have a problematic aspect that the level of reasoning is relatively low in Miyazaki's or Semadeni's respects. And some propositions on quadrangles is very difficult in Piagetian respects. As a result of our study, we propose that the level of reasoning in primary mathematics is leveled up by degrees, and the increasing levels are following: empirical justification on a paradigmatic example, construction of conjecture based on the example, examination on the various examples of the conjecture's validity, construction of schema on the generality, basic experiences for the relation of implication.

핵심어 : deductive reasoning(연역 추론), generality(일반성), inductive reasoning(귀납 추론), level of reasoning(추론의 수준), paradigmatic example(전형적인 예)