

수문선형계 핵 동정법(1)

Kernel identification methods of hydrologic linear system



김재한

교수, 충남대학교 토목공학과
kjh@cnu.ac.kr

1. 서론

입력(input)된 어떤 형태를 가진 자연현상이 설명 질량은 그대로 유지되고 있다고 하더라도, 입력된 형태가 변환되지 않고 똑같은 모양으로 출력되는 경우는 거의 없다. 계분석(system analysis)이란 입력된 어떤 경우의 사상에 대해서 대응되는 출력의 변화성을 논해주는 것을 일컫는다. 이와 같은 입력과 출력 관계에 대하여 선형성(linearity: superposition) 및 비선형성(non-linearity)으로 논해줄 수 있으나, 여기서는 내용의 분량상 선형성에 국한하기로 한다. 선형계 이론은 Gabel과 Roberts(1973), Liu와 Liu(1975) 등의 교재에서 쉽게 이해될 수 있다.

수문학에서 계분석의 한 예로, 입력이 강우(rainfall)이고 출력이 유출(runoff)인 경우를 생각해 볼 수 있다. 유역 상에 발생하는 호우로부터 하천유출 예측문제는 응용수문학의 주요한 요소 중의 하나이다. 홍수예경보는 인명과 재산을 보호하고, 그 침투치는 방재공학적인 면에서 댐·하천 등과 같은 수공구조물 설계에 필수적인 항목이 된다. 이와 같은 침투치는 확률론적인 해석이 요구되고, 이에 대한 보다 정확한 의사결정(decision making)은 구조물의 안정성뿐만 아니라, 경제적인 측면에서도 절실히 요구되는 사항이 된다. 이를 위하여, 강우로부터 유출현상이 보다 정확하게 추정되어져야 함은 당연하다.

실제적으로, 강우-유출 문제는 여러 가지 복잡한 물리적 현상들과 이를 규명할 수 있는 자료결핍 때문에 가끔 현상학적 관점(phenomenological point of

view)으로 간주된다. 이는, 물리계의 내적 구조들에 대한 상세한 처리보다, 유역의 입력(강우)에서 출력(유출)으로의 변환과정을 하나의 집합된(lumped) black-box계로 취급하는 것을 의미한다. 이에 대한 대표적 예로 Sherman(1932)의 단위(유량)도를 들 수 있다. Sherman의 단위도 이론은 근본적으로 유역변환 계를 선형성으로 간주하여 시불변(time-invariant) 및 일정기저시간(constant time base)으로 가정한 것이다. 이와 같은 가정은 유역과 같은 자연현상이 고유적으로 비선형성을 내포하기 때문에 상당한 무리가 예상되나, 실제 적용면에서 근사성을 보여주고 있다고 알려져 있다(Liu와 Brutsaert, 1978).

본 저자(1985)에 의하여 이미 한국수자원학회 전신인 한국수문학회의 회지[18(2), 18(3), 18(4)]에 서론적인 내용들은 상술되어 있으므로 여기서는 생략한다.

2. 선형응답핵의 동정법

계의 응답핵의 동정(identification of response kernel)은 입력 $x(t)$ 와 출력 $y(t)$ 의 관측치로부터 식 (2.1)과 같은 회선적분(convolution integral)의 중첩원리에 의하여 결정할 수 있다.

$$y(t) = \int_0^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (2.1)$$

(단 $h(\tau) = 0; \tau < 0$)

식 (2.1)을 이산형으로 나타내면 식 (2.2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$y_i = \sum_{j=1}^i h_j x_{i-j+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

실제의 강우량이나 유출량 자료는 시간단위, 일단위 등의 이산량으로 주어지기 때문에 식 (2.2)와 같은 선형대수형이 통상적으로 사용되고 있다.

지금부터 식 (2.1)과 (2.2)의 핵을 구하는 방법에 대하여 논하고자 한다. 핵을 구하는 방법으로는, 일반적으로 직교함수(orthogonal functions), 변환법(transform method) 및 직접해법(direct method analysis) 등이 있는 것으로 알려져 있다(Blank, 1968).

2.1 다항식 해법

강우와 유출계는 미분방정식으로 나타낼 수 있음이 잘 알려져 왔다. 이들의 해석을 위하여 지금까지

수많은 학자들(Singh, 1988)의 연구가 수행되어졌다. 이들은 강우와 유출의 수문계를 선형이론과 비선형이론으로 대별하여 논하고 있으나, 강우-유출계는 고유적으로 비선형계임이 잘 알려져 있다.

이와 같은 이유는, 실제 주어진 시간별 강우가 연속이든 불연속이든 완전히 중첩적(superposition)으로 이루어질 수 없기 때문이다. 즉, 물의 순환(hydrologic cycle) 과정들이 무수히 많은 물리계(physical system)인 부계(subsystem)와 동시에 중첩될 수 없을 정도의 각각 고유의 특성을 지니고 작동하기 때문에 선형계의 해석은 원칙적으로 무리가 있다. 그러나 지금까지 호우와 유출관계를 선형이론에 많이 의존하고 있는 이유는, 해석이 비선형론에 비하여 수월할 뿐만 아니라, 그 결과치들을 서론에서도 언급된 바와 같이 실제적용 상에 상당히 근접시킬 수 있기 때문이다(Liu와 Brutsaert, 1978).

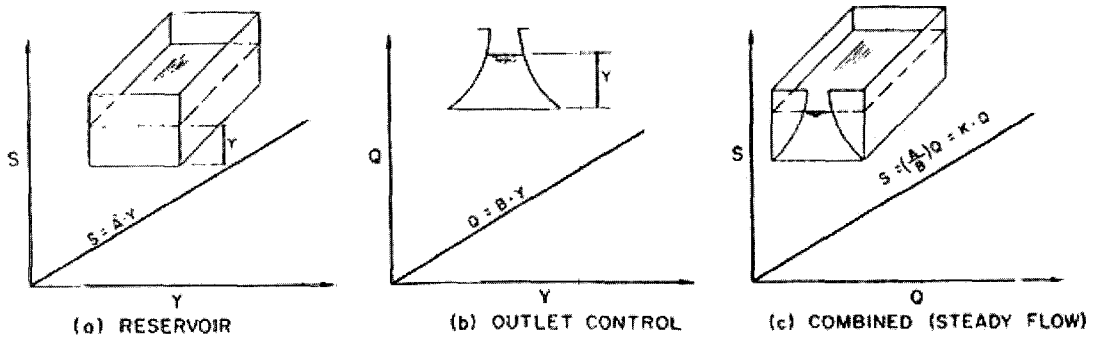


그림 2.1 물리적 개념 - 선형계

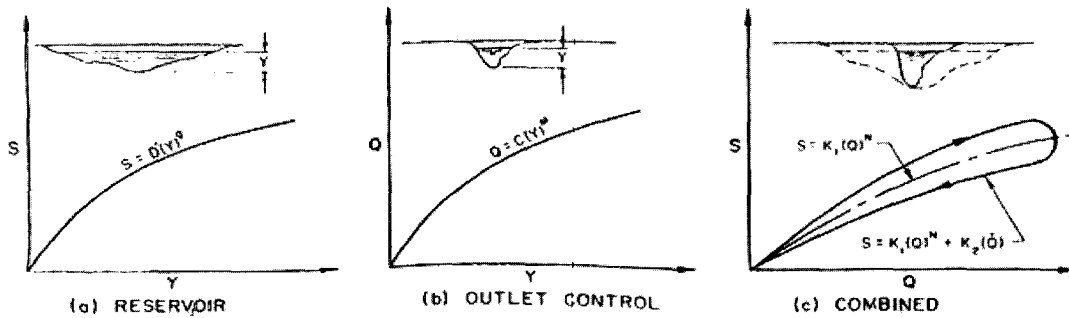


그림 2.2 물리적 개념 - 비선형계

Prasad(1967)는 저류와 유출관계를 아래 그림 2.1과 2.2와 같이 제시하여 비선형계의 강우-유출모형을 유도한 바 있다.

그림 2.1과 2.2에서 S는 저류량, Y는 수심, Q는 유출량을 각각 표시하고, K, N은 매개변수를 나타낸다. 또한 A, B, D' 및 g는 상수를 뜻한다.

이와 같은 미분계의 해에 대하여, 선형저수지모형이 대표적으로 Zoch(1934, 1936, 1937)에 의하여 소개된 바 있다.

선형저수지의 저류량과 유출량의 관계는 식 (2.3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$S = KQ \quad (2.3)$$

여기서, K는 저류상수를 말하며, 시간의 차수를 갖는다. 식 (2.3)과 유입량 $I(t)$ 와 함께 연속방정식의 개념을 도입하면, 식 (2.4)와 같이 비제차 일계 선형 미분 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$K \frac{dQ}{dt} + Q = I(t) \quad (2.4)$$

식 (2.4)를 풀기 위하여, 델타(delta)함수 표기법을 적용(Newland, 1975)하면, 식 (2.5)와 같이 순간적인 단위체적에 대한 유출량 u 를 얻을 수 있다.

$$u(0, t) = \frac{1}{K} e^{-uK} \quad (2.5)$$

식 (2.5)의 개념을 이용하여, 일련의 동등한 선형저수지(n identical linear reservoirs in series) 개념을 Nash(1957)가, 일련의 선형저수지에 수로의 전이작용(translatory action)을 고려한 선형수로(linear channel)의 개념을 적용한 Dooge(1959)가 순간단위도를 개발한 바 있다.

이 개념들은 지금까지도 널리 적용되고 있다(Fredericks와 Labadie, 1995). 저류방정식 모형에 대한 최적화 기법들의 수치해와 급수에 의한 근사해법을 日野(1975)가 소개한 바 있다. 식 (2.3)과 (2.4)의 저류방정식법(storage equation method)에 대해서는 3

장에서 상세히 설명하기로 한다.

상기 언급한 바와 같이, 미분 방정식은 다항식에 의하여 그 해를 얻을 수 있다. 이들의 적용에는 여러 고등수학의 교재들(Wylie와 Barrett, 1982)에 의해서 쉽게 찾아 볼 수 있으며, 여기서는 Dooge(1973)가 소개한 바 있는 직교(orthogonal) 다항식에 대하여 그 예로써 기술한다.

$g_0(t), g_1(t), \dots, g_m(t), \dots$ 의 함수들의 조합이 구간 $a < t < b$ 상에서 양(positive)의 가중함수 $\omega(t)$ 에 관하여 식 (2.6a)와 (2.6b)와 같은 관계가 성립된다면 직교한다고 일컫는다.

$$\int_a^b \omega(t) g_m(t) g_n(t) dt = 0, m \neq n \quad (2.6a)$$

$$\int_a^b \omega(t) g_m(t) g_n(t) dt = \gamma_n (\neq 0), m=n \quad (2.6b)$$

여기서, 표준화 계수 γ_n 는 n 의 값에만 의존하는 상수이다. 상기 식 (2.6a)와 (2.6b)는 식 (2.6c)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_a^b \omega(t) g_m(t) g_n(t) dt = \gamma_n \delta_{mn} \quad (2.6c)$$

식 (2.6c)에서 δ_{mn} 는 크로네커 델타(Kronecker delta)이며, $m=n$ 이면 1의 값을, 그렇지 않으면 0의 값을 가진다.

식 (2.6)에서 나타낸 바와 같이, 만약 완전한 직교함수들로 조합된 함수 $f(t)$ 를 식 (2.7)과 같이 다항식으로 전개한다면,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g_k(t) \quad (2.7)$$

식 (2.7)의 양변에 $g_n(t)$ 를 곱하여 a, b 구간 상에 적분을 하면 식 (2.8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) g_n(t) dt &= c_0 \int_a^b g_0(t) g_n(t) dt \\ &+ c_1 \int_a^b g_1(t) g_n(t) dt \\ &+ \dots + c_n \int_a^b g_n^2(t) dt + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

직교함수의 조합 $\{g_n(t)\}$ 의 성질에 따르면 식 (2.9)

와 같이 됨은 이미 잘 알려져 있다(Wylie와 Barrett, 1982).

$$\int_a^b g_n^2(t) dt = 1 \quad (2.9)$$

식 (2.9)에서 은 모든 값을 취할 수 있다.

따라서, 직교의 성질로부터 식 (2.8)의 $a_n \int_a^b g_n^2(t) dt$ 를 제외하고는 오른편 항들은 모두 0의 값을 가진다. 이들의 관계로부터 계수 c_k 는 식 (2.10)과 같이 됨을 알 수 있다.

$$c_k = \frac{\int_a^b g_n(t) f(t) dt}{\int_a^b g_n^2(t) dt} = \int_a^b f(t) g_n(t) dt \quad (2.10)$$

직교함수들의 미분방정식의 적용 예는 일반 고등수학의 교재들(Wylie와 Barrett, 1982)에 의하여 제시되어 있으므로 여기서는 생략한다. 수문학에서 직교다항식의 예를 Amorocho와 Brandstetter(1971)와 Papazafiriou(1975) 등에서 쉽게 찾아 볼 수 있다.

여기서는, Papazafiriou(1975)가 시도한 직교다항식의 적용 예를 제시한다. 유한 기억(finite memory)을 가진 계에 대하여, 식 (2.1)의 회선적분은 식 (2.11)과 같은 이산형으로 나타낼 수 있다.

$$Y(t) = \sum_{\tau=0}^M h(\tau)x(t-\tau) \quad (2.11)$$

식 (2.11)에서 $h(t)$ 와 $x(t)$ 는 핵함수와 입력을 각각 뜻한다. 여기서, 식 (2.7)의 직교다항식들의 조합을 $Q = [P_n(x), n=1, 2, \dots, N]$ 로 주어진다면, 식 (2.11)의 핵함수는 식 (2.12)와 같이 근사화할 수 있다.

$$h(\tau) = \sum_{n=1}^N a_n P_n(\tau) \quad (2.12)$$

유한구간상에서 직교다항식 조합들은 핵함수의 전개를 위하여 사용될 수 있다. Papazafiriou(1975)는 고전적 Chebyshev 다항식과 Householder와 Stiefel에 의하여 소개된 직교다항식 및 Forsythe에 의하여 분석된 다항식을 사용하여 핵함수를 얻었다.

Chebyshev 다항식은 세항의 반복관계(recurrence

relation)에 의하여 식 (2.13)과 같이 된다(Kuo, 1972).

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), T_0 = 1, T_1(t) = t \quad (2.13)$$

만약 $t_k = \cos(k\pi/n)$ 이면, Chebyshev 다항식은 유한구간 $k = 0, 1, \dots, N$ 상에서 승적에 관하여 직교이다.

$$\sum_{k=0}^N T_m(t_k)T_n(t_k) = \begin{cases} 0; m \neq n, N/2; m=n \neq 0 \\ \text{또는 } N, N; m=n=0 \\ \text{또는 } N \end{cases} \quad (2.14)$$

식 (2.14)에서 이중 프라임(double prime)은 급수의 첫 항과 관계를 뜻한다.

Stiefel에 의하여 제시된 다항식은 유한구간상에서 직교이며, 세 항의 반복관계에 의하여 이루어진다.

$$\begin{aligned} S_{n+1}(t) &= [(t-a_{n+1})S_n(t) - b_n S_{n-1}(t)]\omega^2(t), \\ S_0(t) &= \omega^2(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

식 (2.15)에서 $\omega^2(t)$ 는 가중함수를 뜻한다. 계수 a_{n+1} 과 b_n 은 식 (2.8)의 원리에 의하여 식 (2.14)로부터 전개한 후 a_{n+1} 과 b_n 에 관하여 연립적으로 풀면 식 (2.16a)와 (2.16b)과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i S_n^2(t_i) \omega^2(t_i)}{\sum_{i=1}^N S_n^2(t_i) \omega^2(t_i)} \quad (2.16a)$$

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^N t_i S_n(t_i) S_{n-1}(t_i) \omega^2(t_i)}{\sum_{i=1}^N S_{n-1}^2(t_i) \omega^2(t_i)} \quad (2.16b)$$

Papazafiriou(1975)는 그의 박사학위논문(1973)에서 단위가중 직교다항식을 수문학적 문제들의 해를 위하여 사용한 적이 있으며, 식 (2.7)의 $f(t)$ 에 해당되는 식 (2.12)의 $P_n(t)$ 가 단위가중 직교다항식이나 Chebyshev 다항식임을 밝히 바 있다. 식 (2.12)의 오른편을 식 (2.11)에 대입하면 식 (2.17)를 얻을 수 있다.

$$Y(t) = \sum_{\tau=1}^M \sum_{n=0}^M a_n p_n(\tau) x(t-\tau) \quad (2.17)$$

식 (2.17)에서 M 은 계의 유한 기억길이이며, N 은 핵의 다항식 전개 급수의 최고차치를 뜻한다.

$$Y(t) = \sum_{n=0}^N a_n \sum_{\tau=1}^M p_n(\tau) x(t-\tau) \quad (2.18)$$

간편하게 하기 위하여

$$C_n(t) = \sum_{\tau=1}^M p_n(\tau) x(t-\tau) \quad (2.19)$$

와 같이 나타내면,

$$\left. \begin{aligned} Y(t_0) &= a_0 c_0(t_0) + a_1 c_1(t_0) + \dots + a_N c_N(t_0) \\ Y(t_1) &= a_0 c_0(t_1) + a_1 c_1(t_1) + \dots + a_N c_N(t_1) \\ Y(t_2) &= a_0 c_0(t_2) + a_1 c_1(t_2) + \dots + a_N c_N(t_2) \\ &\vdots \\ Y(t_L) &= a_0 c_0(t_L) + a_1 c_1(t_L) + \dots + a_N c_N(t_L) \end{aligned} \right\} (2.20)$$

식 (2.20)에서 L 은 입력자료의 시간길이이다. 식 (2.20)을 매트릭스(matrix) 표기로 나타내면,

$$[C_{k,n}][a_n] = [Y_k], \quad k=0, 1, 2, \dots, L, \quad n=0, 1, 2, \dots, N \quad (2.21)$$

만약 $N = L$ 이면, 계는 미지수와 방정식의 수가 같으므로 선형대수학적으로 풀 수 있다. 일반적으로 N 이 L 보다 적기 때문에, 계는 미정이며, 해를 찾기 위하여 어떤 적절한 방법을 사용하여야 할 것이다.

이를 위하여, 여러 수문학자들(Bidwell, 1971; Amorocho와 Brandstetter, 1971; Zand와 Harder, 1973)은 이와 같은 문제를 푸는데 순, 다중 및 축차 다중회귀법(Pure, multiple and step-wise multiple regression)을 사용한 바 있다. 핵을 얻는데 Chebyshev 다항식의 사용은 Papazafiriou(1975) 외에도 Liu와 Brutsaert(1978) 및 김재한(1981) 등에서 찾아볼 수 있다.

2.2 변환법

일반적으로, 유출의 지속기간이 단위도의 기저시간보다 길어지면 식 (2.2)로부터 연립방정식을 만들어 이론적으로는 해를 얻을 수 있다. 그러나 실제 계산상 해가 주어지지 않거나, 설령 해를 얻었다고 해도 물리계에서 비현실적인 음의 종거를 얻게 된다. 이와 같은 이유는, 유역변화계가 강한 비선형일 경우에 기인될 경우라든지, 각종 인위적 및 기계적 오차를 내포하는 관측치에도 영향을 받기 때문이다. 이를 위하여 Fourier나 Laplace 변환법(transform method) 등이 많이 이용되고 있다(O' Donnel, 1960; Diskin, 1964; Blank, 1968; Delleur와 Rao, 1971; Blank, Delleur와 Giorgini, 1971; 日野, 1983).

Fourier 변환은 식 (2.22)와 (2.23)과 같이 정의된다.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.22)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.23)$$

식 (2.22)와 (2.23)에서 i 는 허수단위($\sqrt{-1}$)이며, ω 는 각주파수(angular frequency, 단위: radian/unit time)로서 $2\pi f$ (f : 주파수)의 값을 가진다. Dirichlet의 조건을 실행하기 위하여 $F(\omega)$ 의 존재가 요구되어진다. 예를 들면, $f(t)$ 는 아무리 많아도 유한수의 불연속값을 가지므로 유한수의 최대와 최소치를 가진다. 또한, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ 의 성질을 내포함으로써 절대적으로 적분이 가능하여야 한다.

상기 Fourier 변환을 식 (2.1)의 회선적분에 적용시키면 식 (2.24) 또는 식 (2.25)의 결과를 얻을 수 있다.

$$y(\omega) = x(\omega) \cdot h(\omega) \quad (2.24)$$

$$h(\omega) = \frac{y(\omega)}{x(\omega)} \quad (2.25)$$

식 (2.24)로부터 시간영역내의 회선적분은 변환영역내의 승법(multiplication)과 같다는 것을 알 수 있다. 추가적으로 변환영역내의 이와 같은 표현은, 만약 $h(\omega)$

가 역변환[식 (2.23)]에 의하여 얻어질 수 있다면, $h(t)$ 를 산정할 수단으로써 제공하게 된다. 만약 $y(\omega)$ 와 $x(\omega)$ 가 주어질 때, $y(t)$ 와 $x(t)$ 의 Fourier 변환은 식 (2.22)로부터 얻어질 수 있다. 따라서 핵함수의 Fourier 변환 $h(\omega)$ 가 식 (2.25)로부터 구하여질 수 있다.

$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$ 이므로, $h(\omega)$ 는 식 (2.26)과 같이 전개될 수 있다.

$$\begin{aligned} h(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)[\cos\omega t - i\sin\omega t] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cos\omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\sin\omega t dt \\ &= R_h(\omega) + iX_h(\omega) \end{aligned} \quad (2.26)$$

여기서, $R_h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cos\omega t dt$,
 $X_h(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\sin\omega t dt$ 이고
 $h(t)$ 는 f 의 실함수(real function)이기 때문에,

$$\begin{aligned} R_h(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cos(-\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cos\omega t dt = R_h(\omega) \end{aligned}$$

그러므로 $R_h(\omega)$ 는 ω 의 우함수(even function)가 된다. 그리고,

$$\begin{aligned} X_h(-\omega) &= -\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\sin(-\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\sin\omega t dt = -X_h(\omega) \end{aligned}$$

따라서 $X_h(\omega)$ 는 ω 의 기함수(odd function)가 된다. 마찬가지로 $x(\omega)$ 와 $y(\omega)$ 의 실수부(real parts)인 $R_x(\omega)$ 와 $R_y(\omega)$ 는 우함수가 되며, 허수부(imaginary parts)인 $X_x(\omega)$ 와 $X_y(\omega)$ 는 기함수가 된다. 상기 조건과 식 (2.23)을 이용하면, $h(t)$ 는 식 (2.27)과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R_h(\omega) + iX_h(\omega)][\cos\omega t + i\sin\omega t] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R_h(\omega)\cos\omega t - X_h(\omega)\sin\omega t] d\omega \end{aligned} \quad (2.27)$$

여기서, $R_h(\omega)\cos\omega t$ 와 $X_h(\omega)\sin(\omega t)$ 는 ω 의 우함수이고, $R_h(\omega)\sin\omega t$ 와 $X_h(\omega)\cos\omega t$ 는 ω 의 기함수이기 때문에 식 (2.27)은 식 (2.28)과 같이 정리될 수 있다.

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R_h(\omega)\cos\omega t - X_h(\omega)\sin\omega t] d\omega \quad (2.28)$$

$R_h(\omega)$ 와 $X_h(\omega)$ 는 식 (2.25)와 (2.26)을 사용하면 쉽게 얻을 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} h(\omega) &= R_h(\omega) + iX_h(\omega) = \frac{y(\omega)}{x(\omega)} \\ &= \frac{R_y(\omega) + iX_y(\omega)}{R_x(\omega) + iX_x(\omega)} \cdot \frac{R_x(\omega) + iX_x(\omega)}{R_x(\omega) + iX_x(\omega)} \end{aligned}$$

따라서

$$R_h(\omega) = \frac{R_y(\omega) \cdot R_x(\omega) + X_y(\omega) \cdot X_x(\omega)}{[R_x(\omega)]^2 + [X_x(\omega)]^2} \quad (2.29)$$

$$X_h(\omega) = \frac{X_y(\omega) \cdot R_x(\omega) + R_y(\omega) \cdot X_x(\omega)}{[R_x(\omega)]^2 + [X_x(\omega)]^2} \quad (2.30)$$

식 (2.29)와 식 (2.30)의 오른쪽 항들은 식 (2.22)를 사용함으로써 결정되어질 수 있다. 그러므로 $R_h(\omega)$ 와 $X_h(\omega)$ 가 구하여지면 최종적으로 $h(t)$ 를 얻을 수 있다.

실제 강우-유출의 수문계 해석에서, 적분구간은 $t < 0$ 의 경우 입력 $x(t)$, 출력 $y(t)$ 및 핵함수 $h(t)$ 에서 t 의 하한치는 0의 값을 가지게 되고, 상한치는 함수들이 정의되는 최대 시간치를 갖게 된다. 즉, $y(t)$ 는 기저유출의 종점, $x(t)$ 는 초과우량의 종점을 나타낸다. 각주파수 ω 는 0에서부터 Nyquist 주파수 $\omega_{\max} = \pi / \Delta t$ 까지 변한다. 여기서, Δt 는 관측치의 관측시간간격으로서 입력과 출력 모두 같은 값을 가져야 한다.

Laplace 변환은 Fourier 변환의 연장이라고 할 수 있다. 변환의 기본적 개념들은 일반적 변환방법들과 유사하므로, 앞 절에서 예시한 Fourier 변환과 일반 교재들(近藤, 1977; Watson, 1981)을 참고로 하면 Laplace 변환은 쉽게 이해될 수 있다. 이 이외에도 Laplace-Gamma법과 Laplace-Legendre법들이 Blank(1968)의 박사학위논문에서 상세히 소개되고 있다.

강우-유출의 수문계해석에서 이와 같은 변환적용은 실제적으로 많은 어려움을 내포하게 된다. 왜냐하면, 강우, 유출 및 핵성분의 객관적인 고유 진동수를 찾아 주기가 쉽지 않기 때문이다. 이와 같은 여과(filter)의 주파수 정보이론보다 Jakeman, Littlewood와 Whitehead(1990)의 여과이론에 의한 결과들이 실제 강우-유출현상을 규명하는데 훨씬 더 현실성이 있다고 생각된다.

2.3 직접해법

그림 2.3과 같은 직접유출량 $Y(t)$ 와 초과유량 $X(t)$ 가 주어졌다고 하자. 여기서는 관측치의 시간간격을 뜻하며, $Y(t)$ 와 $X(t)$ 는 같은 단위(mm/hr)를 가진다.

그림 2.3에서 NQ 와 NP 는 출력과 입력의 시간간격(Δt) 수를 각각 뜻한다. 일반적으로 NQ 가 NP 보다

크며, $Y(t)$ 의 기저시간은 $(NQ-1)\Delta t$ 이고 $X(t)$ 의 지속기간은 $(NP-1)\Delta t$ 가 된다.

2.3.1 사다리꼴 적분법

그림 2.3과 같은 수문곡선이 주어졌을 때, 핵 $h(t)$ 를 직접 구하기 위하여 수치적분법의 사다리꼴 방법(trapezoidal rule)을 사용할 수 있다(Blank, 1968; Carnahan, Luther와 Wilkes, 1969).

$$y(1) = y(t=0) = 0$$

$$y(2) = y(t=\Delta t) = \int_0^{\Delta t} x(\tau)h(\Delta t - \tau)d\tau = \frac{1}{2}\Delta t[x(2)h(1) + x(1)h(2)]$$

또는 $x(1)=0$ 이기 때문에,

$$h(1) = \frac{2y(2)}{x(2)\Delta t}$$

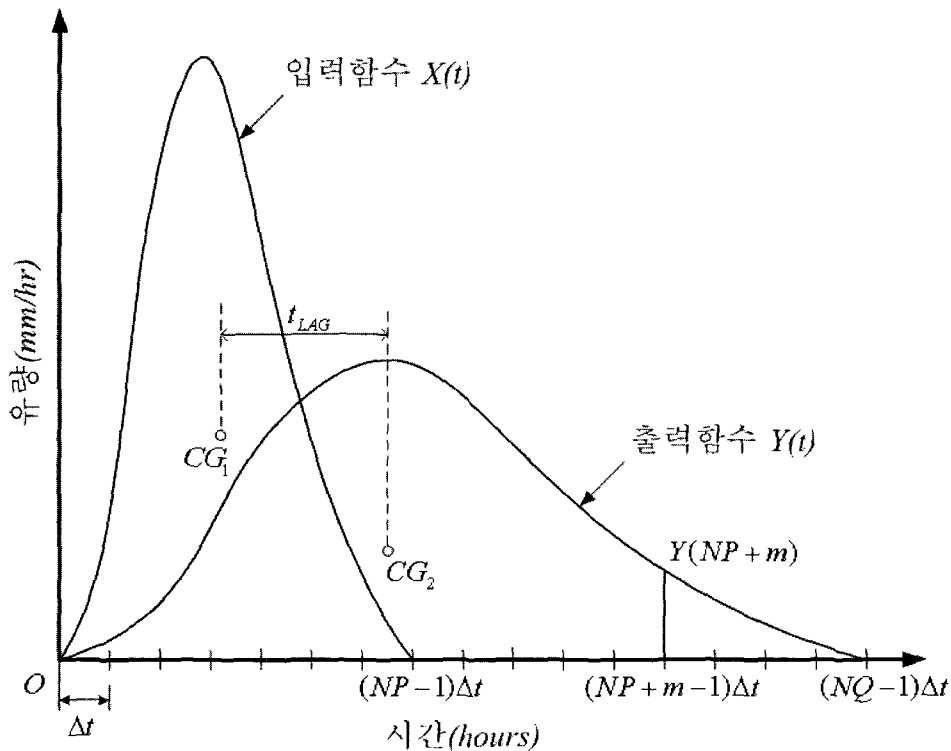


그림 2.3 입력과 출력함수들의 이산형

마찬가지로,

$$-x(m+1)h(1) \left\{ \frac{1}{2x(2)} \right. \\ \left. ; m=3, 4, \dots, NP-1 \right. \quad (2.32)$$

$$y(3) = y(t=2\Delta t) \\ = \int_0^{\Delta t} x(\tau)h(2\Delta t-\tau)d\tau + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} x(\tau)h(2\Delta t-\tau)d\tau \\ = \frac{1}{2}\Delta t[x(2)h(2)+x(1)h(3) \\ +x(3)h(1)+x(2)h(2)]$$

지금까지는 입력함수가 끝나기 전까지의 경우에 대하여 $h(m)$ 이 전개되었으나, 입력함수가 끝난 이후의 경우에 대해서도 마찬가지로 사다리꼴 적분법을 적용할 수 있다.

또는,

$$h(2) = \left[\frac{2y(3)}{\Delta t} - x(3)h(1) \right] \frac{1}{2x(2)}$$

$$y(t=a)_{t_{tr}} = \int_0^{t_{tr}} x(\tau)h(a-\tau)d\tau$$

여기서 t_{tr} 은 초과우량 종점시간을 의미한다. $x(t)_{t_{tr}}=0$ 이기 때문에 적분상한치는 변하지 않는다. 만약 $a-\tau=\lambda$ 라고 놓으면,

일반적인 표기법으로 나타내면,

$$y(m+1) = y(t=m\Delta t) \\ = \int_0^{\Delta t} x(\tau)h(m\Delta t-\tau)d\tau + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} x(\tau)h(m\Delta t-\tau)d\tau \\ + \dots + \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} x(\tau)h(m\Delta t-\tau)d\tau$$

$$y(t=a)_{t_{tr}} = \int_{a-t_{tr}}^a x(\alpha-\lambda)h(\lambda)d\lambda \quad (2.33)$$

상기 식의 각 적분을 계산하면,

식 (2.33)을 사다리꼴 적분법에 의하여 앞에서 구한 방법과 마찬가지로 풀면 식 (2.34)를 최종적으로 얻을 수 있다.

$$y(m+1) = \frac{1}{2}\Delta t[x(2)h(m)+x(1)h(m+1) \\ +x(3)h(m-1)+x(2)h(m)+\dots \\ +x(m+1)h(1)+x(m)h(2)]; m\text{항까지}$$

$$h(NP+m) = \left\{ \frac{2y(NP+m+1)}{\Delta t} \right. \\ \left. - 2 \sum_{i=3}^m [x(i)h(NP+m-i+2)] \right. \\ \left. - x(NP)h(m+2) \right\} \frac{1}{2x(2)} \\ ; m=0, 1, \dots, NQ-NP-1 \quad (2.34)$$

따라서,

$$h(m) = \left[\frac{2y(m+1)}{\Delta t} - 2x(3)h(m-1) \right. \\ \left. - 2x(4)h(m-2) - \dots - 2x(m)h(2) \right. \\ \left. - x(m+1)h(1) \right] \frac{1}{2x(2)}$$

식 (2.34)에서 보여 주듯이, 만약 $y(NQ+1)$ 이 정의되지 않는다면 $h(NQ)$ 가 계산될 수 없음을 알 수 있다. 그러나 만약 뒷부분을 0으로 놓는다면(직접유출이 끝난 후), 방정식을 $m=NQ-NP$ 의 값을 갖게 되어 $h(NQ)$ 가 계산될 수 있다. 식 (2.32)와 (2.34)은 식 (2.35)와 같은 matrix형으로 취할 수 있으며, 식 (2.21)과 같은 형이 된다.

또는,

$$y(m+1) = \frac{1}{2}\Delta t \sum_{i=2}^{m+1} [x(i)h(m-i+2) \\ +x(i-1)h(m-i+3)] \\ ; m=2, 3, \dots, NP-1 \quad (2.31)$$

$$Y = Xh \quad (2.35)$$

그리고

여기서, Y 는 출력 벡터, X 는 입력 벡터, h 는 핵 벡터를 각각 뜻한다.

$$h(m) = \left\{ \frac{2y(m+1)}{\Delta t} - 2 \sum_{i=2}^{m+1} [x(i)h(m-i+2)] \right.$$

2.3.2 최소자승법

일반적인 단위유량도 기법은 비록 간단하다 할지라도, 상당한 제약조건을 갖게 된다. 단일 호우사상으로 부터 얻어진 강우-유출 수문곡선은 단위도를 얻는데 비교적 쉬운 것으로 알려져 있다(윤용남, 2001; 윤태훈, 1997). 그러나 복합호우사상으로부터 식(2.35)에 의하여 선형대수학적으로 핵의 종거치들을 구해보면, 2.2절에서 언급한 바와 같이 음의 종거를 갖게 되는 비현실성 등의 경우가 왕왕 발생하게 된다. 이의 해결을 위하여 2.1과 2.2절의 직교다항식이나 변환법이 사용되고 있으나, 또한 Snyder(1955)의 최소자승법, Eagleson, Mejia-R와 March(1966),

Mays와 Coles(1980) 등의 liner programming methods의 최적화 기법들이 발표된 바 있다.

Raudkivi(1979)는 그의 저서에서 최소자승법을 소개하였으며, 이는 한가지 방법론에 불과하다고 논하였다.

지금까지 알려진 대부분의 최소자승법들은 관측치와 산정치들의 오차를 최소화하는 일반 통계학적 기법들에 근거를 두고 있다(Singh, 1988). 본 저자(1983)도 Fletcher와 Powell(1963)의 급수렴하강법(rapidly convergent descent method)에 의하여 관측치와 산정치의 편차를 최소화함으로써 기저유출을 산정한 바 있다.

참/고/문/헌

- 김재한(1981), "선형 수문계의 핵 수치 근사 해법", 대한토목학회 논문집, 29(4), pp. 111-121
- 김재한(1983), "물리적 특성들을 위한 강우와 기저유출의 선형해석", 대한토목학회논문집, 3(4), pp. 47-57
- 김재한(1985), "강우-유출 모형화의 문제점과 방법", 1[18(2), pp. 102-105], 2[18(3), pp. 196-198], 3[18(4), pp. 284-288], 한국수문학회지
- 윤용남(2001), 공업수문학, 청문각
- 윤태훈(1997), 응용수문학, 청문각
- Amorocho, J. and Brandstetter, A.(1971), "Determination of nonlinear functional response functions in rainfall - runoff process", Water Resour. Res., 7(5), pp. 1087-1101
- Bidwell, V. J.(1971), "Regression analysis of nonlinear catchment system", Water Resour. Res., 7(5), pp. 1118-1126
- Blank, D.(1968), Linear system analysis in surface hydrology and its application to Indiana watersheds, Ph.D. thesis, Purdue University, August
- Blank, D., Delleur, J. W., and Giorgini, A.(1971), "Oscillatory kernel functions in linear hydrologic models", Water Resour. Res., 7(5), pp. 1102-1117
- Carnahan, B., Luther, H. A., and Wilkes, J.O.(1969), Applied numerical methods, John Wiley and Sons, Inc.
- Delleur, J. W. and Rao., R. A.(1971), "Linear system analysis in hydrology - the transform approach, the kernel oscillations and the effect of noise", United States - Japan Bi-Lateral Seminar in Hydrology, Honolulu, January
- Diskin, M. H.(1964), A basic study of the linearity of the rainfall-runoff process in watersheds, Ph.D. thesis, University of Illinois, Urbana, Ill.
- Dooge, J. C. I.(1959), "A general theory of the unit hydrograph", J. Geophys. Res. (64), pp. 241-256
- Dooge, J. C. I.(1973), Linear theory of hydrologic systems, Tech. Bull. 1468, Agric. Res. Serv., U.S. Dep. of Agric., Washington, D.C.
- Eagleson, P. S., Mejia-R, R., and March, F.(1966), "Computation of optimum realizable unit hydrograph", Water Resour. Res., 2(4), pp. 755-764
- Fletcher, R. and Powell, N. J. D.(1963), "A rapidly convergent descent method for minimization", Comput. J., 6(2), pp. 163-168
- Fredericks J. W. and Labadie, J. W.(1995), Decision support system for conjunctive stream-aquifer management, Colorado Water Resources

- Research Institute, Ft. Collins, August
- Gabel, R. A. and Roberts, R. A.(1973), Signals and linear systems, John Wiley and Sons, Inc.
- Jakeman, A. J., Littlewood, I. G., and Whitehead, P. G.(1990), "Computation of the instantaneous unit hydrograph and identifiable component flows with application to two small upland catchment", *J. Hydrol.*, 117, pp. 275-300
- Kuo, S.(1972), Computer applications of numerical methods, Addison-Wesley Publ. Co., Inc.
- Liu, C. C-K. and Brutsaert, W. H.(1978), "A nonlinear analysis of the relationship between rainfall and runoff for extreme floods", *Water Resour. Res.*, 14(1), pp. 75-83
- Liu, C. L. and Liu, J. W. S.(1975), Linear systems analysis, Int. Student Edition
- Mays, L. W. and Coles, L.(1980), "Optimization of unit hydrograph determination", *Proc. ASCE*, 106, HY1, pp. 85-97
- Nash, J. E.(1957), "The form of the instantaneous unit hydrograph", *Proc. IASH Assemblée Generale de Toronto*, (3), pp. 114-121
- Newland D. E.(1975), An introduction to random vibrations and spectral analysis, Longman Inc., New York
- O'Donnell, T.(1960), "Instantaneous unit hydrograph derivation by harmonic analysis", *Int. Asso. Sci. Hydrology*, Pub. 51, pp. 546-557
- Papazafiriou, Z. G.(1975), "Polynomial approximation of the kernels of closed linear hydrologic systems", *J. Hydrol.*, 27, pp. 319-329
- Prasad, R.(1967), "A nonlinear hydrologic system response model", *J. Hydraul. Div.*, ASCE, 93, No. Hy4, pp. 201-221
- Raudkivi, A. J.(1979), Hydrology - an advanced introduction to hydrological processes and modelling, Pergamon Press
- Sherman, L. K.(1932), "Stream flow from rainfall by the unit graph method", *Engineering News-Record* 108, pp. 501-505
- Singh, V. P.(1988), Hydrologic systems, rainfall-runoff modeling, Vol. 1, Prentice-Hall, pp. 175-181
- Snyder, W. M.(1955), "Hydrograph analysis by the method of least squares", *Proc. Am. Soc. Civil Eng.*, 81, Separate 793, September
- Turner, H. M. and Burdion, A. J.(1941), "The flood hydrograph", *J. Boston Soc. Civil Engrs.*, 28(3), July, pp. 232-256
- Watson, E. J.(1981), Laplace transforms and applications, Van Nostrand Reinhold Co.
- Wylie, C. R. and Barrett L. C.(1982), Advanced engineering mathematics, Int. Student Edition
- Zand, S. M. and Harder, J. A.(1973), "Application of nonlinear system identification to the lower Mekong River, Southeast Asia", *Water Resour. Res.*, 9(2), pp. 311-325
- Zoch, R. T.(1937), "On the relation between rainfall and stream flow", *Monthly Weather Review*, Part I (62), pp. 315-322, 1934, Part II (64), pp. 105-121, 1936 and Part III (65), pp. 135-147
- 日野幹雄(1975), "非線型流出解析および適應豫測", 1975年度(第十一回)水工学に関する夏期研修會講義策 Aコース, 日本土木學會 水理委員會, pp. A-8-1~A-8-31
- 日野幹雄(1983), スペクトル解析, 朝倉書店(日本)
- 近藤次郎(1977), うプウス變換とその應用, 培風館(日本)