

Fractional-Step법을 이용한 비압축성 비정상 Navier-Stokes 방정식의 유한 요소해석

김형민* · 이신표*

(2002년 9월 18일 접수, 2003년 1월 11일 심사완료)

Finite Element Analysis of Incompressible Transient Navier-Stokes Equation using Fractional-Step Methods

Kim Hyung Min and Lee Shin Pyo

Key Words: Fractional-Step Methods(분리해석법), Finite Element Methods(유한요소법), Cavity Flow(캐버티 유동), Flow over a Cylinder(원통주위의 유동), Multistep Approximation(다단계근사법), Strouhal Number(스트로홀 수)

Abstract

The main objective of the research is to develop a research code solving transient incompressible Navier-Stokes equation. In this research code, Adams-Bashforth method was applied to the convective terms of the navier stokes equation and the splitted equations were discretized spatially by finite element methods to solve the complex geometry problems easily. To reduce the divergence on the boundaries of pressure poisson equation due to the unsuitable pressure boundary conditions, multi step approximation pressure boundary conditions derived from the boundary linear momentum equations were used. Simulations of Lid Driven Flow and Flow over Cylinder were conducted to prove the accuracy by means of the comparison with results of the previous workers.

기호설명

C_p : 압력계수 ($= \frac{P - P_\infty}{1/2\rho U_o^2}$)

D : 실린더의 지름

\vec{H} : 비선형 대류항

p : 무차원 압력분포

Re : 레이놀드 수 ($= \frac{\rho U_o L}{\mu}$)

St : 스트로홀 수 ($= \frac{fD}{U_o}$)

t : 무차원 시간

\vec{v} : 무차원 속도

\vec{v}^* : 중간속도성분

\vec{v}^\dagger : 무발산중간속도성분

x, y : 좌표계

$\vec{\omega}$: 와도 ($= \nabla \times \vec{v}$)

ρ : 밀도

1. 서론

유동 자체에 대한 해석과 유동구조를 규명하기 위하여 여러 가지 수치기법을 이용하여 Navier-Stokes 방정식의 수치 해를 찾기 위한 노력이 수 십 년간 이어져오고 있으며 앞으로도 많은 연구자들에 의해서 연구가 진행될 것이다. 일반적으로 복잡한 형상을 가지고 있는 영역에서의 Navier-Stokes 방정식의 수치해석은 계산영역을

† 책임저자, 회원, 경기대학교 전자기계공학부

E-mail : pius@kyonggi.ac.kr

TEL : (031)249-9815 FAX : (031)249-9796

* 회원, 경기대학교 전자기계공학부

비정렬, 비균일 격자로 구성하고 각 요소에 대하여 미분방정식을 이산화하는 유한요소법을 이용하는 것이 유한차분법 또는 유한체적법을 이용하여 이산화하는 것보다 상대적으로 해석코드제작에 있어서 편리하여 그 적용분야가 확대되고 있다. 또한 비정상 유동에 관한 해석에는 연속방정식으로부터 유도된 압력보정 푸아송방정식의 해를 이용하여 속도와 압력을 보정하는 SIMPLE법⁽¹⁾과 압력구배를 포함하고 있는 운동량방정식을 분리하여 중간속도성분으로부터 압력분포를 결정, 연속방정식을 만족시키는 Fractional-Step법⁽²⁾⁽³⁾에 의한 해석이 그 주류를 이루고 있다. 수치해의 안정성은 압력 푸아송방정식의 안정성과 밀접한 관계가 있으며 경계면에서의 압력 조건 역시 이 안정성에 영향을 주고 있다. Fractional-Step법은 Chorin⁽²⁾에 의해서 처음으로 소개된 후 Kim과 Moin⁽³⁾에 의해서 그 방법이 체계화되었으며 이 연구에서 Kim과 Moin은 시간에 대한 이산화에서 대류항에 Adams-Bashforth법을 그리고 점성항에 Crank-Nicolson법을 적용하여 이산화하였으며 이 이산화 방정식에 중간속도성분을 가감하여 속도와 압력항을 포함하는 두개의 미분방정식으로 분리하고 각 방정식을 유한차분법으로 이산화하여 해석하는 방법을 소개하였고 Guang⁽⁴⁾은 시간에 대한 적분에 2차 Runge-Kutta법을 적용, 해석결과를 다른 해석결과들과 비교하여 해석방법의 타당성을 검증하였지만 경계조건에 대한 심도있는 언급은 다루지 않았다. Fractional-Step법과 같이 지배방정식을 몇 개의 미분 방정식으로 분리하여 해석하는 방법은 압력경계조건이 그 해석의 안정성에 큰 영향을 미치고 있어 Orszag⁽⁵⁾은 경계에서의 운동량방정식으로부터 유도된 Neumann 형태의 압력경계조건을 적용하는 것이 해석의 신뢰도를 높일 수 있다고 발표하였으며 Lee⁽⁶⁾와 Codina⁽⁷⁾는 Fractional-Step 법에서 압력 분포 해석의 안정성과 압력 경계조건에 관한 연구에서 표준 Fractional-Step법을 3가지 형태로 분류하고 각 방법에 적용되는 종속변수들의 경계조건을 제시하였다. Karniadakis⁽⁸⁾는 압력경계조건과 해의 발산과의 관계에 관한 연구에서 경계면에서의 발산(Boundary Divergence Flux)은 시간간격에 의해서 직접적으로 제어될 수 있고 그 오차는 다단계 근사에 의해서 줄일 수 있다고 하였다. 따라서 본 연구에서는 중간속도성분과 무발산속도

성분을 이용하여 미분방정식을 분리하였고 압력 푸아송방정식의 해석에 압력경계조건으로 경계운동량방정식으로부터 유도된 압력구배를 이용하였으며 압력경계조건의 대류항에 다단계근사법을 적용하였다. 선형대수 행렬식의 해는 RILU법을 이용하여 수렴성을 향상시킨 Conjugate-Gradient법을 이용하였다. 본 연구에서 제시한 해석방법으로 2차원 캐비티 유동과 실린더 주위의 유동을 해석하여 그 결과와 기존의 실험 또는 해석결과를 비교하여 제시방법의 타당성을 검증하였다.

2. 수학적 모델링

본 연구에서는 비정상 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 Fractional-Step법을 이용하여 몇 개의 미분방정식으로 분리 시키고 이 분리된 방정식들을 유한요소법으로 이산화하였고 경계운동량방정식과 다단계근사법으로부터 유도된 압력경계조건을 해석방법으로 제시한다.

2.1 지배방정식

기준 속도차원 U_0 와 길이차원, L , 을 이용하여 무차원화된 비압축성 비정상 Navier-Stokes 방정식과 연속방정식은 아래의 식 (1), (2)와 같다

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

여기서 $p = \frac{P - P_\infty}{\rho U_0}$ 으로 무차원 압력분포이며

$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu}$ 로 레이놀드 수를 나타낸다. 식 (1)

을 시간에 대하여 이산화를 먼저 수행하면 식 (3)과 같다

$$\frac{\vec{v}^{n+1} - \vec{v}^n}{\Delta t} = -\vec{H} - \nabla p^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v}^{n+1} \quad (3)$$

여기서 (n+1)과 (n)은 시간을 나타내는 첨자로 (n+1)은 새로운 시간 스텝을 나타내고 H는 대류항으로 Adams-Bashforth법을 적용하여 다음과

같이 정의하였다.

$$\vec{H} = -1.5 \vec{H}^n + 0.5 \vec{H}^{n-1} \quad (4)$$

식 (3)의 좌항인 시간미분항에 중간속도성분 \vec{v}^* 을 가감한 후 이를 두 개의 방정식으로 분리하면 식 (5), (6)을 얻을 수 있고

$$\frac{\vec{v}^* - \vec{v}^n}{\Delta t} = -\vec{H} \quad (5)$$

$$\frac{\vec{v}^{n+1} - \vec{v}^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v}^{n+1} \quad (6)$$

무발산중간속도성분 \vec{v} 를 다시 식 (6)에 가감하여 압력구배항과 점성항을 분리하면 식 (7), (8) 과 같은 두개의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\vec{v} - \vec{v}^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} \quad (7)$$

$$\frac{\vec{v}^{n+1} - \vec{v}}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v}^n \quad (8)$$

압력분포의 해석은 식 (7)의 좌, 우항에 $(\nabla \cdot)$ 를 취하고 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ 임을 이용하면 압력에 관한 푸아송방정식을 얻을 수 있으며 그 식은 다음과 같다.

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \vec{v}^*}{\Delta t} \quad (9)$$

유도된 식 (5), (7)~(9)는 Chorin에 의해서 처음으로 제시되고 Kim과 Moin에 의해서 체계화 된 방법을 수정하여 유도한 식으로 비압축성 비정상 유동 해석 시 그 해의 수렴은 적당한 CFL수를 유지시켜야 하며 본 연구에서 제시한 방법은 전체적으로 1차의 정확도를 가지고 있어 작은 시간 간격을 이용하여야 한다.

2.2 유한요소방정식

복잡한 기하학적 형상을 갖는 계산영역을 네 개의 격자점을 갖는 사각형 요소로 비정렬 격자

를 구성하고 그 격자점에 속도와 압력을 포함한 모든 종속변수가 정의되는 것으로 가정하여 위에서 유도된 지배방정식을 Galerkin법을 이용하여 이산화 하였다. 먼저 중간속도성분에 관한 식 (5)를 요소에 대하여 적분하면 식 (10)과 같고

$$\int_{\Omega} \psi_i \psi_j d\Omega \vec{v}^*_j = \int_{\Omega} \psi_i \vec{v}^n d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \psi_i \vec{H} d\Omega \quad (10)$$

식 (10)의 우항은 대각선 항에만 값이 존재하는 행렬식으로 중간속도성분, \vec{v}^* ,를 간단하게 계산 할 수 있다. 식 (9)는 압력분포에 관한 푸아송방정식으로 요소에 대하여 적분을 취하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j d\Omega p_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \psi_i \nabla \cdot \vec{v}^* d\Omega + \int_{\partial \Omega} \psi_i \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} d\Gamma \quad (11)$$

식 (11)에서 우항의 두 번째 항은 경계면에서 압력의 수직방향 구배의 면적분 값으로 그 경계조건은 다음 절에 설명 하였다. 식 (7)은 무발산중간속도성분에 관한 식으로 식 (11)로부터 계산된 압력분포로부터 그 값을 결정할 수 있으며 그 식은 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \psi_i \psi_j d\Omega \vec{v}_j = \int_{\Omega} \psi_i \vec{v}^* d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \psi_i \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} d\Omega \quad (12)$$

마지막으로 무발산중간속도성분, \vec{v} ,으로부터 다음 시간스텝의 속도분포, \vec{v}^{n+1} ,은 식 (8)로부터 계산할 수 있으며 그 요소에서 적분식은 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} [\nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j + \frac{Re}{\Delta t} \psi_i \psi_j] d\Omega \vec{v}_j^{n+1} = \frac{Re}{\Delta t} \int_{\Omega} \psi_i \vec{v} d\Omega \quad (13)$$

이산화방정식 식 (10)~(13)의 해는 매 시간 스텝마다 속도와 압력분포를 나타내며 압력 푸아송방정식으로부터 연속방정식을 만족 시키게 된다.

2.3 압력경계조건

비압축성유동에서의 압력분포의 해석은 유동 해석에 있어서 가장 중요한 부분의 하나이며 Fractional-Step법에서 압력분포는 중간속도성분과의 평형방정식으로 SIMPLE법을 적용한 해석법보다는 그 경계조건의 결정에 어려움이 있다. 본 연구에서는 경계면에서의 운동량 방정식과 연속방정식을 적용하여 유도된 Neumann 형태의 압력경계조건식을 적용하여 압력분포를 해석하였다. 압력경계조건식은 운동량관계식에 경계면의 수직방향 단위벡터, \vec{n} ,의 내적을 취함으로써 얻을 수 있으며 이는 식 (14)와 같다.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \vec{n} \cdot \left[-\vec{H} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v}^n \right] \quad (14)$$

여기서 비선형항 \vec{H} 는 Adams-Bashforth법을 이용한 다단계근사법을 적용하였다. 본 연구는 비압축성 유동에 대한 연구로 식 (14)의 점성항에 연속방정식을 적용하여 식 (15)와 같은 경계에서 비압축성유동의 압력구배식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \vec{n} \cdot \left[-\vec{H} - \frac{1}{Re} \nabla \times \vec{\omega}^n \right] \quad (15)$$

Fractional-Step 법과 같은 분리해석법에서는 식 (15)와 같은 Neumann 형태의 경계조건이 그 해석에 있어서 일반성을 가지고 있으며 항상 유인해를 얻을 수 있다^(5,9)고 알려져 있다.

3. 유동해석

수치해석 이론에 대한 타당성은 기존 연구자들에 의해서 수행된 연구 결과들과 비교하여 간접적으로 확인할 수 있다. 본 연구에서는 실험과 해석결과를 쉽게 확보할 수 있는 2차원 캐비티 유동과 실린더 주위의 2차원 유동을 본 이론에 의해서 수행된 해석결과와 비교하여 그 해석의 타당성을 검토하였다.

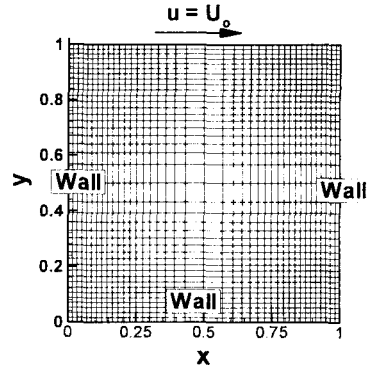


Fig. 1 Calculation domain and the boundary conditions of 2-D cavity flow

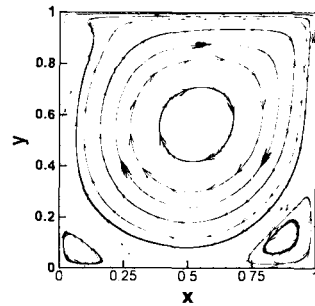


Fig. 2 Plot of stream lines at Re = 1000

3.1 유동해석 예1 (캐비티 유동)

2차원 캐비티 유동은 정사각형의 계산영역에서 한 면이 일정한 속도를 가지고 움직일 때 이 면의 이동에 의해서 발생하는 계산영역내의 유동으로 계산영역의 각 변의 무차원 길이를 1로 하였으며 레이놀드 수가 각각 1000과 3200인 때에 대하여 계산을 수행하였다. 계산영역내의 격자는 (40x40)의 비균일 격자로 구성하였으며 격자점의 수는 1681개이고 요소의 수는 1600개이다. 계산영역의 형상과 격자의 모양을 Fig. 1에 나타내었다. 경계조건으로는 움직이고 있는 y=1.0 면의 무차원 속도 $U_0 = 1$ 로, 그 외의 다른 경계면은 고정된 벽으로 점착조건을 적용하였으며 각 경계면에서의 압력은 "0"으로 하였다. 이 방법에 의한 수치해는 $CFL = \left[\frac{\Delta t}{h_x} + \frac{\Delta t}{h_y} \right] \Delta t$ 이 1보다 작을 때 수렴하는 것으로 나타났다. 따라서

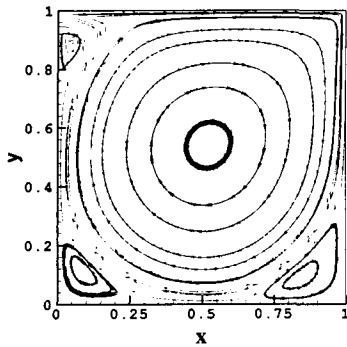


Fig. 3 Plot of stream lines at Re = 3200

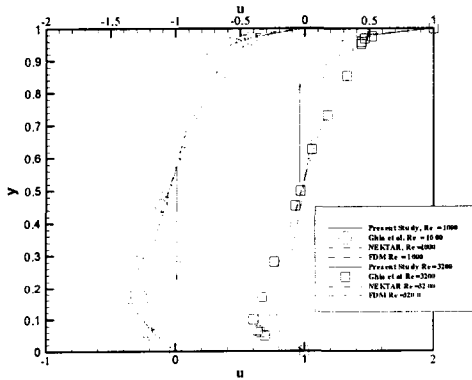


Fig. 4 x-direction velocity distribution at x = 0.5

CFL수를 1보다 작은 값으로 유지시키고 일정한 시간 간격으로 결과를 출력하기 위하여 $\Delta t=0.01$ 로 고정시켜 계산을 수행하였다.

캐버티 유동에서는 계산영역의 중앙에 주와가 위치하고, 좌, 우측 하단과 좌측 상부 모서리 부분에 부와 들이 위치하게 되는데 $Re=1000$ 일 때 좌, 우측 하단부에 부와는 나타나지만 좌측 상부에 부와는 나타나지 않고 $Re = 3200$ 이상에서 세 모서리 부분에 부와가 나타나게 된다.⁽¹⁰⁾ 이런 현상들을 Fig. 2와 Fig. 3에 타나냈으며 와의 형성이 다른 연구자들에 의한 결과와 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

$Re = 1000, 3200$ 일 때 계산영역의 중앙위치인 $x = 0.5$ 와 $y = 0.5$ 에서의 속도 분포를 Ghia⁽¹¹⁾의 실험 결과와 Karniadakis가 Spectral Element법을 이용하여 제작된 NEKTAR를 이용한 계산 결과 그리고 유한차분법과 SIMPLE법을 이용하

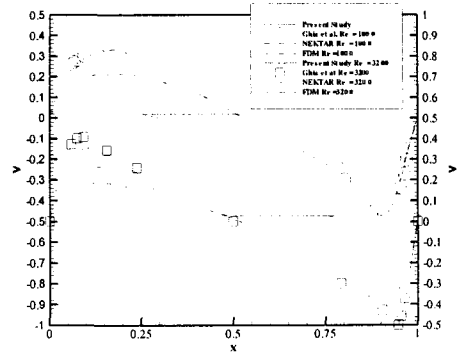


Fig. 5 y-direction velocity distribution at y = 0.5

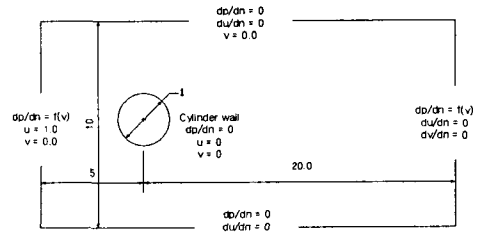


Fig. 6 Schematic figure of the flow over a cylinder and the boundary conditions

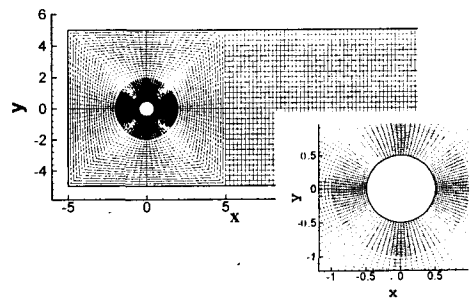


Fig. 7 Grid and Grid distribution in the calculation domain

여 계산된 결과를 비교하여 Fig. 4와 Fig. 5에 나타냈다. 그림에서 보는 바와 같이 본 연구의 계산결과가 Spectral Element법과 유한차분법에 의한 결과 보다 실험 결과에 더 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

3.2 유동해석 예2·(실린더 주위의 유동)

계산영역이 $25D \times 10D$ 이고 레이놀드 수가 40 ~ 175 사이인 실린더 주위 유동을 해석하였다. 해

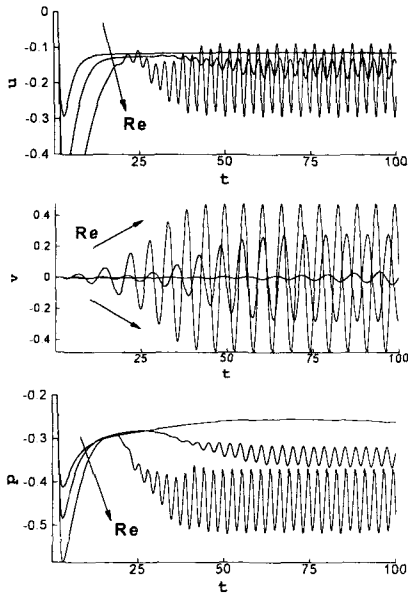


Fig. 8 Velocity and pressure versus time at the position of (0.0 0.75) at Re = 60, 100, 160

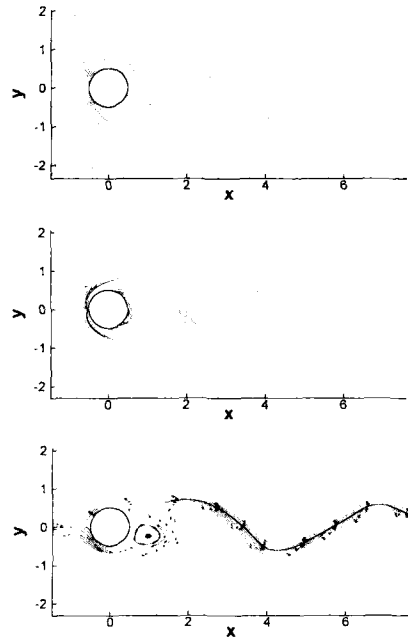


Fig. 9 Pressure, Vorticity and stream line plot at the time of 80 at Re = 100

석에 적용한 경계조건들을 Fig. 6에 나타내었으며 입구와 출구 경계면에서 수직방향 압력구배는 식 (15)의 조건을 적용하였다. 계산영역의 격자수는 7960개이고 요소 수는 7800개이며 격자의 분포는 Fig. 7에서 보는 바와 같이 실린더 벽 주위에 격자를 집중시켰다. 비정상유동 해석의 시간 간격 $\Delta t = 0.01$ 로 일정하게 하였다.

실린더 주위유동의 정상상태는 주기적 정상상태로 Fig. 8에서 보는 바와 같이 실린더 후미에서 시간변화에 대한 속도와 압력의 변화가 일정한 주기를 가지고 반복적으로 나타나는 상태이며 이 때 와 흐름이 나타나게 된다. 레이놀드 수가 커질수록 u, v, p 의 진폭은 커지고 정상상태에 도달하는 시간은 빨라져 레이놀드 수가 60, 100, 160일 때 각각 $t = 87, 80, 60$ 에서 정상상태에 도달하는 것으로 나타났다.

Fig. 9는 $Re = 100$ 일 때 정상상태($t = 80$)에서 실린더 후미 영역에서 압력과 와의 분포 그리고 유선을 나타낸 그림이다. 실린더 주위의 유동에서는 와가 극대 값을 갖는 와의 중심에서 압력이 극저값을 갖게 되며 본 연구에서도 이런 현상을 확인할 수 있었다. 또한 이 해석결과는 Choi⁽¹⁰⁾의

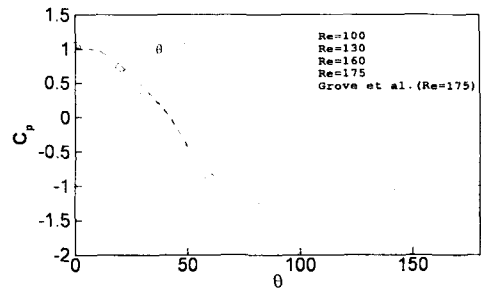


Fig. 10 C_p distribution on cylinder wall at Re = 100, 130, 160, 175

해석결과와 잘 일치하고 있다.

레이놀드 수의 변화에 따른 실린더 벽면 정체점으로부터 실린더 후단 180도 위치까지 압력계수의 변화를 Fig. 10에 나타냈다. 본 연구 결과에 따르면 레이놀드 수가 커짐에 따라 압력계수의 변화 폭이 커지며 이는 다른 연구 결과와도 일치하고 있다. 또한 $Re = 175$ 일 때 Grove⁽¹²⁾의 실험결과와 비교하여 그 분포가 일치하고 있음을 알 수 있다. 레이놀드 수 변화에 따른 스트로홀 수의 변화를 Williamson의 실험식⁽¹⁴⁾ ($St = -3.3265/Re + 0.1816 + 1.6 \times 10^{-4} Re$)과 비교하여

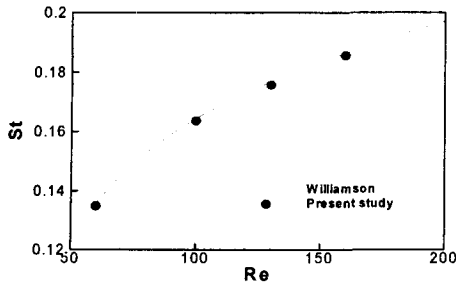


Fig. 11 Reynolds versus strouhal number

Fig. 11에 나타냈다. 실린더 후미에서의 유동변화의 주파수를 나타내는 스트로홀 수는 레이놀드수가 커짐에 따라 커지고 있으며 Williamson의 실험결과와 잘 일치하고 있다.

4. 결론

비정상 비압축성유동 해석을 위한 Navier-Stokes 방정식의 수치해석법으로 대류항에 Adams-Bashforth법적용하고 시간압력구배항과 점성항에 중간속도성분과 무발산중간속도성분을 이용하여 4개의 미분방정식으로 분리하였고 각 미분방정식을 Galerkin법을 이용한 유한요소법으로 이산화하여 복잡한 계산영역에서의 유동 해석에 용이하게 하였다. 유동해석의 안정성과 수렴성은 유동장내의 압력분포 해석에 의해서 결정되며 압력경계조건이 그 해의 안정성에 가장 큰 영향을 미치고 있다. 따라서 본 연구에서는 경계운동량방정식으로부터 유도된 Neumann 형태의 압력경계조건을 경계조건으로 적용 경계면에서 해의 발산을 시간 간격으로 제어하고 대류항에 적용한 시간에 대한 다단계근사법으로 오차를 줄여 유동해석의 안정성과 수렴성을 확보할 수 있었다. 해석 결과에 있어서도 Fig. 4와 5에서 보는 바와 같이 SIMPLE법을 이용한 유한차분 해석결과에 비해서 20% 정도 그리고 Fractional Step법을 적용하여 Spectral Element법으로 제작된 NEKTAR의 해석결과 보다 10%정도 향상된 결과를 얻을 수 있었으며 와의 형성 위치도 Choi의 해석결과와 일치했다. 또한 실린더 주위의 유동에서는 Fig. 10 과 11의 결과를 볼 때 스트로홀수의 변화와 실린더 표면에서의 압력계수의 분포가 Grove와 Williamson의 실험결과와 일치

하고 있다. 따라서 본 연구에서 제시한 조건을 통해서 해석의 안정성을 확보할 수 있고 해석결과 역시 타 방법에 비해 실험 결과에 더 근접한 값을 얻을 수 있다.

후 기

본 연구는 2000학년도 경기대학교 특별목적기초연구 지원에 의하여 수행 되었으며 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat and Mass Transfer," Hemisphere Publishing Cooperation.
- (2) Chorin, A.J. 1997(Reprint), "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Problems," *J. Computational. Physics.* Vol. 135, pp. 118~125.
- (3) Kim, J. and Moin, P., 1985,"Application of a Fractional-Step Method to Imcompressible Navier-Stokes Equations," *Journal of Computational Physics,* Vol. 59, pp. 308~323.
- (4) Guang, R. and Utnes, T., 1993, "A Finite Element Solution of The Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations Using a Modified Velocity Correction Method," *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids,* Vol. 17, pp. 349~364.
- (5) Orszag, S.A., Israeli, M. and Deville, M.O., 1986, "Boundary Conditions for Incompressible Flows," *Journal of Science and Computer,* Vol. 1, pp. 75~111.
- (6) Lee, M.J., Oh, B.D. and Kim, Y.B., 2001, "Canonical Fractional-Step Methods and Consistent Boundary Conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Journal of Computational Physics,* Vol. 168, pp.73~100.
- (7) Codina, R., 2001, "Pressure Stability in Fractional Step Finite Element Methods for Incompressible Flows," *Journal of Computational Physics,* Vol. 170, pp. 112~140.
- (8) Karniadakis, G.E., 1991, "High-Order Splitting Methods for the. Incompressible Navier-Stokes Equations," *Journal of Computational Physics,* Vol. 97, pp. 414~443.

- (9) Gresho and Sani, R, 1987, "On Pressure conditions for the Incompressible Navier- Stokes Equations," *Int. Journal Numerical Methods in Fluids*, Vol. 11, pp. 1111~1145.
- (10) Choi, H.G., Choi, H. and Yoo, J.Y., 1997, "A Fractional Four-Step Finite Element Formulation of the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations using SUPG and Linear Equal-Order Element Methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 143, pp. 333 ~ 348.
- (11) Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., 1982, "High-Resolution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, pp. 387~411.
- (12) Grove, A.S., Shair, F.H., Petersen, E.E. and Acrivos, A., 1964, "An Experimental Investigation of the Separated Flow Past a Circular Cylinder," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 19, pp. 60~80.