

예선회가 존재하는 회전유동장의 불안정성 수치해석

황영규[†] · 이윤용^{*} · 이광원^{**}
 (2002년 5월 20일 접수, 2003년 1월 27일 심사완료)

Numerical Instability Analysis of the Rotating Boundary-Layer Flow Including Pre-Swirl

Young-Kyu Hwang, Yun-Yong Lee, Kwang-Won Lee

Key Words: Rotating Boundary-Layer Flow(회전 경계층유동), Hydrodynamic Stability(수동력학적 안정성), Instability(불안정성), Rotating Disk Flow(회전원판 유동), Pre-Swirl(예선회)

Abstract

The hydrodynamic instability of the three-dimensional boundary-layer over a rotating disk has been numerically investigated for these flows; $Ro = -1, -0.5, \text{ and } 0$, using linear stability theory. Detailed numerical values of the disturbance wave number, wave frequency, azimuth angle, radius (Reynolds number, Re) and other characteristics have been calculated for the pre-swirl flows. On the basis of Ekman and Kármán boundary layer theory, the instability of the pre-swirl flows have been investigated for the unstable criteria. The disturbance will be relatively fast amplified at small Re and within wide bands of wave number compared with previously known Kármán boundary-layer results. The flow ($Ro = -0.5$) is found to be always stable for a disturbance whose dimensionless wave number is greater than 0.9. It has a larger range of unstable interval than Kármán boundary layer and can be unstable at smaller Re .

기호설명

r : 부자원반경, \bar{r}/D	
C : $\cos \epsilon$	S : $\sin \epsilon$
Co : Coriolis 수, $2 - Ro - Ro^2$	z : 무차원 축방향 길이, \bar{z}/D
Cp : 파속도, β/k	Ω : 시스템 회전율
D : 경계층 두께, $D = (\nu/\Omega)^{1/2}$	k : 복소 파수, $\bar{k}D$
J : 스캘링 인자, $[O(1)]$	β : 복소 주파수, $\bar{\beta}/\omega_D$
Re : Reynolds 수, $\frac{\Delta\omega r D}{\nu}$	ϵ : 방위각
Ro : Rossby 수, $\Delta\omega/\Omega$	δ : 90° 증가된 방위각, $\epsilon + \frac{\pi}{2}$
	ξ : \hat{x} 방향 섭동 와도방정식
	η : \hat{y} 방향 섭동 와도방정식
	ω_D : 원판의 회전속도
	ω_F : 유체의 회전속도
	ζ : 원판상의 축방향 무차원 길이

[†] 책임저자, 회원, 성균관대학교 기계공학부
 E-mail : ykhwang@yurim.skku.ac.kr
 TEL : (031)290-7437 FAX : (031)290-5849

^{*} 회원, 성균관대학교 기계기술연구소

^{**} 회원, 성균관대학교 대학원 기계공학부

1. 서 론

일정한 각속도로 회전하는 반 무한 회전원판 주위의 비압축성 유체에 대한 유동문제는 공학과 자연과학의 전형적인 문제로 취급되어 왔으며, 다양한 응용과 해석이 수년 동안 꾸준한 관심과 비교연구로 진행되어 왔다. Ekman 경계층 유동해는 경계층 방정식(boundary layer equation)의 단순 엄밀해(simple exact solution)이고 von Kármán 경계층 유동해는 Navier-Stokes 방정식의 완전 상사해(exact similarity solution)이다. 이러한 유동해는 3차원 유동에 대한 대표적인 단순 유동해이기에 3차원 유동연구자들의 매력적인 연구 대상이 되어 왔다. Ekman 경계층 유동은 원판이 회전할 때 주위 유체도 같이 평행하게 회전하고 일정한 경계층 두께를 가지며, 경계층 내에서 유동의 방향이 반경에 따라 변하는 아주 단순한 예이다. 이에 비해 Kármán 경계층 유동은 주위의 유체는 정지하고 원판만 회전하는 유동을 말한다. 기본유동의 형태는 반경에 따라 변하는 무차원 속도로 표현되고, 비선형적이다. 또한, 반경방향 및 축방향 속도 분포 곡선에 변곡점을 가지며 좀더 복잡한 유동 형태를 나타낸다. 그럼에도 불구하고 Kármán 경계층 유동은 비교적 그 해가 잘 알려져 있고 여러 연구자들에 의해 다양한 방법으로 수치해석과 실험이 진행되어 왔다.⁽¹⁾

그런데, 실제 원판이 회전할 때 원판 주위의 유동은 정지하고 있다기 보다 원판의 회전으로 인한 경계층 내 점성과 관성의 영향이 유동의 회전을 유발할 수가 있다. 원판이 회전하기 시작한 후 충분한 시간이 흐르기 전에 즉, Ekman 경계층 유동의 형태로 발전하기 전의 유동형태의 특성을 고려할 필요가 있다. 예를 들어, 원심압축기의 Impeller가 회전할 때 I.G.V(Inlet Guide Vane)를 거쳐 입구로 들어오는 유체는, Impeller의 회전 속도보다 작은 속도로 유입되어 점진적으로 예선회(Pre-Swirl) 유동을 형성하게 된다.

회전 원판위의 기본 유동에 의한 경계층 유동이 형성될 때, 작은 교란이 기본 유동(base flow)에 중첩된 후의 유동이, 안정 또는 불안정 할 것인가를 예측하는 것이 본 연구의 주요 목적이다.

1921년 von Kármán에 의해 경계층에서의 Navier-Stokes 방정식의 정상해가 구해진 이후, 현재에 이르기까지 회전원판을 이용한 안정성,

불안정성 및 천이에 관한 연구등이 활발하게 진행되고 있다.

Faller,⁽¹⁾ Lingwood,⁽²⁾ Malik 등,⁽³⁾ 강 등,⁽⁴⁾ Hwang 과 Lee⁽⁵⁾는 회전원판 주위 유동의 안정성에 대한 해석이 시도되어 왔다. 실험적 연구로는 Malik 등,⁽³⁾ Wilkinson 등,⁽⁶⁾ Wimmer,⁽⁷⁾ Faller⁽¹⁾ 그리고 Lingwood⁽⁸⁾등은 유동가시화를 통한 유동 불안정성 및 천이현상을 관찰하고 속도를 측정하였다.

본 연구에서는, 회전원판의 각속도 보다 작은 비율로 유동이 회전원판을 따라 선회할 때 무한 회전원판 위에서 일어나는 유동 즉, 예선회 유동의 불안정성 특성을 수치모사를 통하여 연구하고자 한다. 즉, 그 특성이 잘 알려진 Ekman 경계층과 Kármán 경계층을 토대로 하여 유동의 불안정성을 여러 가지 변수들(Re, k, \mathcal{E}, Cp)에 대해 비교 고찰함으로써 유동 불안정성의 발전(불안정), 소멸(안정), 진행(파의 전파속도, 방향)등에 대해 규명코자 한다.

2. 지배방정식 및 수치해법

2.1 기본 유동

비압축성이며 균질한 유체가 회전원판 주위에 형성되는 일반적인 경계층 유동을 Faller⁽¹⁾가 정의한 Rossby 수로 표현하면 식 (1)과 같으며, 일반적인 경우의 Bulk Rossby 수와 동일하다.⁽⁹⁾

$$Ro = \frac{\Delta\omega}{\Omega} \quad (1)$$

여기서, $\Delta\omega = \omega_F - \omega_D$ 이고, 시스템 회전을(Ω)는 Faller가 제시한 $\Omega = \omega_F / (2 - Ro) + \omega_D / (2 + Ro)$ 이다.

기본 유동방정식은, Faller와 같이 회전하고 있는 원통 좌표계를 이용, 정상 상태의 속도들과 압력이 상사 변환된 후 무차원 상사함수로 표현하면 식 (2)와 같다.

$$F_r + Ro[F^2 + HF_z - (G^2 - 1)] \quad (2a)$$

$$- Co(G - 1) - F_{zz} = 0,$$

$$G_r + Ro(2FG + HG_z) + CoF - G_{zz} = 0. \quad (2b)$$

무차원화된 연속방정식은

$$H = -2 \int_0^z F(z) dz \quad (3)$$

이고, 경계조건은

$$\begin{aligned} F(0) = G(0) = H(0) &= 0, \\ F(\infty) = 0, \quad G(\infty) &= 1. \end{aligned} \quad (4)$$

비압축성이며 균질한 유체가 무한 회전원판 주위에 형성될 때 Rossby 수에 따른 물리적인 유동 특성 파라미터를 Fig. 1 에 나타내었다.

일반적인 Ro 값은 $\omega_D > \omega_F$ 의 경우 양(+)의 값을 갖지만, 본 연구에서는 Faller의 정의에 따라 음(-)의 값을 갖게 된다.⁽⁹⁾

Fig. 1에서 로스비 수 $Ro = -0.5$ 가 되면 Kármán 경계층 유동($Ro = -1$)과 Ekman 경계층 유동($Ro = 0$)의 사이에 존재하는 예선회 유동이 되는데 Coriolis 효과가 두 경우보다 상대적으로 커지며, 시스템 회전율의 크기는 Kármán 경계층 > 예선회 유동 > Ekman 경계층 유동 순이 된다. 따라서, 이러한 영향을 고려하여 기본유동을 수치모사 한 결과 Fig. 2~4와 같은 결과를 얻었다. 여기서, ξ 는 원판상의 축방향 무차원 길이이며 경계층으로부터 충분히 떨어진 거리의 경계조건을 취하여 기본 유동을 묘사하였다. Rossby 수에 따른 반경 방향, 접선방향 그리고 축방향 무차원 속도분포 곡선은 Fig. 2, 3, 4에 각각 도시하였는데, 화살표가 가리키는 방향으로 Rossby 수가 커질수록 ($Ro = -1 \rightarrow 0$) 각 방향의 속도가 증가함을 볼 수 있다. 이것은 예선회가 있는 유동과 주위유동이 원판과 같이 회전하는 Ekman 유동은 훨씬 더 큰 원심력을 가짐을 의미한다. 또한, 예선회가 존재하는 경우는 Ekman 유동에 더 가까워지며 주위 유동이 정지한 Kármán 유동의 경우와는 구별이 된다. 회전원판의 반경방향 및 접선방향으로는 Rossby 수가 커질수록 원판의 점착조건으로 인한 속도의 기울기가 급격해지며, 예선회 유동과 Ekman 유동의 속도분포 곡선에는 변곡점이 존재한다. 즉, 예선회 유동이나 Ekman 유동과 같이 주위 유체의 회전이 Kármán 경계층 유동보다 기본유동의 불안정성을 초래할 가능성이 더 높음을 알 수 있으며 이를 Fig. 2, 3에 도시하였다.

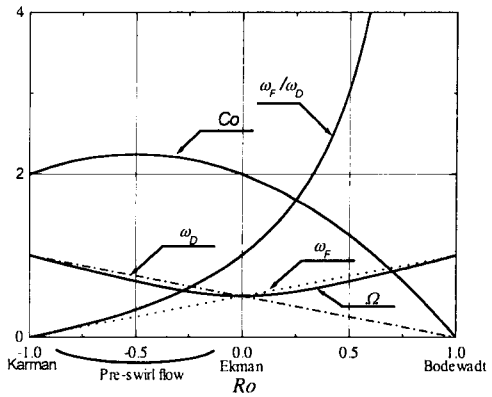


Fig. 1 Variation in $Co, \Omega, \omega_F, \omega_D$ and ω_F/ω_D with Ro .

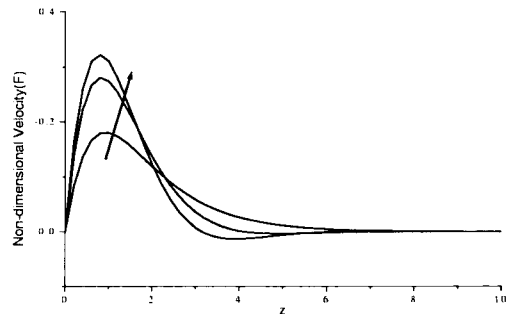


Fig. 2 Velocity distributions of radial component of base flow equations for the Kármán, Pre-swirl and Ekman boundary-layer flow; $Ro = -1, -0.5$ and 0 , respectively. (The arrow indicates the direction of increasing Ro)

Fig. 4는 무차원 축방향 속도분포 곡선을 나타내고 있는데 $Ro = -1$ 인 경우 $O(0.883)$, $Ro = 0$ 인 경우 $O(1)$, $Ro = -0.5$ 인 경우 $O(1.02)$ 이다. 즉, Pre-Swirl이 있는 경우 축방향 속도가 더 커짐을 의미한다.

실제로 $Ro = -0.5$ 인 유동을 재현하기 위해서는 시스템 회전율의 계산시 ω_F 에 비하여 ω_D 의 크기가 상대적으로 3배 크게 고려되므로, ω_F/ω_D 의 비를 약 0.33으로 유지해야 한다.

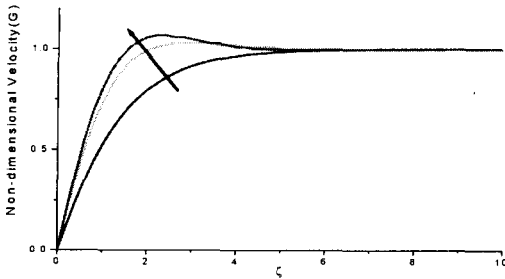


Fig. 3 Velocity distributions of tangential component of base flow equation for the Kármán, Pre-swirl and Ekman boundary-layer flow; $Ro=-1, -0.5$ and 0 , respectively. (The arrow indicates the direction of increasing Ro)

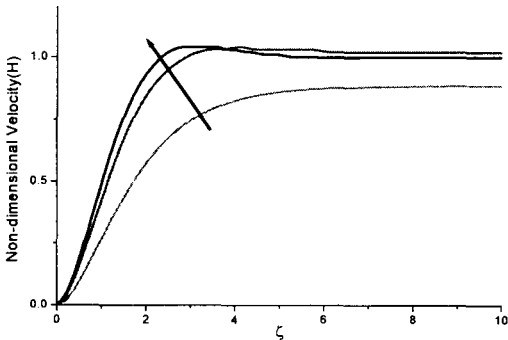


Fig. 4 Velocity distributions of axial component of base flow equations for the Kármán, Pre-swirl and Ekman boundary-layer flow; $Ro=-1, -0.5$ and 0 , respectively. (The arrow indicates the direction of increasing Ro)

2.2 안정성 방정식

선형 안정성 이론을 적용하여 기본 유동의 각 속도 성분에 미소한 교란항들을 중첩시켜 교란 방정식을 유도하였다. 여기서, 기본 유동항들을 정상상태로 간주하였다.

Fig. 5는 (r, θ) 로부터 (x, y) 로 변환한 좌표계이며, \hat{x} 축이 접선방향과 이루는 각은 방위각 ε 이고, $\delta = \varepsilon + (\pi/2)$ 이다.

좌표계 (x, y) 에서 δ 만큼 회전한 새로운 좌표

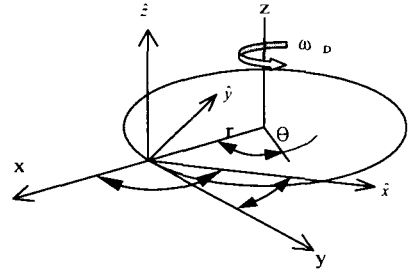


Fig. 5 Rotation system.

계 (\hat{x}, \hat{y}) 로 변환하면 Faller⁽¹⁾와 같이 새로운 교란속도 방정식을 얻게 되며 식 (5)가 된다. 새로운 좌표계로 변환하게 되는 이유는 교란의 형태는 불안정이 발생하기 시작하는 위치에서 나선형 교란의 접선방향에 거의 평행하고 원주의 접선방향과 이루는 각을 가지게 된다. 따라서, Faller⁽¹⁾는 교란을 규명하기 위하여 이의 접선방향으로 좌표계를 회전시킨다면 1차원적인 접근으로 와도의 묘사가 가능하다고 판단하였기에 본 연구도 이를 충실히 따랐다.

$$u_t + Re[-(FC + GS)u_y + (-F_x S + G_x C)w] + Ro(Hu_z + Fu - 2Gv) - Cov = u_{yy} + u_{zz} \tag{5}$$

원통 좌표계의 교란방정식을 직교 좌표계로 좌표 변환을 하고(즉, r 방향은 x 방향으로, θ 방향은 y 방향), z 방향을 회전축으로 하는 와도 전달 방정식을 유도하면, Faller⁽¹⁾와 같이 x, y 방향의 와도 전달 방정식 식 (6)를 얻을 수 있다.

$$\xi_t + Re(F\xi_x + G\xi_y - F_x u_x + G_x u_x - G_{zz} w) + Ro(H\xi_z + H_x \xi - F_z v - F_v z - 2G_x u - 2G_u z + G_z u) - Cou_z = \nabla^2 \xi + \frac{v_z}{r^2} - \frac{2}{r} u_{yz} \tag{6a}$$

$$\eta_t + Re(F\eta_x + G\eta_y - F_x v_y + G_x u_y + F_{zz} w) + Ro(H_x \eta + H\eta_z + F_z u + F_u z - 2G_x v - 2G_v z)$$

$$\begin{aligned}
 & -Fw_x - Gw_y - F_z u + Gw_z) - Cov_z \\
 & = \nabla^2 \eta - \frac{u_z}{r^2} - \frac{2}{r} v_{yz}
 \end{aligned} \tag{6b}$$

여기서, Re 는 Reynolds 수이며, $Re = \Delta \omega r_d D / \nu$ 로 정의하였다. 차원을 가진 반경 r_d 를 무차원화하면 $Re = \Delta \omega r / \Omega$ 가 되어 Kármán 유동의 경우 $Re = -r$ 이 된다. 그러나 편의상 양의 Re 를 사용하여 계산하였다. 회전원판 내 유동의 불안정성을 좌표 변환한 새로운 \hat{x} 축에 독립적인 2차원 와도라 가정하면, \hat{x} 에 대한 미분치들은 모두 '0'이 된다.

본 연구에서 유도되고 정리된 수정방정식은 교란속도방정식과 마찬가지로 δ 만큼 회전한 새로운 좌표계 (\hat{x} , \hat{y})로 변환하면 안정성방정식은 식 (7)이 된다. 여기서, $1/r = -1/Re$ 가 되므로 $1/r$, $1/r^2$ 은 모두 무시하였다.

$$\begin{aligned}
 & \xi_t + Re[-(FC + GS)\xi_y + (F_{zz}C + G_{zz}S)w] \\
 & + Ro[H\xi_z + H_z\xi - Fv_z - F_zv - 2G_zu - 2Gu_z \\
 & + (F_zC + G_zS)(uS + vC) + (FS - GC)w_yS \\
 & + (GC - FS)w_yC] - Co u_z = \xi_{yy} + \xi_{zz}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

그러나, Faller⁽¹¹⁾의 방정식에 대해 추가된항은 방위각이 커짐에 따라 무시할 수 없는 항 '(F_zC + G_zS) x (uS + vC)'과 누락항 '(FS - GC)w_yS'이며, 부호 오류항은 'GC - FS'이다.

여기서, $C = \cos \epsilon$, $S = \sin \epsilon$ 이고, 연속 방정식을 교란 유동함수 ϕ 를 사용하여 다음의 식 (8)으로 나타낼 수 있다.

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \xi = \nabla^2 \phi. \tag{8}$$

교란 속도 u 와 유동함수 ϕ 를 파수 k , 주파수 β 를 사용하여 식 (9)와 같이 가정하면

$$u(y, z, t) = U(z) \exp[i(ky - \beta t)], \tag{9a}$$

$$\phi(y, z, t) = \Phi(z) \exp[i(ky - \beta t)]. \tag{9b}$$

교란파의 파속도 $Cp = \beta/k$ 로 정의하였다.

\hat{x} 방향의 교란속도 방정식 (5)에 식 (8)과 (9)

를 대입하고 실수부와 허수부로 분리하면

$$\begin{aligned}
 U_R'' & = Ro H U_R + (Ro F + k^2)U_R \\
 & + [\beta + Re(FC + GS)k]U_I + (2Ro G + Co)\Phi_R \\
 & - Re k(-F'S + G'C)\Phi_I,
 \end{aligned} \tag{10a}$$

$$\begin{aligned}
 U_I'' & = Ro H U_I + (Ro F + k^2)U_I \\
 & - [\beta + Re(FC + GS)k]U_R + (2Ro G + Co)\Phi_I \\
 & + Re k(-F'S + G'C)\Phi_R.
 \end{aligned} \tag{10b}$$

\hat{x} 방향의 안정성 방정식 (7)에 식 (8)과 (9)를 대입하고 실수부와 허수부로 분리하면 복소수 6차인 비선형 4계 상미분 방정식이 된다.

$$\begin{aligned}
 \Phi_R'''' & = Ro H \Phi_R'' + (Ro H' + Ro F + 2k^2)\Phi_R'' \\
 & + Ro[F' - H k^2 - C(F'C + G'S)]\Phi_R' \\
 & - [Ro H' k^2 + Ro k^2 S(FS - GC) \\
 & + Ro k^2 C(GC - FS) + k^4]\Phi_R \\
 & + [\beta + Re(FC + GS)k]\Phi_I \\
 & - [\beta k^2 + Re(FC + GS)k^3 + Re(F''C \\
 & + G''S)k]\Phi_I - (2Ro G + Co)U_R' \\
 & + Ro[S(F'C + G'S) - 2G']U_R,
 \end{aligned} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_I'''' & = Ro H \Phi_I'' + (Ro H' + Ro F + 2k^2)\Phi_I'' \\
 & + Ro[F' - H k^2 - C(F'C + G'S)]\Phi_I' \\
 & - [Ro H' k^2 + Ro k^2 S(FS - GC) \\
 & + Ro k^2 C(GC - FS) + k^4]\Phi_I \\
 & - [\beta + Re(FC + GS)k]\Phi_R'' \\
 & + [\beta k^2 + Re(FC + GS)k^3 + Re(F''C \\
 & + G''S)k]\Phi_R - (2Ro G + Co)U_I' \\
 & + Ro[S(F'C + G'S) - 2G']U_I.
 \end{aligned} \tag{11b}$$

식 (10)과 (11)은 본 연구에서 처음 도입되었

고, 이 식에 대한 수치해석적인 연구도 처음 시도되었다.

경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 U(0) = \Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \\
 U'(\infty) = \Phi(\infty) = \Phi''(\infty) = 0. \quad (12)
 \end{aligned}$$

2.3 수치해석 방법

두 점 경계치 문제를 정확하게 만족하는 수치해를 구하기 위해 Orthogonal collocation 기법과 다중사격법(multiple shooting)이 이용되었으며, 컴퓨터 코드 COLNEW를 이용하였다.⁽¹⁰⁾

안정성 방정식과 경계조건을 실수부와 허수부로 분리하여 4개(order) 12차 방정식으로써 계산한다. 고유벡터로 취한 12개의 경계조건이 모두 '0'일 경우 무용해를 얻을 수 있으므로 다음과 같은 수정된 경계조건 식 (13)을 사용하여 원래의 경계조건 $|\Phi_R(0)| = |\Phi_I(0)| = 0$ 을 만족시키기 위해 $|\Phi_R(0)| + |\Phi_I(0)| \leq 10^{-5}$ 의 조건을 사용하고, 이 때 고유 벡터의 scaling을 위한 식 (14)를 동시에 만족 시켜야만 한다.

$$\begin{aligned}
 U_R(0) = U_I(0) = \Phi_R(0) = \Phi_I(0) = 0, \\
 \Phi_R'''(0) = \Phi_I'''(0) = J. \quad (13a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_R'(\infty) = U_I'(\infty) = \Phi_R(\infty) = \Phi_I(\infty) = 0 \\
 \Phi_R''(\infty) = \Phi_I''(\infty) = 0. \quad (13b)
 \end{aligned}$$

여기서, J 값을 $10^{-3} \leq J \leq 10^{-1}$ 의 범위의 '0'이 아닌 값으로 취하였다.

$$\min_{0 \leq \zeta \leq \infty} \frac{|\Phi_R(0)|}{|\Phi_R(\zeta)|}, \frac{|\Phi_I(0)|}{|\Phi_I(\zeta)|} \leq 10^{-4}, \quad (14a)$$

$$\max \frac{|\Phi_R(0)|}{M}, \frac{|\Phi_I(0)|}{M} \leq 10^{-7}. \quad (14b)$$

M 은 고유벡터 성분중 가장 큰 값을 의미한다. 또한, Newton's method를 이용하여 반복 계산함으로써 수렴하는 고유치들을 구한다. 이 때 기본 유동과 중립평면상의 고유값에 해당하는 중립점의 고유벡터는 B-spline으로 저장되었다가 새로운 계산을 위한 계수로 사용하였다. 본 연구에서 사용된 수치해석 방법은 Hwang 과 Lee⁽⁵⁾에서

사용한 방법과 같다. 위에서 제시한 수치해석 방법은 기본 유동이 정상상태 유동해이고 안정성 방정식이 상미분 방정식인 경우에 잘 적용된다.

3. 결과 및 고찰

3.1 안정성 이론해석 결과

기본유동을 B-spline으로 하여 Kármán 경계층 ($Ro=-1$) 유동과 Ekman 경계층 유동($Ro=0$)의 사이에 존재하는 $Ro=-0.5$ 인 경계층 유동에서 Coriolis 힘과 유선곡률 효과를 고려한 선형안정성 방정식의 고유값이 두 점 경계치 문제로써 수

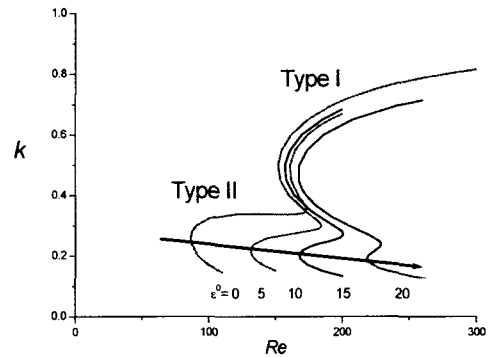


Fig. 6 Stability of (Re, k)-plane for the pre-swirl flows.(The arrow indicates the direction of increasing ϵ)

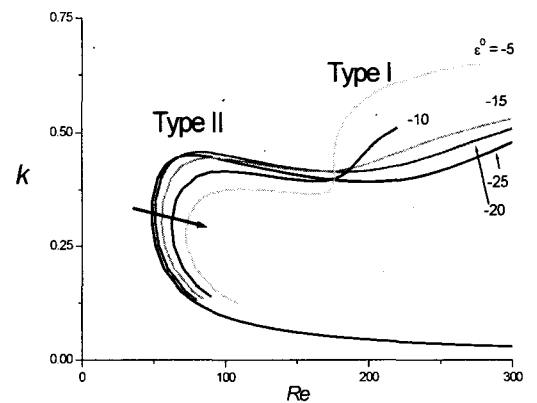


Fig. 7 Stability of (Re, k)-plane for the pre-swirl flows.(The arrow indicates the direction of increasing ϵ)

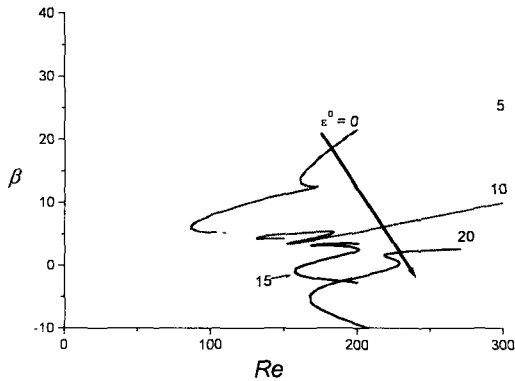


Fig. 8 Stability of (Re, β) -plane for the pre-swirl flows.(The arrow indicates the direction of increasing ϵ)

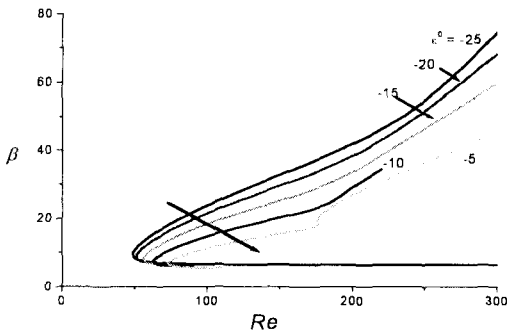


Fig. 9 Stability of (Re, β) -plane for the pre-swirl flows.(The arrow indicates the direction of increasing ϵ)

치모사가 수행되었다. 예선회의 유동에서도 제 1형 불안정성 (Type I; Stationary Instability)과 제 2형 불안정성 (Type II; Moving Instability)의 특성은 확연히 구별된다. 제 1형 불안정성은 제 2형 불안정성예비해 상대적으로 파수가 높고 보다 큰 레이놀즈 수를 갖는다. 또한, 그들의 방위각은 양의 값을 가지며, 제 2형 불안정성은 음의 방위각으로 상대적으로 낮은 파수에서 유동 불안정이 관찰될 수 있다. 예선회 유동에 대한 안정성평면은 Fig. 6~9에 나타내었다. 기본유동에 개재된 작은 교란이 증폭된 유동이 관찰될 수 있는 조건은 교란의 증폭곡선이 얻어져야 완전하게 설명되어 질 수 있다.

Table 1 Critical values of Type I Instability

Mode	Type I	
	Lingwood ⁽²⁾	Present
Re_c	160.9	151.6
k	0.467	0.5
ϵ	14.1	8.4

그러나, Fig. 8에서 주어진 레이놀즈 수(즉, 주어진 거리)에서 여러 해가 동시에 존재하여 주파수의 변화에 더욱 민감한 방위각은 5°와 10°의 범위에 있으며 곡선의 기울기가 급격하게 바뀌고 있다. 따라서, 교란된 유동이 이 범위에서 시작되어 증폭되어 갈 수 있을 것으로 예측된다.

예선회가 존재하는 유동의 안정성 곡선으로서 (Re, k) 평면은 Fig. 6, 7에, (Re, β) 평면의 안정성 곡선들은 Fig. 8, 9에 각각 나타내고 있는데, 방위각이 5°와 10°인 경우에 상당한 밴드($Re=100\sim 180$)의 레이놀즈 수에서 교란과의 주파수가 일정한 값을 가진다. 즉, 예선회 유동이 존재하는 유동은 방위각이 5°와 10°사이에서 이동하는 직교류 와도(moving crossflow vortices)가 가장 잘 관측될 것으로 예측된다. Fig. 8에서 방위각 10°의 안정성 곡선은 제 1형과 제 2형의 특징을 동시에 가지는 고유 교란주파수의 값을 곡선의 형태로부터 유추할 수 있는데 이는 제 1형과 2형의 경계에 해당한다고 본다. 또한, 이 부근을 지나면 교란의 주파수는 5 이하의 상대적으로 작은 값을 가지므로 유동 불안정에 해당하는 회전원판상 이동하는 직교류 와도가 관찰 될 것이다.

안정성 평면에 존재하는 다양한 방위각에 대하여 최외각 지점을 연결한 중립안정곡선은 Fig. 10에 나타내었다. 이 그림에서 제 1형 불안정성에 대한 Lingwood⁽²⁾의 중립안정곡선과 함께 비교해 본다면, '임계점 부근의 꼭지점'에서의 중립안정곡선상 최소값들은 거의 차이가 크지 않은 정도의 유동특성 파라미터를 보이며, 이를 Table 1에 나타내었다. 따라서 이러한 약간의 차이는 Faller의 부호 오류향을 수정하고 대류향을 추가하여 수정된 방정식의 차이라고 할 수 있다. 이 곡선의 내부는 불안정한 영역이 되며 외부는 어떠한 물리적인 조건하에서도 항상 안정한 영역을 유지하는 예선회 유동의 유동특성을 나타내고 있다. 교란의 파수가 0.9 이상에서는 항상 안정하며, 유동이

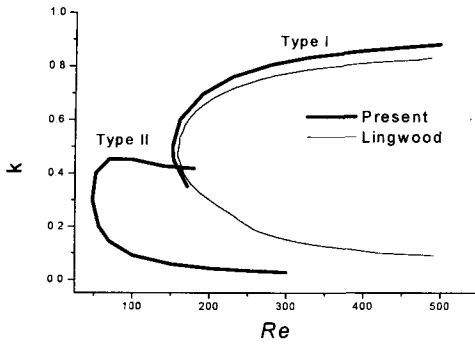


Fig. 10 Neutral curves for the $Ro = -0.5$

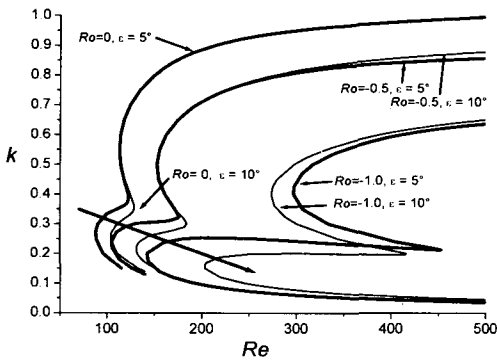


Fig. 11 Comparison of the $\epsilon=5^\circ$ and 10° at $Ro=-1.0, -0.5$ and 0 in the (Re, k) -plane. (The broken arrow indicates the direction of decreasing ϵ and Ro)

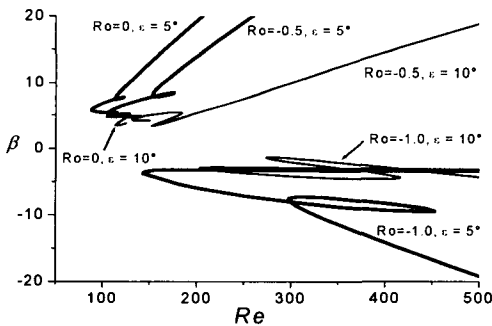


Fig. 12 Comparison of the $\epsilon=5^\circ$ and 10° at $Ro=-1.0, -0.5$ and 0 in the (Re, β) -plane

불안정할 수 있는 영역은 Kármán 경계층 유동보다 큰 범위를 가지며, 보다 작은 레이놀즈 수에서 불안정해질 수 있다. 즉, 원판이 회전할 때 예선회 유동이 존재하는 유동장인 경우에 유동은 보다 작은 레이놀즈 수에서 시작하여 더 넓은 조건에서 불안정하다. Rossby 수의 변화에 따른 다양한 경계층 유동과 이동하는 직교류 와도가 관찰될 수 있는 방위각 5° 와 10° 인 경우에 대하여 교란의 파수 및 주파수와 레이놀즈 수의 평면은 Fig. 11, 12에 각각 나타내었다. Fig. 11은 제 1형 및 제 2형의 교란파수 임계점들은 Rossby 수가 작아질 수록 ($Ro=0 \rightarrow -1.0$) 지수함수적으로 감소한다. 또한, 방위각이 5° 에서 10° 사이에 존재하는 유동의 불안정성은 Kármán 경계층 유동으로부터 Ekman 경계층 유동으로 가까워질수록 제 1형과 제 2형의 구별이 확실치 않은 위치에서 발생할 것으로 추측되며, 다만 파수의 크기가 다르고 방위각이 반대방향이다.

Fig. 12는 방위각 5° 와 10° 에 대하여 Rossby 수가 $0, -0.5, -1.0$ 으로 감소할 때 (Re, β) 평면상에서 주파수를 서로 비교한 그림이다. 이 평면에서 예선회 유동에 대한 교란의 주파수는 Kármán 경계층 유동보다는 Ekman 경계층 유동에 더 가깝다. 정체된 교란이 존재할 가능성은 교란의 주파수가 0 에 가까울수록 그 가능성이 높다.

그러나, 방위각이 10° 인 경우는 교란 주파수의 값이 5부근에 모여있고 이는 상대적으로 낮은 값이지만 이동하는 파형의 관찰이 기대되는 값이다. 따라서 Kármán 유동의 경우 방위각이 14° 부근에서 정체된 파형이 관찰된 것과 비교할 때, 예선회유동의 경우는 10° 내외의 범위에서 이동하는 파형의 관찰이 가능하다고 판단된다.

4. 결론

회전원판의 각속도 보다 작은 비율로 유동이 회전원판을 따라 선회할 때, 즉 예선회 (pre-swirl) 유동이 존재하는 무한 회전원판 위에서 유동의 불안정성 특성을 수치모사를 통하여 연구하고 다음과 같은 결론을 얻었다.

Rossby 수 $Ro=-0.5$ 의 중립안정곡선으로부터 교란의 파수가 0.9 이상에서는 항상 안정하며 Kármán 경계층 유동보다 큰 범위의 불안정 구간을 가지며, 보다 작은 레이놀즈 수에서 불안정해

질 수 있다. 즉, 예선회 유동이 존재하는 회전유동장인 경우에 유동의 불안정 특징은 더 작은 레이놀즈 수에서 일어나며 임계파수의 크기도 감소한다.

방위각이 5°에서 10° 사이에 존재하는 제 1형 및 제 2형의 유동불안정 임계점들은 Rossby 수가 작아질 수록($Ro=0 \rightarrow -1.0$) 지수함수적으로 감소한다. 또한, 유동의 불안정성은 Kármán 경계층 유동으로부터 Ekman 경계층 유동으로 가까워질 수록 제 1형과 제 2형의 구별이 확실치 않은 위치에서 발생하며, 다만 파수의 크기가 다르게 방위각이 반대이다.

참고문헌

(1) Faller, A. J., 1991, "Instability and Transition of Disturbed Flow over a Rotating Disk," *J. Fluid Mech.*, Vol. 230, pp. 245~269.

(2) Lingwood, R. J., 1997, "Absolute Instability of the Ekman Layer and Related Rotating Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 331, pp. 405~428.

(3) Malik, M. R., Wilkinson, S. P. and Orszag, S. A., 1981, "Instability and Transition in Rotating Disk Flow," *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 9, pp. 1131~1138.

(4) Kang, K., Kim, S.-C., Hwang, Y.-K., Park, E. T. and Kim, C. J., 1995, "The Neutral Stability of Rotating Disk Flows," *Proceeding of the KSME Thermal & Fluid Engineering Division, KSME*, pp. 146~150.(in Korean)

(5) Hwang, Y.-K. and Lee, Y.-Y., 2000, "Theoretical Flow Instability of the Kármán Boundary Layer," *KSME International J.*, Vol. 14, No. 3, pp.358~368.

(6) Wilkinson, S. P., Blanchard, A. E., Selby, G., Gaster, M., Tritz, T., and Gad-el-Hak, M., 1990, "Flow Visualization of Wave-Packet in a Rotating Disk," *Instability and Transition*, ed. Hussaini, M. Y. and Voigt, K. G., Vol. 1, Springer-Verlag, pp. 306~318.

(7) Wimmer, M., 1989, "Classification of Laminar-Turbulent Transition near Rotating Bodies," *Laminar-Turbulent Transition, in Proc. IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition*, ed. Arnal, D. and Michel, R., Springer -Verlag, pp. 545~550.

(8) Lingwood, R. J., 1996, "An Experimental Study of Absolute Instability of the Rotating Disk Boundary Layer Flow", *J. Fluid Mech.*, Vol. 314, pp. 373~405.

(9) Nino,H., 1988, "Inertial instability of the Stewartson $E^{1/4}$ -layer," *Fluid Dynamics Research*, Vol.3, pp. 407~414

(10) Bader, G. and Ascher, U., 1985, "A New Basis Implementation for a Mixed Order Boundary O.D.E. Solver," *Tech. Rep.* 85-11, Dept. of Computer Science, U. of British Columbia, Vancouver, Canada.