

# 저널-스러스트 베어링 사이의 상호 연결 경계가 동압 공기 윤활 베어링의 성능에 미치는 영향

강지훈\* · 김성기\* · 김경웅\*

(2002년 10월 2일 접수, 2003년 2월 11일 심사완료)

## Effect of Interconnected Boundary Between Journal and Thrust Bearings on the Performance of Self-Acting Air-Lubricated Bearings

Ji-Hoon Kang, Sung-Ki Kim and Kyung-Woong Kim

**Key Words :** Self-Acting Air-Lubricated Bearing(동압공기윤활베어링), Interconnected Boundary(상호 연결경계, Duct Model(덕트모델))

### Abstract

In this paper, the effect of interconnected boundary between journal and thrust bearings on the performance of self-acting air-lubricated bearings is investigated. When journal and thrust bearings have common boundary, conventional boundary condition which assumes that the boundary pressure is equal to atmosphere is no more valid. Instead, new boundary condition by mass conservation at interconnected boundary is needed. To do this, a duct model satisfying mass conservation at interconnected boundary is developed. Using this model, pressure distribution at interconnected boundary is numerically analyzed with changing the volume of interconnecting part. As a result, it is shown that load capacity of thrust bearing can be greatly increased when journal and thrust have a common boundary.

#### 기호설명

$a$	: 덕트의 폭	$\dot{m}_r$	: 스러스트 베어링으로부터 나오는 단위 길이당 질량유량
$b$	: 덕트의 높이	$p_a$	: 대기압
$b_L$	: 랜드 지역 호 길이	$p$	: 공기막내의 압력
$b_G$	: 그루브 지역 호 길이	$q$	: 덕트내에서의 $z$ 방향 질량 유량
$c$	: 저널 베어링 간극	$r, \theta, z$	: 원통 좌표계
$D$	: 저널 베어링 직경	$r_i$	: 스러스트 베어링의 안쪽 반경
$e$	: 저널의 편심율	$r_o$	: 스러스트 베어링의 바깥쪽 반경
$L_R$	: 그루브 길이비, $b_G / (b_G + b_L)$	$r_s$	: 스러스트 베어링의 시일 반경
$h_G$	: 그루브 지역에서의 공기막 두께	$S_R$	: 시일비, $(r_s - r_i) / (r_o - r_i)$
$h_L$	: 랜드 지역의 공기막 두께	$S_A$	: 부가 시일비, 스러스트 베어링에서 $w / (r_o - r_i)$ , 저널 베어링에서 $w / L$
$h$	: 공기막 두께	$u$	: 덕트내에서 $z$ 방향 속도
$H_R$	: 그루브 높이비, $h_G / h_L$	$W$	: 스러스트 베어링의 부하지지능
$L$	: 저널 베어링의 길이	$w$	: 부가 시일의 길이
$\dot{m}_j$	: 저널 베어링으로부터 나오는 단위길이당 질량유량	$\alpha$	: 덕트의 무차원 폭, $a/c$
		$\beta$	: 덕트의 무차원 높이, $b/c$
		$\gamma$	: 그루브 각
		$\delta$	: 그루브 깊이, $h_G - h_L$

\* 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : kkaru@kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3255 FAX : (042)869-3210

\* 한국과학기술원 기계공학과

- $A$  : 베어링 수,  $\frac{6\mu\omega}{p_a} \left(\frac{r_o}{h_l}\right)^2$
- $\varepsilon$  : 저널의 편심율,  $e/c$
- $\mu$  : 공기의 점도
- $\rho$  : 공기의 밀도
- $\omega$  : 회전축의 회전 각속도
- $x, y, z$  : 직교 좌표계

### 1. 서론

회전기계의 회전체를 지지하고 있는 베어링은 회전기계의 핵심 부품으로서, 회전기계가 고속화됨에 따라 높은 부하용량과 안정성이 더욱 요구되고 있다. 또한 정보 저장 매체의 고밀도, 고집적화로 회전기계가 소형화 됨에 따라 구조가 간단하고 크기가 작은 베어링이 더욱 필요로 되고 있는 실정이다. 동압 공기 베어링은 공기를 윤활제로 사용하는 베어링으로서, 공기막내에서 발생하는 동압의 효과로 회전체를 지지하게 된다. 따라서 별도의 가압 장치가 필요하지 않아 구조가 단순하다. 특히 베어링면이나 회전체면에 그루브가 있는 경우 그루브가 추가적인 동압을 발생시켜 더욱 효과적으로 회전체를 지지할 수 있다. 이러한 동압 공기 유회 그루브 베어링에 대해서는 많은 연구가 이루어져 왔다. 스파이럴 그루브 스러스트 베어링에 대해서는 Malanoski<sup>(1)</sup> 등이 무한소폭 그루브 이론(NGT)을 적용하여 성능을 해석하였고, Bonneau<sup>(2)</sup> 등이 FEM을 이용하여 성능을 해석하였으며 Satomi<sup>(3)</sup> 등은 여러가지 설계 변수들에 대해 베어링의 성능 변화를 계산하였다. 또한 Kang<sup>(5)</sup> 등은 여러가지 형상을 갖는 그루브 스러스트 베어링의 성능을 해석, 비교하였다. 헤링본 그루브 저널 베어링에 대해서는 Vohr<sup>(6)</sup> 등이 무한소폭 그루브 이론을 적용하여 성능을 해석하였고, Bonneau<sup>(7)</sup> 등이 FEM을 이용하여 유한개의 그루브를 갖는 경우에 대해 해석하였으며, Takuji<sup>(8)</sup> 는 헤링본 그루브 저널 베어링에 대한 안정성 해석을 수행하였다. 이러한 동압 공기 유회 그루브 베어링의 성능 해석을 위한 경계 조건으로 베어링 경계면의 압력이 대기압과 같다는 압력 고정 경계 조건을 사용하는 것이 일반적이다. 이러한 경계 조건은 저널 베어링과 스러스트 베어링이 완전히 분리되어 경계면이 외부와 맞닿아 있을 때만 사용가능하다. 그러나 최근 축-베어링 시스템의 구조를 간단하게 하기 위해 Fig. 1 과 같이 저널-스러스트 베어링을 연결시킨 형태의 축-베어링 시스템이 제안되고 있다. 따라서, 압력 고정 경계 대신 저널-스러스트

베어링이 상호 연결된 경계에서 질량 보존을 만족하는 새로운 경계 조건을 적용해야 한다. Lee<sup>(9)</sup> 등은 저널-스러스트 베어링이 연결된 micro gas turbine 베어링에 대해 연결부분의  $\theta$ 방향 유량을 무시한다는 가정 하에 해석을 수행하여 저널 베어링의 부하용량이 크게 향상될 수 있음을 보였으나 이 가정은  $\theta$ 방향 유량이 매우 작은 경우에만 성립될 수 있으므로 일반적으로는  $\theta$ 방향 유량을 고려한 해석이 필요하다. 또한 가공 및 조립 공정 때문에 연결 부분의 형상이나 크기가 매우 달라질 수 있기 때문에 이를 고려한 해석이 필요하다.

본 연구에서는 상호 연결된 저널-스러스트 베어링의 성능을 보다 정확히 예측하기 위해, 저널-스러스트 베어링의 상호 연결 경계에서 질량 보존을 만족하는 덕트 모델을 개발하고 이를 이용하여 상호 연결 경계에 적용될 수 있는 새로운 경계 조건을 제시하였다. 제시된 경계 조건을 적용하여 상호 연결 경계를 가지는 베어링의 성능에 대하여 연구하였고, 나아가 상호 연결 부분의 부피가 베어링의 성능에 미치는 영향에 대해서 연구하였다.

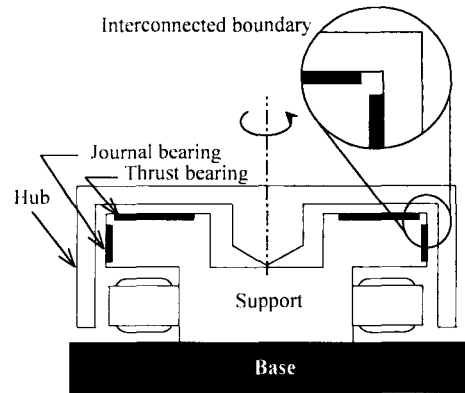


Fig. 1 Analytical model

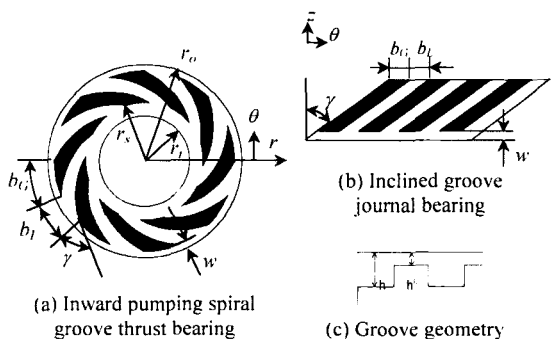


Fig. 2 Geometry of groove bearings

**Table 1** Bearing parameter values

Rotational speed	15,000rpm
Outer radius of thrust bearing	10mm
Inner radius of thrust bearing	5mm
Radius of journal bearing	10mm
Clearance of journal bearing	5 $\mu$ m
Land film thickness of thrust bearing	5 $\mu$ m
L over D of journal bearing	0.5
Eccentricity of journal bearing	0.0
Groove length ratio (common)	0.5
Groove angle of journal bearing	60°
Groove angle of thrust bearing	70°
Number of groove (common)	8
Groove depth (common)	12.5 $\mu$ m
Seal ratio of thrust bearing	0.5

2. 이론

2.1 해석모델

해석에 사용된 해석 모델을 Fig. 1에 나타내었다. 스러스트 베어링이 회전체의 축방향 하중을 지지하며 저널 베어링은 회전체를 반경 방향으로 지지한다. 스러스트 베어링은 Inward pumping 스파이럴 그루브 스러스트 베어링이며, 저널 베어링은 공기의 펌핑 방향을 고려한 Inclined 그루브 저널 베어링이다. 각각의 그루브 베어링에 기하학적 형상을 Fig. 2에 나타내었으며 설계 변수 값을 Table 1에 나타내었다.

2.2 지배방정식

등온, 등점성, 그리고 이상기체라는 가정하의 공기 유회환 스러스트 베어링과 저널 베어링에 대한 정상상태 레이놀즈 방정식은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( rph^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( ph^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 6\mu\omega r_o \frac{\partial}{\partial \theta} (rph) \quad (1)$$

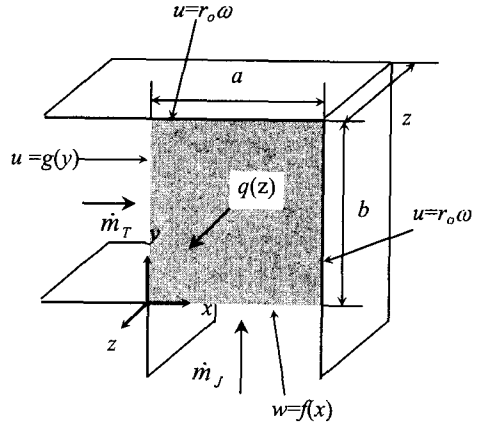
$$\frac{\partial}{\partial z} \left( ph^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( ph^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 6\mu\omega \frac{\partial}{\partial \theta} (ph) \quad (2)$$

여기서  $h$ 는 공기막의 두께로서 스러스트 베어링의 경우, 랜드 지역에서는 5 $\mu$ m, 그루브 지역에서는 17.5 $\mu$ m이며, 회전축이 동심 상태에서 회전하기 때문에 저널베어링의 공기막 두께도 랜드 지역에서는 5 $\mu$ m, 그루브 지역에서는 17.5 $\mu$ m이다. 각 베어링에 대한 압력 경계 조건은 다음과 같다.

스러스트 베어링의 경계 :  $p(r, \theta) = p_a$  (3a)

저널 베어링의 경계 :  $p(L, \theta) = p_a$  (3b)

압력 주기성 :  $p(\theta) = p(\theta + 2\pi)$  (3c)



**Fig. 3** Sectional diagram of duct

스러스트 베어링의  $r=r_o$ 인 경계와 저널 베어링의  $z=0$ 인 경계는 서로 연결되어 있는 상호 연결 경계로서 질량 보존을 만족하는 새로운 경계 조건이 필요하다.

2.3 덕트 모델(Duct model)

Fig. 3은 저널-스러스트 베어링이 연결된 상호 연결 부분을 나타내고 있다. 상호 연결 부분은  $x$ 방향과  $y$ 방향에 비해  $z$ 방향으로 매우 길기 때문에 단면이 사각형인 덕트로 생각할 수 있다. 이때 다음과 같은 가정을 하였다.

- ① 곡률 반경이 덕트의 폭과 높이에 비해 매우 크다
- ② 압력을 제외한 변수에 대해  $x$ 방향과  $y$ 방향의 변화율이  $z$ 방향 변화율에 비해 매우 크다.
- ③ 공기의 관성력은 매우 작아 무시할 수 있다.
- ④ 압력은  $z$ 만의 함수이다.

이러한 가정하에 Navier-Stokes Eq.로부터 다음과 같은 덕트 내의  $z$ 방향 속도  $u$ 에 대한 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4)$$

식 (4)를 덕트의 경계 조건을 이용하여 풀면  $x, y$ 방향으로의 속도 분포를 알 수 있으며, 이를 적분하여  $z$ 방향으로의 질량 유량  $q$ 를 구할 수 있다. 이때, 다음과 같이 Couette flow 성분  $q_c$ 와 압력차에 의한 Poiseuille flow 성분  $q_p$ 로 나타낼 수 있다.

$$q_c = \int_0^a \int_0^b \rho \{u_1(x, y) + u_2(x, y)\} dx dy \quad (5)$$

$$q_p = \frac{\rho b a^3}{12\mu} \left( -\frac{\partial P}{\partial z} \right) \left( 1 - \frac{192a}{\pi^3 b} \sum_{i=1,3,\dots} \frac{\tanh(inb/2a)}{i^3} \right) \quad (6)$$

$$q(z) = q_c + q_p \quad (7)$$

여기서  $u_1$  과  $u_2$  는 식 (4)의 homogeneous 해로서 부록에 기술하였다. 상호 연결 경계에서 질량 보존을 만족하는 유량 연속조건으로부터  $\dot{m}_j, \dot{m}_i$  와  $q(z)$ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$(\dot{m}_i + \dot{m}_j) dz = q(z + dz) - q(z) \quad (8)$$

$$\therefore \frac{\partial q}{\partial z} = \dot{m}_i + \dot{m}_j \quad (9)$$

식 (9)를 상호 연결 경계의 경계 조건으로 이용하여 공기막 내의 압력분포를 구할 수 있다.

### 3. 수치 해석 방법

공기막의 압력에 대한 지배방정식인 식 (1)과 식 (2)를 경계 조건 (3)과 더불어 식 (9)를 적용하여 풀기 위해 유한요소법을 이용하는 수치해석을 수행하였다. 식 (1)과 식 (2)는 압력에 관한 비선형 방정식이므로 압력해를 수렴시키기 위해 반복해법으로 계산하였으며 식 (10)과 같은 수렴조건을 이용하였다. 스러스트 베어링과 저널 베어링을 각각 3,200 개의 선형 요소로 나누었으며, 수치해석의 순서도는 Fig. 4 와 같다.

$$\sum \frac{|p_i^n - p_i^{n-1}|}{|p_i^n|} < 10^{-6} \quad (10)$$

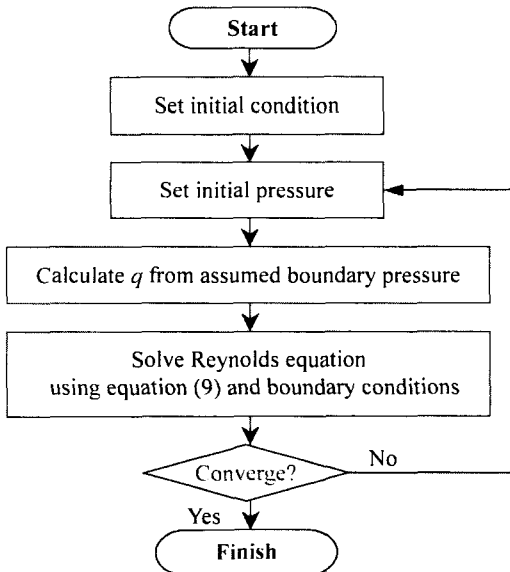


Fig. 4 Flow chart

### 4. 결과 및 고찰

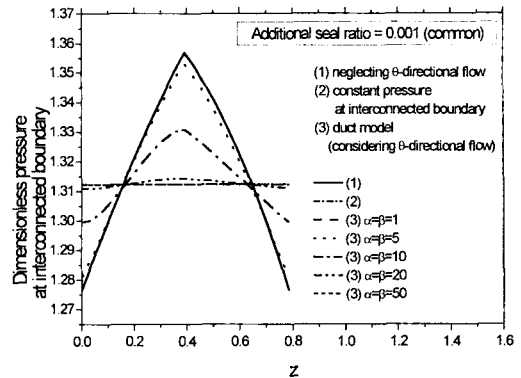
Fig. 5 의 (a)와 (b)는 각각 additional seal ratio 가 0.001 과 0.1 인 경우에 대해, 상호 연결 부분의 크기를 달리하며 계산한 압력 분포를 나타낸다. Fig. 5 의 경계 조건 (1)은 Lee<sup>(9)</sup> 등이 제시한 z 방향의 유량 흐름을 무시하는 경계 조건으로서  $q(z)=0$  인 다음과 같은 경계 조건식을 이용한다.

$$\dot{m}_i + \dot{m}_j = 0 \quad (11)$$

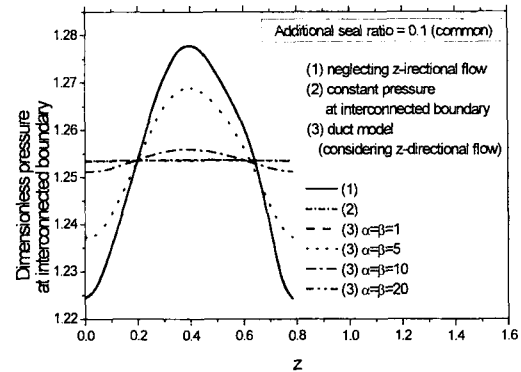
Fig. 5 의 경계 조건 (2)는 상호 연결 경계에서 압력이 z 방향으로도 일정하다는 가정을 이용한 것으로, 저널 베어링을 통해 나오는 유량의 총합과 스러스트 베어링을 통해 나오는 유량의 총합의 합이 0 이라는 다음과 같은 경계 조건식을 이용한다.

$$\int_0^{2\pi} \dot{m}_i dz + \int_0^{2\pi} \dot{m}_j dz = 0 \quad (12)$$

Fig. 5 의 경계 조건 (3)은 본 연구에서 제시한 덕트모델을 이용한 것으로서 상호 연결 부분의 크기를 달리하며 계산한 경우이다. 상호 연결 부분



(a)  $S_{A1}=0.001$



(b)  $S_{A1}=0.1$

Fig. 5 Pressure distribution at interconnected boundary

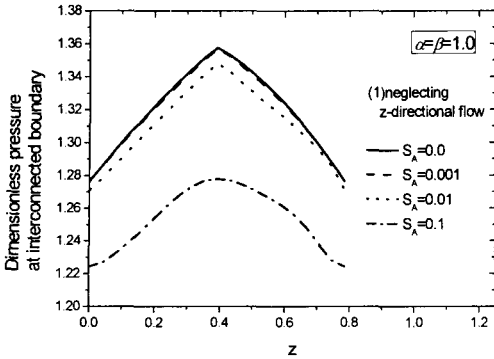


Fig. 6 Pressure distribution at interconnected boundary

에 해당하는 덕트의 부차원 길이와 높이를 나타내는  $\alpha$ 와  $\beta$ 가 모두 1인 경우는  $z$  방향 유량을 무시한 (1)번 경계 조건과 압력 값이 매우 유사하게 구해졌으나 덕트의 크기가 커짐에 따라 덕트가 일종의 압력 reservoir 역할을 하여 압력 분포의 형태가 점점 평탄해짐을 알 수 있다. 그리고  $S_A$ 가 0.1인 경우는  $\alpha=\beta=20$ 일 때,  $S_A$ 가 0.001인 경우에는  $\alpha=\beta=50$ 일 때, 덕트 모델을 이용하여 계산한 결과가 경계 조건 (2)를 사용했을 때의 결과와 거의 일치했다.

Fig. 6은 additional seal 비가 상호 연결 경계의 압력 분포에 미치는 영향을 나타낸 그림이다. Fig. 5에서  $\alpha=\beta=1$ 인 경우에 대해, 덕트 모델을 적용한 경우와  $z$  방향 유량을 무시한 경우의 압력 분포가 매우 유사하므로  $z$  방향의 유량 흐름이 없다는 경계 조건(1)을 이용하였다. 이 경우, 덕트 모델이 필요하지 않으므로 식 (11)을 이용하여 additional seal이 없을 때의 압력 분포도 계산할 수 있다.  $S_A$ 가 작아질수록 압력 분포 값이 증가하며 additional seal이 없는 경우의 압력 분포와 비슷해짐을 알 수 있으며, 또한  $S_A$ 가 작아질수록 상호 연결 경계에서 발생하는 압력의 크기가 커지는 것을 알 수 있다.

지금까지의 계산 결과를 살펴보면 상호 연결 경계의 압력이 대기압보다 30%정도 높은 것을 알 수 있다. 이는 스러스트 베어링과 저널 베어링이 상호 연결됨으로서 베어링의 그루브 지역이 넓어지고 펌핑하는 공기의 양도 많아지기 때문이다. 따라서 상호 연결 경계에서 대기압보다 높은 압력이 형성되므로 베어링의 성능 향상을 기대할 수 있다. Fig. 1에 나타난 해석모델은 연직 방향의 부하를 스러스트 베어링이 지지하므로 스러스트 베어링의 부하용량이 베어링의 중요한 성능이 된다. Fig. 7은 상호 연결 경계를 갖는 스러스트 베어링

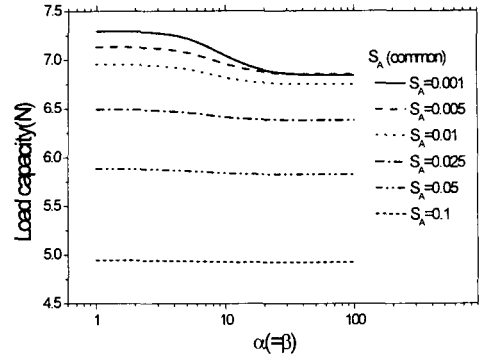


Fig. 7 Load capacity of thrust bearing

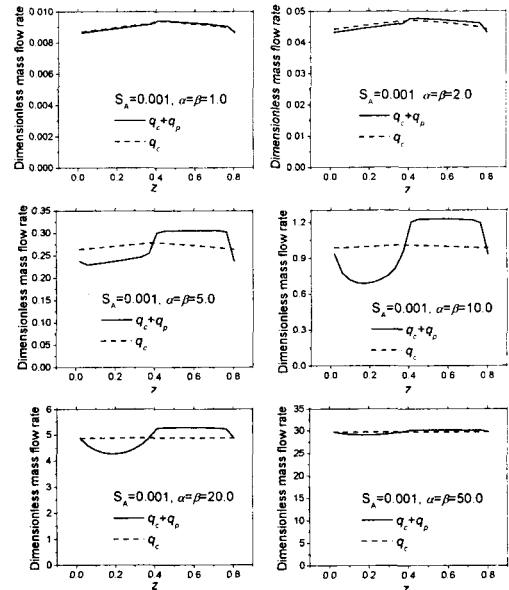


Fig. 8 Dimensionless mass flow rate

의 부하용량 변화를 여러가지 조건에 대해 계산한 결과를 나타낸다. Additional seal의 크기가 작아질수록, 그리고 상호 연결 부분의 크기가 작아질수록 부하용량이 커짐을 알 수 있다. 상호 연결 경계를 갖지 않는 스러스트 베어링의 부하용량이 1.22N인 것<sup>(5)</sup>과 비교하면 부하용량이 상당히 증가함을 알 수 있다.

Fig. 8은 상호 연결 부분의 부피가 상호 연결 경계의 압력 분포 변화에 미치는 영향을 알아보기 위해  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 달리하며 Couette flow 성분  $q_c$ 의 크기와 total flow 성분  $q_c+q_p$ 의 크기를 나타낸 것이다. 두 그래프의 차이가  $q_p$ 를 나타낸다.

덕트의 부차원폭과 부차원길이를 나타내는  $\alpha$ 와  $\beta$ 가 1일 때는 덕트의 크기가 매우 작으므로  $z$  방향 유량의 크기가 매우 작아서  $z$  방향 유량을 무

시켰을 때와 큰 차이가 없다고 생각된다.  $\alpha$ 와  $\beta$ 가 5 보다 커지기 시작하면 덕트의 크기가 비교적 커져서  $z$  방향 유량을 무시할 수 없게 되고, 특히 압력차에 의한 Poiseuille 성분의 크기가  $z$  방향으로 매우 달라지게 되어 압력 분포가  $z$  방향 유량을 무시한 경우와 더 이상 같지 않게 된다. 이 때문에 상호 연결 경계의 압력은  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 크기에 따라 매우 달라지게 된다.  $\alpha$ 와  $\beta$ 가 50 인 경우에는 덕트의 크기가 충분히 커져서 Couette 성분의 크기가 Poiseuille 성분의 크기보다 매우 크기 때문에 압력차에 의한 유량의 크기가 상대적으로 매우 작게 되어 압력 분포가 균일해진다.

### 5. 결론

본 연구에서는 저널-스러스트 베어링간에 상호 연결 경계가 동압 공기 윤활 베어링의 압력 분포 및 성능에 미치는 영향을 정량적으로 알아보기 위해 duct model 을 적용한 수치해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 저널-스러스트 베어링 사이의 상호 연결 경계의 압력 분포는 상호 연결 부분의 크기에 매우 큰 영향을 받는다. 상호 연결 경계의 무차원폭과 무차원 높이를 나타내는  $\alpha$ 와  $\beta$ 가 1 인 경우, 상호 연결 경계의 압력 분포는  $z$  방향 유량을 무시한 경우와 매우 흡사하나, 상호 연결 부분의 크기가 증가함에 따라 압력 분포는 균일해진다.

(2) 상호 연결된 저널-스러스트 베어링은 펌핑 영역이 확장되어 보다 큰 동압의 발생을 기대할 수 있다. 본 논문에서 해석된 결과에 따르면 상호 연결된 스러스트 베어링의 부하용량의 크기는 상호 연결되어 있지 않은 스러스트 베어링에 비해 5 배 정도 컸다.

### 후 기

본 연구는 산업자원부 산업기반기술개발사업 (A03-A07-2207-01)의 위탁과제로서 지원을 받아 수행되었으며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 참고문헌

(1) Malanoski, S. B. and Pan, C. H. T., 1965, "The Static and Dynamic Characteristics of the Spiral-Grooved Thrust Bearing," *ASME Journal of Basic Engineering*, Vol. 87, pp. 547~558.  
 (2) Bonneau, D., Huitric, J. and Tournerie, B., 1993, "Finite Element Analysis of Grooved Gas Thrust Bearing and Grooved Gas Face Seals," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 115, pp. 348~354.

(3) Satomi, T. and Lin, G., 1993, "Design optimization of Spirally Grooved Thrust Air Bearings for Polygon Mirror Laser Scanners," *JSME International Journal, Series C*, Vol. 36, No. 3, pp. 393~399.  
 (4) Faria, M. T. C., 1999, "An Efficient Finite Element Procedure for Analysis of High-Speed Spiral Groove gas Face Seals," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 123, pp. 205~210.  
 (5) Kang, J. H., Kim, K. W., 2001, "A Comparison Study on the Performance of Several Types of Air-Lubricated Hydrodynamic Thrust Bearings," *Journal of the KSTLE*, Vol. 18, No. 5, pp. 364~370.  
 (6) Vohr, J. H. and Chow, C. Y., 1965, "Characteristics of Herringbone-Grooved, Gas-Lubricated Journal Bearings," *ASME Journal of Basic Engineering*, Vol. 109, pp. 37~41.  
 (7) Bonneau, D. and Absi, J., 1994, "Analysis of Aerodynamic Journal Bearings With Small Number of Herringbone Grooves by Finite Element Method," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 116, pp. 698~704.  
 (8) Takuji Kobayshi, 1999, "Numerical Analysis of Herringbone-Grooved Gas-Lubricated Journal Bearings Using a Multigrid Technique," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 121, pp. 148~156.  
 (9) Lee, Y. B., Kwak, H. D., Kim, C. H. and Jang, G. H., 2001, "Analysis of Gas-Lubricated Bearings with a Coupled Boundary Effect for Micro Gas Turbine," *STLE Tribology Transactions*, Vol. 44, pp. 658~691.

### 부 록

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cosh \frac{n\pi}{a} y + B_n \sinh \frac{n\pi}{a} y \right\} \sin \frac{n\pi}{a} x \tag{13}$$

$$A_n = \frac{2}{a} \int_b^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx \tag{14}$$

$$B_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi}{a} b} \left( \frac{2}{a} \int_b^a r_0 \omega \sin \frac{n\pi}{a} x dx - A_n \cosh \frac{n\pi}{a} b \right) \tag{15}$$

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \cosh \frac{n\pi}{b} x + D_n \sinh \frac{n\pi}{b} x \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \tag{16}$$

$$C_n = \frac{2}{b} \int_b^a g(y) \sin \frac{n\pi}{b} y dy \tag{17}$$

$$D_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi}{b} a} \left( \frac{2}{b} \int_b^a r_0 \omega \sin \frac{n\pi}{b} y dy - C_n \cosh \frac{n\pi}{b} a \right) \tag{18}$$