강체모드분리와 급수전개를 통한 준해석적 민감도 계산 방법의 개선에 관한 연구(I)
- 정적 문제 -

조 맹 효† · 김 현 기*

(2002년 9월 2일 접수, 2003년 2월 19일 심사완료)

A Refined Semi-Analytic Sensitivity Study Based on the Mode Decomposition and Neumann Series Expansion (I)
- Static Problem -

Maenghyo Cho and Hyungi Kim

Key Words : Rigid Body Mode(강체모드), Semi Analytic Method(준해석적방법), Iterative Method(반복법), Perturbation Size(증분율), Eigenvalue Problem(고유치문제), Von Neumann Series(뉴만급수)

Abstract

Among various sensitivity evaluation techniques, semi-analytical method(SAM) is quite popular since this method is more advantageous than analytical method(AM) and global finite difference method(FDM). However, SAM reveals severe inaccuracy problem when relatively large rigid body motions are identified for individual elements. Such errors result from the numerical differentiation of the pseudo load vector calculated by the finite difference scheme. In the present study, an iterative method combined with mode decomposition technique is proposed to compute reliable semi-analytical design sensitivities. The improvement of design sensitivities corresponding to the rigid body mode is evaluated by exact differentiation of the rigid body modes and the error of SAM caused by numerical difference scheme is alleviated by using a Von Neumann series approximation considering the higher order terms for the sensitivity derivatives.

1. 서 론

민감도 해석은 구조물 설계와 해석에서 매우 중요하며, 설계 변화율에 기초한 최적화 기법에도 항상 필요하므로 민감도 해석의 신뢰도는 구조 설계에 필수적으로 요구된다. 이러한 민감도 해석 수행의 유한요소와의 연계는 일반적인 형상의 구조물에 대해서는 필수적이며, 이를 위해 직접 미분법보다는 수치 미분방법이 구현하기에 용이하고 적용이 간편하다. 특히 준해석적 방법에 의한 민감도 계산은 컴퓨터 자원을 많이 사용하지 않고 입출력 자료만으로 간단히 구현이 가능하므로 현재까지 가장 많이 선호되고 있다.

민감도 해석기법에는 미분 수행을 위한 여러 가지 방법이 있다. 기존의 방법에서는 유한차분법과 해석적 방법에 의해서 강성행렬의 미분을 수행하였다. 유한차분법은 요소형태에 의존하지 않고, 계산이 간단하다는 장점이 있으나 민감도 결과값이 증분율(perturbation size)의 크기에 크게 의존하며, 시간 측면에서도 매우 비효율적이다. 해석적 방법은 결과값으로서 엄밀해를 얻을 수 있고, 증분값과 무관하다는 잇점이 있으나, 요소 형태에 크게 영향을 받기 때문에 복잡한 요소에 대해서는 계산 자체가 어렵다는 문제가 있다. 기존의 준해석적 방법은 유한 차분법의 간편함과 해석적 방법이 갖는 해의 정확성을 모두 고려하는 방법으로 강성행렬의 미분항이 포함되는 가상하중벡터의 계산에서는 주로 유한차분법이 사용되었다. 이 방법

† 책임저자, 회원, 서울대학교 기계항공공학부
E-mail : mhcho@snu.ac.kr
TEL : (02)880-1693 FAX : (02)883-1513
* 회원, 서울대학교 기계항공공학부

은 1973 년 초에 Zienkiewicz 와 Campbell[1]에 의해 처음 제안되었다. Chen 과 Liu[2]는 Quasi-Analytic 방법을 제안하면서 이 방법의 효율성과 정확성을 제시하였다. 그러나, 이 방법은 구조물의 크기와 관련된 변수에 대해서는 비교적 정확한 민감도 결과를 제시하지만, 특정 형상변수에 대해서는 어떤 증분값에서도 신뢰할 수 있는 결과를 제시하지 못한다는 것이 보고되었다. 이런 문제점은 유한 차분법에 의해 계산된 미분항에서 truncation 오차가 발생하기 때문이며, 유한 요소 모델 자체가 정확한 민감도 결과를 제시할 만큼 충분히 정확하지 못한 것이 원인이 되었다.

그 후, 준해석적 방법을 통한 형상설계 민감도 해석의 근본적인 오차 원인이 구조물에서 발생하는 강체모드에 기인하는 것으로 보고되었다. 이 분석은 1988 년 Brthelemy[3]가 처음 제안한 것으로, 각 요소에서 발생하는 강체모드에 의해서 가상 하중 벡터의 정확도가 크게 영향을 받는다는 것을 의미한다. 1993 년 Cheng 과 Olhoff[4]는 준해석적 방법의 근원적인 원인을 발견하기 위해 강체운동시험을 소개하였고, 이 방법을 통해 강체모드에 의한 강체회전모드가 불규칙적인 truncation 오차와 관련된다는 것을 발견하였다. 그 후, Mlejnek[5]는 요소의 변위 벡터를 강체 모드부와 순수 변형부로 분리하여 강성행렬의 미분을 수행하였고, 최근에는 Van Keulen[6,7]에 의해서 Curved shell 요소내의 변위장을 순수변형부과 강체모드부로 분리하여 전체 민감도 중에서 강체 모드부의 영향을 해석적 방법으로 도출하는 민감도 해석기법을 제안하였다. Oral[8]은 Von Neumann 급수를 이용한 반복법에 의해 보와 평판문제에 적용하는 수학적 방법론을 제안하였다. 특히, 차분의 증분율이 큰 경우에는 truncation 오차가 전체 해석 결과에 큰 영향을 주게 되는데, Von Neumann 급수를 이용한 반복법으로 증분율이 큰 구간에서의 민감도 해석결과를 개선할 수 있음을 보였다.[9]

본 논문에서는 이 두 가지 방법이 각각 증분율이 큰 경우와 작은 경우에 민감도 해석의 결과를 개선한다는 점에 착안하여 두 방법을 조합한 준해석적 민감도 해석기법을 제안한다.[10] 요소내의 변위장을 강체모드와 순수 변형부로 나누어 강체모드부의 민감도는 해석적으로 계산하며 엄밀해로 계산되지 않는 부분에 대해서는 Von Neumann 급수에 의한 반복법을 사용하여 고차항을 추가함으로써 설계변수의 증분율이 큰 경우에도 수렴성이 보장되도록 하였다. 이 방법은 적용하기가 간편하고, 설계 변수의 차분 증분율이 작은 경우에도 신뢰도 높은 결과를 제공한다. 이 방법은 요소의 형태에 관계없이 일반적인 강체 모드 정식화에 의해 전개될 수 있으며 절점의 자유도에 관계없이 강체모드를 분리할 수 있다는 잇점을 갖고 있다.

2. 준해석적 방법의 개선

선형시스템의 지배방정식은 $\mathbf{K(d)u(d)=f(d)}$ 의 형태로 표현된다. 설계변수에 대한 변위 민감도 값을 구하기 위해서는 지배방정식의 설계변수에 대한 미분이 필요하며, 식 (1)과 같다.

$$\mathbf{K'u+Ku'=f'} \tag{1}$$

식 (1)에서 준해석적 방법은 요소단위의 강체모드가 큰 경우에 증분율에 따라 신뢰할 수 없는 결과를 나타내게 된다. 따라서, 대부분의 오차를 발생시키는 K' 에 대해서, 강체모드가 차지하는 오차부분을 제거해야 할 필요가 있다.

2.1 강체 모드의 분리

기본의 준해석적 방법은 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx}=\mathbf{K}^{-1}\left(\frac{d\mathbf{f}}{dx}-\frac{d\mathbf{K}}{dx}\mathbf{u}\right),\ x:(\text{설계변수}) \tag{2}$$

대부분의 오차는 $\frac{d\mathbf{K}}{dx}$ 를 차분으로 계산할 때 발생하게 되다. 따라서 개선된 방법을 통해 여기서 발생하는 오차를 줄이는 것이 필요하다.

$$\delta W_i=\delta\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{Ku}=\sum_{e=1}^{N}\delta\,\mathbf{u}_e\cdot\mathbf{K}_e\mathbf{u}_e,\ \begin{cases}\mathbf{K}_e\mathbf{r}=0 & \forall\mathbf{r}\in\Re_e\\ \mathbf{K}_e\mathbf{s}\neq 0 & \forall\mathbf{s}\notin\Re_e\end{cases} \tag{3}$$

여기서, $\Re_e$ 는 강체모드와 관련된 부공간이다.

식 (3)에서, 강체모드 벡터와 요소 강성행렬의 관계는 $\mathbf{K}_e\mathbf{r}_k=0(k=1,2...6)$ 으로 표현된다. 이 등식이 설계변수에 의해 미분되어지면, 식 (4)와 같이 나타내어 진다.

$$\mathbf{K}'_e\mathbf{r}_k+\mathbf{K}_e\mathbf{r}'_k=0 \tag{4}$$

변위장은 다음의 과정을 통해서 순수변형부와 강체 모드부로 분리할 수 있다.

$$\mathbf{u}_e=\mathbf{u}_e^{\varepsilon}+\sum_{k=1}^{r}\frac{\mathbf{u}_e\cdot\mathbf{r}_k}{\mathbf{r}_k\cdot\mathbf{r}_k}\mathbf{r}_k=\mathbf{u}_e^{\varepsilon}+\sum_{k=1}^{r}\alpha^k\mathbf{r}_k \tag{5}$$

α^k 는 변위장 벡터를 강체모드벡터와의 내적을 통해서 강체모드 부분을 분리한 크기를 의미한다. 이 식을 가상 하중벡터에 대입하면, 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{q}_e=\mathbf{f}'_e-\mathbf{K}'_e\mathbf{u}_e=\mathbf{f}'_e-\mathbf{K}'_e\mathbf{u}_e^{\varepsilon}-\mathbf{K}'_e(\alpha^k\mathbf{r}_k) \tag{6}$$

식 (4)의 관계로부터 식 (6)의 마지막 항은 다음과 같이 전개될 수 있다.

$$\mathbf{K}'_e(\alpha^k\mathbf{r}_k)=\alpha^k(\mathbf{K}'_e\mathbf{r}_k)=-\alpha^k(\mathbf{K}_e\mathbf{r}'_k) \tag{7}$$

따라서, 가상 하중벡터는 식 (8)로 정리할 수 있다.

$$\mathbf{q}_e=\mathbf{f}'_e-\mathbf{K}'_e\mathbf{u}_e^{\varepsilon}+\alpha^k\mathbf{K}_e\mathbf{r}'_k \tag{8}$$

식 (8)에서, 하중벡터의 변화가 없다고 한다면, 두번째항은 유한 차분법으로 계산되어지고, 세번째 항은 엄밀하게 계산되어 진다. 따라서, 차분에 의해 계산되어지는 $\mathbf{K}_e^{'}$에서 대부분의 오차가 발생하게 된다. 그러나, 수치적인 미분을 통해 더 정확하게 $\mathbf{K}_e^{'}\mathbf{u}_e^{\varepsilon}$을 전개하는 것이 가능하다. 이것은 내적을 통해서 이 성분에서 강체모드의 성분을 분리함으로써 가능하다. 따라서 요소별 가상하중벡터는 식 (9)와 같이 구성되어 진다.

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e^{'} - \mathbf{K}_e^{'}\mathbf{u}_e^{\varepsilon} + \left[\frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{K}_e^{'}\mathbf{u}_e^{\varepsilon}}{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k}\right]\mathbf{r}_k + \left[\frac{\mathbf{r}_k^{'} \cdot \mathbf{K}_e\mathbf{u}_e^{\varepsilon}}{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k}\right]\mathbf{r}_k + \alpha^k \mathbf{K}_e \mathbf{r}_k^{'} \quad (9)$$

2.2 강체 모드 분리방법

2.2.1 벌칙기법에 의한 혼합요소의 변경

본 연구에서는 Aminpour[11]가 제안한 4 절점 혼합 쉘 요소를 예로 하여 본 연구에서 제한하는 준해석적 민감도 기법을 정립하고자 한다. 강체모드를 구성하기 위해서는 각 요소의 제로 고유치가 자유도의 개수와 일치해야 한다. 본 논문에서 사용하는 혼합 요소는 면내 회전각 자유도를 가지고 있기 때문에 $\theta_z = \frac{1}{2}(u_{,y} - v_{,x})$을 구속조건으로 이용하여 허구 강체모드를 제어하였다. 구속조건을 고려한 Hellinger-Reissner functional 은 아래식과 같다. 응력장 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$와 변위장 $\{\mathbf{u}\}$의 보간함수는 참고문헌 (10) 에 상세히 기술되어 있다.

$$\pi_{HR} = -\frac{1}{2}\int_V \{\sigma\}^T [D]\{\sigma\} dV + \int_V \{\sigma\}^T [L]\{u\} dV - \int_S u^T t_o ds + k \int_x \left\{\theta_z - \frac{1}{2}\left(u_{,y} - v_{,x}\right)\right\}^2 ds \quad (10)$$

여기서, k 는 벌칙계수이며, 수치계산에서는 10^9 을 사용하였다.[12]

2.2.2 강체 모드벡터 전개

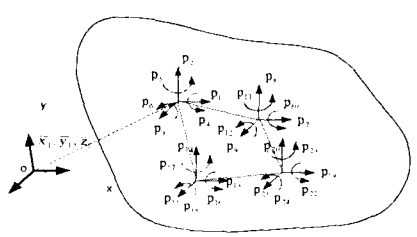


Fig. 1 Rigid body mode of rotation and translation part for 4 node element with 6 degree-of-freedom

Fig. 1 에서, 강체모드 조건을 만족시키는 힘 평형식과 모멘트 평형식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_1 + p_7 + p_{13} + p_{19} &= 0 \\ p_2 + p_8 + p_{14} + p_{20} &= 0 \\ p_3 + p_9 + p_{15} + p_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &-p_2\bar{z}_1 + p_3\bar{y}_1 + p_4 - p_8\bar{z}_2 + p_9\bar{y}_2 + p_{10} - p_{14}\bar{z}_3 + p_{15}\bar{y}_3 + p_{16} - p_{20}\bar{z}_4 + p_{21}\bar{y}_4 + p_{22} = 0 \\ &p_1\bar{z}_1 - p_3\bar{x}_1 + p_5 + p_7\bar{z}_2 - p_9\bar{x}_2 + p_{11} + p_{13}\bar{z}_3 - p_{15}\bar{x}_3 + p_{17} - p_{19}\bar{z}_4 + p_{21}\bar{x}_4 + p_{23} = 0 \\ &-p_1\bar{y}_1 + p_2\bar{x}_1 + p_6 - p_7\bar{y}_2 + p_8\bar{x}_2 + p_{12} - p_{13}\bar{y}_3 + p_{14}\bar{x}_3 + p_{18} - p_{19}\bar{y}_4 + p_{20}\bar{x}_4 + p_{24} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

위의 식 (11)과 식 (12)의 평형식들을 자유도를 고려하여 정리하면 식 (13)에 주어진 것과 같은 강체모드행렬을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} I & [0] & I & [0] & I & [0] & I & [0] \\ 0 & -\bar{z}_1 & \bar{y}_1 & 0 & -\bar{z}_2 & \bar{y}_2 & 0 & -\bar{z}_3 & \bar{y}_3 & 0 & -\bar{z}_4 & \bar{y}_4 \\ \bar{z}_1 & 0 & -\bar{x}_1 & I & \bar{z}_2 & 0 & -\bar{x}_2 & I & \bar{z}_3 & 0 & -\bar{x}_3 & I & \bar{z}_4 & 0 & -\bar{x}_4 & I \\ -\bar{y}_1 & \bar{x}_1 & 0 & -\bar{y}_2 & \bar{x}_2 & 0 & -\bar{y}_3 & \bar{x}_3 & 0 & -\bar{y}_4 & \bar{x}_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서, I 는 (3×3) 단위행렬, $[0]$는 (3×3) 0 행렬을 의미한다.

식 (11)과 식 (12)는 강성행렬의 정보와 관계없이 절점 자유도 정보를 갖고 있는 어떤 유한요소 형태에도 적용되어 질 수 있다. 식 (13)으로부터, 병진과 회전강체모드 벡터는 다음과 같이 정리된다.

병진 강체 모드

$$\begin{bmatrix} \tilde{r}_1^T \\ \tilde{r}_2^T \\ \tilde{r}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100000100000100000100000 \\ 010000010000010000010000 \\ 001000001000001000001000 \end{bmatrix} \quad (14)$$

회전 강체 모드

$$\begin{bmatrix} \tilde{r}_4^T \\ \tilde{r}_5^T \\ \tilde{r}_6^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-z_1\,y_1\,1\,0\,0\,0-z_2\,y_2\,1\,0\,0\,0-z_3\,y_3\,1\,0\,0\,0-z_4\,y_4\,1\,0\,0 \\ z_1\,0-x_1\,0\,1\,0\,z_2\,0-x_2\,0\,1\,0\,z_3\,0-x_3\,0\,1\,0\,z_4\,0-x_4\,0\,1\,0 \\ -y_1\,x_1\,0\,0\,0\,1-y_2\,x_2\,0\,0\,0\,1-y_3\,x_3\,0\,0\,0\,1-y_4\,x_4\,0\,0\,0\,1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

식 (14)와 식 (15)로부터 설계변수 x 에 대한 강체모드의 미분식은 식 (16)과 같이 전개된다.

$$\tilde{\mathbf{r}}_k^{'} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_k}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_k}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_k}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_k}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x} \quad (16)$$

2.2.3 강체모드의 직교화

앞에서 구한 강체모드 벡터의 직교화는 정식화에서 많은 잇점을 갖고 있다. 직교화 과정을 통해 복잡한 계산을 피할 수 있고, 각각의 강체모드를 기준축으로 일반화 시킬 수 있다. 직교화 수행을 위해서 *Gram-Schmidt procedure* 가 사용되었으며, 비직교화된 벡터 $\tilde{\mathbf{r}}_k$ 가 직교벡터 $\mathbf{r}_k$ 로 변환된다. 구체적인 방법은 식 (17)과 같다.

$$\mathbf{r}_k=\begin{cases}\tilde{\mathbf{r}}_k & if\ k\in\{1,2,3\}\\ \tilde{\mathbf{r}}_k-\sum_{p=1}^{n}a_k^p\,\mathbf{r}_p & if\ k\in\{4,5,6\}\end{cases},\quad a_k^p=\begin{cases}\dfrac{\tilde{\mathbf{r}}_k\cdot\mathbf{r}_p}{\mathbf{r}_p\cdot\mathbf{r}_p} & if\ p<k\\ 0 & if\ p\geq k\end{cases}\qquad(17)$$

설계 변수에 대한 직교화된 강체모드벡터의 미분 전개는 식 (18)과 같다.

$$\mathbf{r}_k'=\begin{cases}0 & if\ k\in\{1,2,3\}\\ \tilde{\mathbf{r}}_k'-a_k^p\,\mathbf{r}_p-a_k^p\,\mathbf{r}_p' & if\ k\in\{4,5,6\}\end{cases}\qquad(18)$$

3. 반복법에 의한 준해석적 방법의 개선

개선된 준해석적 방법에서 $\frac{d\mathbf{K}}{dx}$ 의 수치적 오차는 강체모드를 분리하여 제거하였다. 그러나 강체모드가 제거된 순수변형부는 차분으로 계산되어지기 때문에, 그 부분의 오차 또한 최소화 시킬 필요가 있다.

평형방정식 $\mathbf{Ku}=\mathbf{F}$ 는 증분율을 사용하여 식 (19)로 표현할 수 있다[9].

$$\Delta\mathbf{K}\mathbf{u}+\mathbf{K}\Delta\mathbf{u}=\Delta\mathbf{F}\qquad(19)$$

식 (19)에 두 개의 새로운 항 $\mathbf{Ku}+\Delta\mathbf{K}\Delta\mathbf{u}$ 을 추가하면 식 (20)과 같이 된다.

$$\Delta\mathbf{K}\mathbf{u}+\mathbf{K}\Delta\mathbf{u}+\mathbf{K}\mathbf{u}+\Delta\mathbf{K}\Delta\mathbf{u}=\Delta\mathbf{F}+\mathbf{F}+\Delta\mathbf{K}\Delta\mathbf{u}\qquad(20)$$

식 (20)에서 변화된 변위값을 구하게 되면 다음과 같다.

$$(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})=\left(\mathbf{I}+\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}\right)^{-1}\left(\mathbf{u}+\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{F}+\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}\Delta\mathbf{u}\right)\qquad(21)$$

식 (21)의 $\left(\mathbf{I}+\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}\right)^{-1}$ 는 Von Neumann 급수에 의해 $\left\|\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}\right\|<1$ 인 경우, 식 (22)로 전개될 수 있다.

$$\left(\mathbf{I}+\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}\right)^n\qquad(22)$$

식 (22)를 식 (21)에 대입하게 되면 변위의 변화값은 식 (23)과 같다.

$$\Delta\mathbf{u}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}\right)^n\mathbf{u}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}\right)^{n+2}\mathbf{u}\qquad(23)$$

식 (23)에 식 (5)를 대입하면 변위 변화율은 최종적으로 다음과 같이 얻어지게 된다.

$$\frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta d_i}=-\mathbf{K}^{-1}(\Delta\mathbf{K}-\Delta\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}\ldots)\left(\mathbf{K}_e'\mathbf{u}_e^e-\left[\frac{\mathbf{r}_k\cdot\mathbf{K}_e'\mathbf{u}_e^e}{\mathbf{r}_k\cdot\mathbf{r}_k}\right]\mathbf{r}_k\right)\qquad(24)$$
$$+\left[\frac{\mathbf{r}_k'\cdot\mathbf{K}_e\mathbf{u}_e^e}{\mathbf{r}_k\cdot\mathbf{r}_k}\right]\mathbf{r}_k+\alpha^k\mathbf{K}_e\mathbf{r}_k'$$

식 (24)에서 우변 첫 번째 항은 반복법에 의해 계산 되어지고, 두 번째 항은 엄밀해에 의해 계산되어 진다. 두 번째 항의 $\mathbf{K}_e'$ 은 유한차분에 의해 계산되어 지고, $\mathbf{r}_k'$ 는 엄밀해로써 전개되어진다. 첫 번째 항은 반복법으로 계산되지만, 많은 양의 메모리 저장이나 시간을 필요로 하지 않으며, 1 회에서 2 회의 반복만으로도 수렴값을 얻을 수가 있다.[13] 단지, $\mathbf{K}^{-1}$ 계산을 위한 가우스 소거법 루틴과 저장만이 요구될 뿐이다.

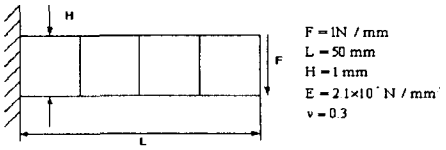


Fig. 2 Cantilever beam configuration under tip load

4. 수치 예제

본 연구에서 제시한 방법의 효과와 신뢰성을 증명할 수 있는 몇 가지 수치예제를 보이고자 한다. 수치예제는 강체모드가 큰 경우와 크지 않은 경우의 두 가지 종류의 문제를 해석하였다. 강체모드가 큰 모델에서는 강체모드 부분을 엄밀하게 계산하는 방법이 기존의 준해석적 방법에 비해 어느 정도의 효율성과 해의 정확성을 갖고 있는지 그 결과를 알 수 있고, 강체모드가 크지 않은 모델은 유한 차분에 의한 계산에서 반복법을 통한 고차항의 추가에 의해 개선된 방법이 증분율이 큰 범위에서 강체모드분리 방법을 어느 정도 개선 시킬 수 있는지를 확인할 수 있다.

4.1 외팔보

Fig. 2 는 끝단에서 전단력이 작용하는 외팔보문제이다. 해석을 위해 입력된 물성치는 Fig. 2 에 주어져 있다. 문제의 목적은 끝단에서 설계변수 L 에 관한 변위민감도를 계산하는 것이다. 경계조건은 고정 경계이며, 끝단에서의 변위엄밀해 u_{exact} 와 변위민감도 엄밀해 u_{exact}' 는 식 (25)와 같다.

$$u_{exact}'=12\frac{FL^2}{EH^3}=3\frac{u_{exact}}{L}\qquad(25)$$

Fig. 3 은 외팔보의 민감도 해석 결과를 로그 단위로 나타낸 도표이다. 결과에서 유한차분법과 준해석적 방법은 증분율에 따라서 일정한 수렴성을 보이지 않고 있다. $10^{-5}\sim10^{-8}$ 까지는 좋은 수렴성을 보이지만, 나머지 범위에서는 불규칙한 결과를 보이고 있다. 특히, 10^{-10} 범위를 벗어나면 큰 오차를 나타내며 발산하는 경향을 보이고 있다. 그러나, 강체모드와 반복법을 고려한 해석 결과는 $10^{-2}\sim10^{-12}$ 까지 안정적인 수렴성을 보이고 있으며, 이러한 경향은 뒤에서 제시하게 될 문제에서도 나타나고 있다.

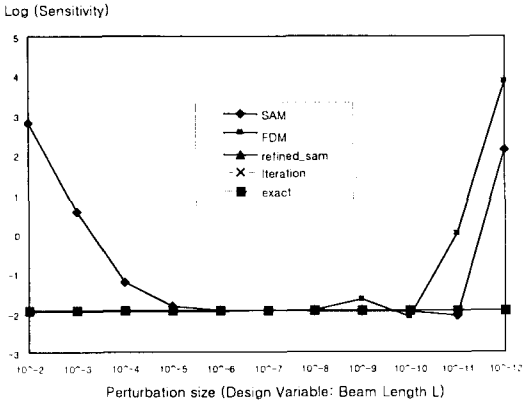
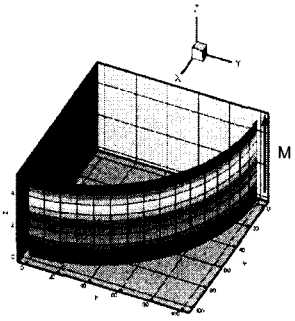


Fig. 3 The sensitivity of the vertical tip displacement u with respect to the beam length L.



$M = 1\,N/mm$
$R = 100\,mm$
$t = 0.6\,mm$
$E = 3\times10^{5}\,N/mm^{2}$
$\nu = 0.3$
$\phi = \frac{\pi}{2}$

Fig. 4 Pure bending problem of cylindrical panel

4.2 실린더

Fig. 4 는 실린더 한쪽은 고정되어 있고, 반대편에 순수 굽힘 모우먼트가 작용하고 있는 문제이다. 설계변수는 ϕ 이며, 끝단에서의 변위 u_y 와 민감도 u_y' 의 엄밀해는 식 (26)에 주어져 있다.

$$u_{y,exact} = -R\sin\phi + \frac{R}{C+1}\sin\left([C+1]\phi\right)$$
$$u'_{y,exact} = -R\cos\phi + R\cos\left([C+1]\phi\right) \qquad (26)$$

여기서, $C = 12\dfrac{MR(1-\nu^2)}{Et^3}$ 이다.

수치해석 결과는 Fig. 5 에서 로그 단위로 나타내었다. 유한차분법은 초기 증분율에 대해서는 안정적인 수렴성을 보이다가 10^{-8}부터 수렴성이 급격히 떨어지는 것을 볼 수 있다. 기존의 준해석적 방법은 10^{-5} 에서 수렴값을 갖지만, 10^{-8} 에서 오차가 급격히 증가하고 있다. 반면 강체모드와 반복법에 의한 해석 결과는 증분율에 관계없이 안정적인 수렴성을 보이고 있다. 이것은 유한 차분법과 기존의 준해석적 방법의 신뢰도가 증분율에 크게 의존한다는 것을 의미하는 것이다.

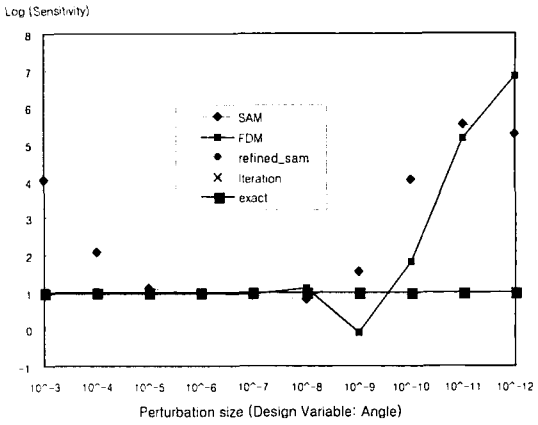


Fig. 5 The sensitivities of the tip displacement u_y of cylindrical panel that is loaded by a distributed bending moment (the result of the cylindrical panel)

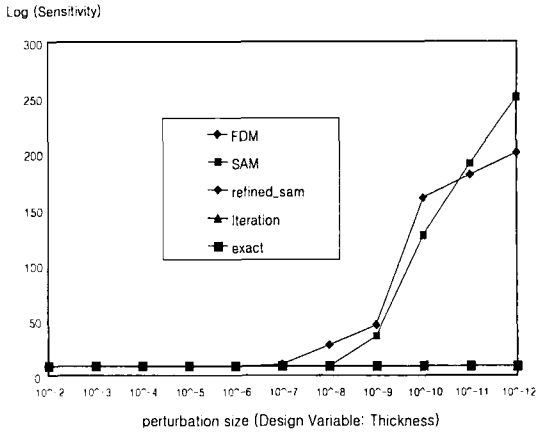
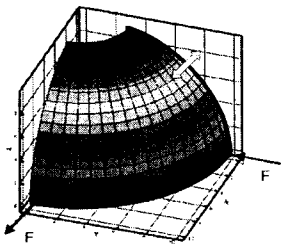


Fig. 6 The sensitivities of the tip displacement u_y of cylindrical panel (design variable : thickness)

Fig. 6 은 설계변수가 두께 t 일 때의 결과을 보여주고 있다. 설계변수가 각도 ϕ 일 경우는 요소단위의 강성행렬의 변화가 전체구조물의 지엽적인 부분에서만 발생하게 된다. 그러나, 구조물의 두께가 설계변수일 경우는 구조물 전체의 요소단위 강성행렬이 변하게 되므로 강체모드 분리방법의 효율성을 더욱 확연히 보여줄 수 있는 예제라 할 수 있다. Fig. 6 의 결과에서 증분율 10^{-7}까지는 모든 방법의 수렴성이 안정적인 것을 확인할 수 있다. 그러나, 10^{-7} 이상의 범위에서는 준해석적 방법과 유한차분법은 수렴값을 갖지 못하고 발산하는 경향을 보인다. 특히, 유한차분법은 준해석적 방법에 비해 더욱 빨리 발산하고 있음을 알 수 있다.



$R = 10mm$
$t = 0.04mm$
$E = 6.825 \times 10^7$
$\nu = 0.3$
$F = 1.0N$

Fig. 7 Hemisphere analysis configuration and conditions

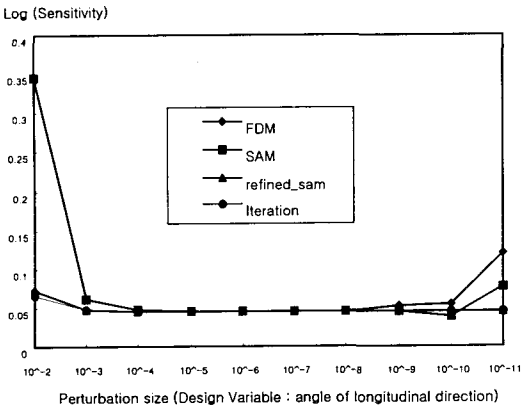


Fig. 8 Sensitivity is calculated at the 0°,90° along the equator (The result of the hemisphere analysis)

4.3 반구

Fig. 7 은 반구의 적도를 따라 90 도 위치에서 변위의 민감도를 구하는 문제이다. 반구는 상부에서 18°가 제거되었다. 변위 엄밀해는 0.094 이고, 설계변수는 굵게 표시된 부분이고, 화살표는 설계변수의 변경방향이다. 변위민감도 값은 적도를 따라 0°와 90°에서 계산되었다. Fig. 8 에서, 준해석적 방법의 수렴성은 증분율이 큰 경우에는 좋은 결과를 주지 못하고 있으며 증분율이 10^{-9}이하일 경우에는 발산하고 있다. 유한 차분법도 준해석적 방법의 결과와 유사한 경향을 나타내고 있다. 반면, 강체모드분리 방법과 반복법은 전영역의 증분율에서 신뢰할 수 있는 결과를 제시한다. 10^{-3} 이상의 증분율에서는 반복법이 강체모드 분리법에 비해 더 좋은 결과를 나타내고 있지만, 그 편차는 매우 작기 때문에 큰 의미가 없는 것으로 판단된다.

4.4 인장력이 작용하는 외팔보

앞에서 해석하였던 강체모드가 큰 모델에서는 $\frac{d\mathbf{K}}{dx}$의 차분계산에 대한 반복법의 영향이 크게 작용하지 않았다. 그것은 구조물에 횡전단 하중이 작용할 경우 구조물의 변위장에서 강체모드가 차지하는 비율이 커지게 되므로, 결과적으로 강체모드 부분이 차분에 의해 계산되는 부분에 비해 민감도에 미치는 영향이 훨씬 커지게 된다. 따라서, 고차항을 추가하여 차분의 계산 영역을 개선시키더라도 계산결과에는 영향을 크게 미치지 못하게 된다. 그러나 여기에서 제시하는 인장력이 작용하는 문제에서는 강체모드가 크지 않기 때문에, 요소내의 변위장에서 민감도를 산출할 때 강체모드가 차지하는 부분과 순수변형부분 사이에 큰 차이가 나지 않는다. 따라서, 고차항의 추가에 대한 영향력을 결과적으로 알 수 있는 문제이다. 해석에 사용된 물성치와 끝단에서의 u 방향으로의 엄밀해는 식 (27)과 같다.

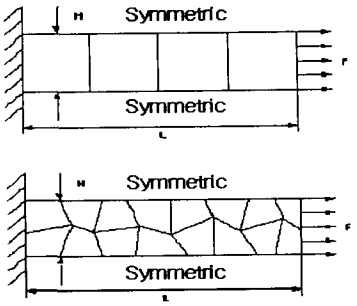


Fig. 9 Strip model in tension with regular mesh & irregular mesh

$$u'_{exact} = \frac{F(1-\nu^2)}{Et} = 4.55 \times 10^{-6},$$
$$\text{F=1N/mm, L=100mm,} \tag{27}$$
$$\text{t=1mm, E=}2\times10^5 N/mm,\ \nu = 0.3,\ H = 20mm$$

해석은 균일 격자와 불균일 격자에 대해서 수행하였고, 그 형상은 Fig. 9 에 주어져 있다.

Fig. 10 과 Fig. 11 은 민감도 해석 결과를 나타낸다.이다. 구조물에 인장력이 작용하는 문제에서는 유한차분법과 반복법을 사용한 해석 방법이 좋은 결과를 내고 있음을 알 수 있다. 강체모드분리법과 기존의 준해석적 방법은 증분율 10^{-4} 범위까지는 수렴성이 떨어진다. 이것은 $\mathbf{K}'$ 부분에서 증분값이 큰 값일 때 truncation 오차가 크기 때문에 생기는 것으로 증분율이 작아질수록 그 오차는 감소하게 된다. 불균일 격자에서도 동일한 경향을 나타내고 있다. Fig. 10 에서는 중앙차분법에 의해 강체모드분리법의 결과를 다소 개선시키는 결과를 보여주고 있지만, 그 값은 매우 작기 때문에 큰 의미가 있는 것으로는 볼 수 없다. 만약, 중앙 차분법을 사용하여 반복법의 결과를 개선시킨다면 그 결과는 강체모드의 개선보다는 더욱 좋은 결과를 얻을 수 있을 것으로 사료된다.

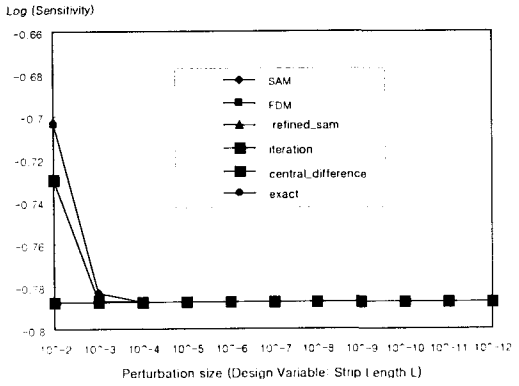


Fig. 10 The analysis result of strip in tension corresponding with regular mesh

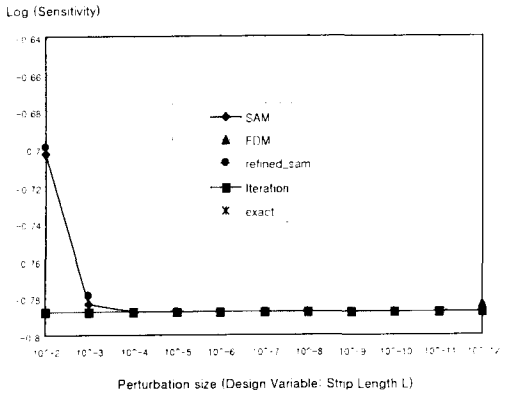


Fig. 11 The analysis result of strip in tension corresponding with irregular mesh

5. 결 론

지금까지 민감도 해석기법을 위한 많은 방법이 제안되어 왔다. 여러 가지 방법들 중에서 유한차분법과 해석적 방법은 시간적인 측면과 메모리 측면에서 많은 비용을 필요로 하기 때문에, 지금까지는 공식화가 쉽고 해의 정확성이 높은 준해석적 방법이 가장 많이 사용되어 왔다. 그러나 기존의 준해석적 방법은 유한차분법과 해석적 방법에 비해 메모리와 연산시간을 절약할 수 있고, 간단한 계산으로도 비교적 정확한 민감도 결과를 얻을 수 있었지만 정적문제에서 상대적으로 강체모드가 큰 경우에는 증분율의 선택에 따라서 심각한 부정확성을 나타내고 있음이 보고되어 왔다. 특히, 증분율 10^{-1} ~ 10^{-7}의 범위에서는 truncation 오차가 주된 원인이고 10^{-8} 이하의 범위에서는 round-off 오차가 주된 원인이 된다. 이 문제는 최근 Van.Keulen 과 H.De.Boer 가 강체모드 분리에 의해서 그리고, Oral 이 반복법에 의해서 그 문제점을 개선하여 왔다.

본 논문에서는 이 두가지 방법을 조합하여 민감도 해석 결과를 증분율에 관계없이 개선시킬 수 있는 방법을 제안하고 있다. 모드분리와 강체모드의 엄밀한 미분은 round-off 오차를 감소시키고, 반복법은 truncation 오차를 제거하는 효과를 갖고 있다. 변위장으로부터 강체모드를 분리하고, 직교화된 강체모드를 사용하여 Von Neumann 급수전개를 통한 반복법에 의해 기존의 민감도 해석방법들과 수렴값의 효율성을 비교한 결과를 제시하였다. 증분율이 10^{-5} 이하일 경우에는 반복법의 성능 개선이 확연히 나타나지는 않는다. 그러나 증분율이 큰 경우는 반복법을 사용하지 않는 경우보다 수렴속도를 개선할 수 있고, 오차를 크게 줄일 수 있는 것을 확인할 수 있었다.

결론적으로, 변위장을 순수변형부와 강체모드부로 분리하여 계산함으로써 오차감소의 효과를 얻을 수 있고, truncation 오차는 반복법을 이용한 고차항의 추가로서 개선할 수 있었다. 본 연구에서 제시한 민감도 계산법은 계산 효율이 높고 정확도가 보장되며, 구현하기가 간편하므로 상용유한요소 소프트웨어에도 쉽게 적용할 수 있을 것으로 판단된다.

후 기

이 논문은 2002 년도 두뇌한국 21 사업에 의해 지원되었음.

참고문헌

(1) Zienkiewicz O.C. and Campbell J.S., 1973, "Shape Optimization and Sequential Linear Programming," In: Gallgher RH, Zienkiewicz OC,editors. *Optimum structural design*. NewYork: Wiley, pp. 109~127.

(2) Cheng, G. and Liu, Y. 1987, "A New Sensitivity Scheme for Sensitivity Analysis," *Engineering Optimization*, Vol. **12**, pp. 219~234.

(3) Barthelemy, B. and Haftka, R.T. 1990, "Accuracy Analysis of the Semi-Analytical Method for Shape Sensitivity," *Mech.Struct.Mach.*, Vol. **18**, pp. 407~432.

(4) Cheng, G. and Olhoff, N. 1993, "Rigid Body Motion Test in Semi-Analytical Sensitivity Analysis," *Computers and Structures*, Vol. **46**(3), pp. 515~527.

(5) Mlejnek, H.P., 1993, "Accuracy of Semi-Analytical Sensitivities and Its Improvement by the Natural Method', Struct.Optim.,Vol. **4**, pp. 128~131.

(6) Van Keulen, F. and De Boer, H. 1998, "Rigorous Improvement of Semi-Analytical Design Sensitivities by Exact Differentiation of Rigid Body Motions," *Int.J.Numer.Mech.Engng.*, Vol. **42**, pp. 71~91.

(7) De Boer, H. and Van Keulen, F. 2000, "Refined Semi-Analytical Design Sensitivities," *Int.J.Solids Struct.*, Vol. **37**, pp. 6961~6980.

(8) Suha Oral, 1996, "An Improved Semi-Analytical Method for Sensitivity Analysis," *Structural Optimization*, Vol. **78**, pp. 467~472.

(9) Suha Oral, 2000, "A Mindlin Plate Finite Element with Semi-Analytical Shape Design Sensitivities," *Computers and Structures*, Vol. **78**, pp. 467~472.

(10) Cho, M. and Kim, H. 2002, "A Refined Semi-Analytic Sensitivity Based on the Mode Decomposition and Neumann Series Expansion," AIAA/ASME/ASCE/ AHS/ASC,43rd SDM Conference, pp. 2002~1738.

(11) Aminpour, M.A. 1992, "An Assumed Stress Hybrid 4 Node Shell Element with Drilling Degrees of Freedom," *Int.J.Numer.Mech.Engng.*, Vol. **33**, pp. 19~38.

(12) Kim, H. and Cho, M. 2001, "A Study on the Improvement of Shape Desing Sensitivity in Eigenvalue Problems Using Semi-Analytical Method," Proc.COSEIK Symposium-Fall, pp. 159~165.

(13) Kim, H. 2002, "A Study of Refined Semi-Analytic Sensitivity Based on the Finite Element," M.S.Thesis, Seoul National University.