대한수학교육학회지 <학교수학> 제 5 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.5, No.1, 135-149. Mar 2003

# 학생들의 미분방정식 개념에 대한 수학적 은유의 분석: 개념적 모델의 이중성에 대한 사회문화적 관점[1)]

주 미 경* · 권 오 남**

대학 미분방정식 수업 개발의 일환으로서 본 연구는 학생들의 미분방정식에 관한 개념적 모델을 탐구하는 것에 초점을 두고 진행되었다. 본 연구가 이루어진 미분방정식 수업은 해석적, 질적, 그래프적, 수치적 방법 등의 다양한 수학적 방법의 적용에 기초하여 학생들이 능동적인 수학적 토의를 통해 미분방정식 주요 개념의 재발명해 가는 것을 강조하였다. 이러한 수업 맥락에서 본 연구는 학생들의 수학적 토의 과정에 나타나는 개념적 은유의 사용패턴을 탐구하였다. 본 논문에서는 발화 분석을 통해 추출된 미분방정식에 관한 학생들의 개념적 모델을 구성하는 주요한 개념적 은유인 '기계은유'와 '가상적 운동 은유'와 이들 각 개념적 은유의 수학적 특성을 제시한다. 끝으로, 본 연구의 수학적 발화 분석 결과에 기초하여 학생들의 개념적 모델의 이중성의 의미를 사회문화적 시각에서 해석하고 학교 수학에 주는 시사점에 대해 논의한다.

## Ⅰ. 개념적 모델로서 개념적 은유

본 연구는 대학 미분방정식 수업에 참여하는 학생들의 수학적 의사소통 상황에서 나타나는 발화를 중심으로 학생들의 수학적 개념의 특성을 탐구하는 하는 것에 초점을 두고 진행되었다. 구체적으고, 본 논문에서는 학생들이 미분방정식 수업 맥락에서 사용한 개념적 은유를 분석하였다. 또한, 그 분석 결과에 기초하여 미분방정식에 관한 학생들의 개념적 모델의 특성을 탐구하고 학교 수학에 유용한 시사점을 사회문화적 시각에서 제공하고자 한다. 본 연구의 분석에 사용된 수학 교실 발화 자료는 2002년 2학기 수도권 지역 대학 내 사범 대학 수학교육과에 개설된 미분방정식 수업에서 수집되었다. 본 연구에서의 개념적 은유 분석은 구체적으로 학생들이 수업 상황에서 사용한 미분방정식에 관한 개념적 은유의 패턴을 추출하는 것에 초점을 두고 이루어 졌으며 나아가, 학생들이 개념적 은유를 실제로 사용한 맥락 속에서의 분석을 통해 추출된 각각의 개념적 은유가 표상하는 학생들의 미분방정식 개념적 모델의 수학적 특성을 탐구하였다.

현대 은유 이론의 관점에서 개념적 은유는 하나의 구체적인 표현 그 자체가 아니라 그 표현이 기초한 기저 영역(source domain)과 그 표현으로 표상하고자 하는 목적 영역(target domain) 각각을 구성하는 개념적 요소들, 그리고 그 요소들 사이에 형성되어 있는 추론 관계망 사이에 성립하는 대응 관계로 정의된다 (Lakoff, 1993). 기저영역은 인간이 일상적으로

---

* · ** 이화여자대학교(mkju11@yahoo.co.kr); (onkwon@ewha.ac.kr)
1) 본 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2002-037-B00053).

자주 접하게 되는 경험적 개념과 관련되며 목적영역은 물리적 경험이 어려운 추상적 개념과 관련되어 있다. 따라서, 기저영역은 목적영역에 비해 상대적으로 발달된 개념적 요소나 추론적 구조를 지니고 있다. 이처럼 비대칭적인 두 영역 사이의 대응 관계로서 개념적 은유는 기저영역의 잘 발달된 개념적 추론적 구조를 상대적으로 빈약한 목적영역으로 전이시킴으로써 목적 영역에서의 추상적 개념 발달을 촉진하는 역할을 수행한다.

이와 같은 현대 은유 이론은 인간이 실세계에서 가지는 물리 감각적 경험이 추상적인 개념의 구성에 관여함을 증명함으로써 추상적이고 개념적 사고에서 구체적이고 물리적 경험이 가지는 중요성을 입증하였다(Lakoff & Johnson, 1999). 나아가, Lakoff와 Johnson(1999)은 개념적 은유 이론에 신경과학 이론을 통합하여 인간의 추상적 개념이 물리적 경험과 직접적으로 연관되는 것이 아니라 그것을 해석하는 데 관여하는 인간의 생득적인 인지기제와도 깊은 연관을 가지고 있음을 입증하였다. 이는 인간의 사고와 지식이 인간의 존재 양식과 무관하게 외부에 존재하는 물리적인 세계에 대한 '객관적'인 해석이 아니라 인간의 신경학적 속성과 그를 통해 구성된 감각경험적 지식체계에 비추어 재해석된 표상임을 시사하며 이러한 관점은 인식론에 대한 새로운 이론적 틀을 제시하였다(Lakoff & Johnson, 1999). 특히, Lakoff와 Nunez(2000)는 확장된 현대 은유 이론과 그에 기초한 인식론적 관점을 수학적 아이디어의 분석에 적용하여 수학적 개념과 법칙들이 개념적 은유에 의해 구체적이고 일상적인 경험의 세계와 연결되어 있고, 따라서 우리가 알고 있고 알 수 있는 수학은 인간의 경험적인 존재양식, 즉 인간의 신체와 신경체계가 어떻게 디자인되어있고 어떻게 기능하며 그것을 통해 어떤 구체적인 경험을 하느냐에 의해 결정된다고 주장함으로써 '수학'에 대한 새로운 시각을 제공하였다[2].

이처럼 현대 은유 이론의 관점에서 '수학'은 인간의 구체적이고 물리적 감각 운동적 경험에 기초하여 인간의 다양한 생득적 인지 기재에 의해 재해석되고 재구성된 개념적 은유의 체계로 파악된다. 인간의 타고난 생득적인 수학적 능력들은 감각 운동적 경험을 통해 보다 고차원적인 수학적 지식으로 승화되어 가며 그 과정에서 개념적 은유는 인간의 경험적 세계와 수학적 아이디어의 세계를 중재하는 역할을 한다. 이는 개념적 은유가 일상적인 감각 운동적 경험으로부터 비롯되는 지식을 수학적 개념에 관한 개념적 모델을 형성하는 과정에 통합함을 의미한다. 이는 개념적 은유가 개념적 모델의 중요한 측면을 구성한다는 점과, 나아가 수학적 인지에서 발견되는 보편성과 문화적 상대성 사이의 상호연관성을 시사한다. 한편으로, 개념적 은유가 인간의 초보적 생득적 인지 기재와 산술 능력을 고등적인 수학적 개념으로 확장시키는 인지적 기제의 역할을 담당한다는 사실은 산술개념, 함수, 측정 등을 비롯한 수학적 개념이 문화를 초월하여 보편적으로 존재하는 이유를 설명할 수 있는 이론적 근거를 제시한다. 반면, 개념적 은유는 수학적 인지와 구체적인 경험 사이의 연관성을 부각시킴으로써 결과적으로 개념적 은유를 통해 형성되는 수학적 인지는 인간의 보편적인 인지 패턴이 그가 소속된 한 사회에서 공유된 경험의 문화적 특수성을 반영함을 시사한다고 할 수 있다. 이러한 맥락에서, 수학적 개념을 표상하는 개념적 은유는 그 수학적 개념에 대한 개념적 모델을 구

2) '개념적 은유'에 관한 자세한 논의는 주미경(2001)에 제시되어 있다.

성하며 나아가 한 사회에서 공유된 일상적 경험 속에 반영된 문화적 구성을 반영한다는 점에서 수학적 개념에 대한 '문화적 모델'을 형성한다고 할 수 있다.

'문화적 모델'이란 한 사회의 성원들이 공유하고 있는 세계에 대한 전제되고 당위로 여겨지는 모델로서, 그들이 살아가는 세계와 그 속에서 그들의 행동을 이해하는데 중요한 역할을 한다(Quinn & Holland, 1987). 여기서, '문화적 모델'이라는 개념은 전통적인 의미에서 인지적인 '개념적 모델'을 문화적 상대성의 관점에서 확장한 것이다. 즉, 하나의 수학적 개념에 대한 개념적 모델은 시공을 초월하여 불변하는 보편적이며 유일한 것이 아니라, 한 사회의 독특한 문화와 역사의 구체적 맥락 속에서 형성되며 부단히 재조정되어 간다는 것이다. 위의 논의에서 개념적 은유가 감각 경험적 지식 영역의 추론구조를 전이시킴으로써 수학적 개념에 대한 개념적 모델을 형성함을 언급하였다. 그러나, 사회문화적 상대성의 관점에서 수학적 개념의 구성에 중추적 역할을 하는 개념적 은유는 한 사회에서 공유하는 수학적 경험이 함축하는 독특한 문화적 구조를 반영한다는 점을 감안한다면, 개념적 은유는 수학적 개념에 대한 문화적 모델을 구성하는 중요한 요소라고 할 수 있다.

지금까지 논의한 바와 같이, 개념적 은유는 감각 경험적 세계와 추상적 아이디어의 세계를 연결지어주는 중요한 고리의 역할을 하며 그 연결방식은 한 사회가 공유하고 있는 문화적 구조에 의해 구조화되고 그에 의해 합법화되는 문화적 모델을 형성한다. 이와 같은 문화적 모델로서 개념적 은유의 측면은 수학적 은유의 사용에서도 쉽게 찾아볼 수 있다. 주 미경(2001)은 민족지학적 연구를 통해 대학의 전문적 수학자들이 그들의 자유로운 수학적 상상을 표상하는 개념적 은유를 수학적 토의의 맥락에서 구성하지만 사용되는 개념적 은유는 언제나 다른 수학자들에게 검증의 대상이 됨을 지적했다. 즉, 그들에게 의미있는 개념적 은유는 독창적이며 동시에 그들이 문화적으로 공유하고 있는 문화적 모델에 비추어 합법적이어야 한다는 것이다. 이는 수학적 은유가 개념적 모델이며 나아가 하나의 수학적 개념에 대해 수학 공동체가 공유하고 있는 문화적 모델임을 의미한다.

앞서 살펴본 바와 같이, 현대 은유 이론에서의 진보는 '수학'이라는 지식에 대해 새로운 시각을 제공하고, 이러한 이론적 발달의 맥락에서 최근 개념적 은유에 대한 연구는 수학교육연구의 중요한 과제로 인식되고 있다. 이러한 맥락에서 본 연구는 실제 수업 맥락에서 학생들이 사용하는 미분방정식 개념에 대한 개념적 은유의 사용 패턴을 분석함으로써 미분방정식에 대한 학생들의 개념적 모델의 특성을 탐구하는 것을 목적으로 이루어졌다. 그리고 개념적 은유에 관한 발화 분석을 통해 학생들의 개념적 은유 사용 패턴을 사회문화적 시각에서 해석함으로써 본 개념적 은유에 대한 사회문화적 접근이 학교 수학 교육에 제공하는 이론적 시사점에 대해 논하려 한다.

## II. 연구방법론: 사회언어학적 민족지학연구 (Ethnography of Speaking)

본 연구는 수학을 수학 공동체의 사회 역사적 관행의 산물이라고 보는 사회문화적 관점에 기초하여 사회언어학적인 민족지학연구로 구성되었다. 사회문화적 관점에서 '관행'은 한 공동

체가 사회적으로 공유한 객관적 체제가 합법화 시켜주는 보기, 생각하기, 알기, 말하기 등 일체의 '행함(doing)'에 대한 문화 역사적 가치와 규범을 함축하며, '말하기 방식'을 공동체적 관행의 중요한 일면으로 간주하고 분석 단위로 보는 연구방법론이 사회언어학적인 민족지학연구이다. 구체적으로, 사회언어학적인 민족지학 연구는 전통적인 민족지학적 연구 방법론이 언어적 상대성을 강조하는 사회언어학이론에 의해 재구성된 연구방법론이다. 민족지학적 연구 방법은 전통적으로 인류학자들이 비서구사회의 문화적 삶을 비교문화적인 관점에서 탐구하는 과정에서 사용해온 방법으로 한 공동체의 자연스러운 삶의 맥락 속에서 진행되는 사회성원의 실제적 행동과 상호작용을 관찰하고 그 관찰결과의 분석에 기초하여 그 공동체 성원의 행동양식을 하나의 통합된 전체로서 그 공동체의 문화 역사적 관점과 의미체계에 충실하게 표상하는 묘사적 연구 방법이다(Goetz & LeCompte, 1984).

사회언어학적 민족지학연구는 민족지학적 연구를 그 방법론적 모태로 한다는 점에서 민족지학적 연구방법론과 마찬가지로 한 집단의 행동 패턴을 그 집단의 문화와 연관지어 설명하는 이론을 지향한다고 할 수 있다. 단지, "한 공동체가 공유한 문화적 가치, 신념, 사회적 제도와 형식, 역학과 인성, 공동체의 역사와 생태적 환경의 양상은 의사소통 상황과 패턴을 통해 검증될 수 있다"는 Hymes (1974)의 주장이 시사하듯, 한 공동체의 문화를 탐구함에 있어서 언어를 그 공동체 문화의 중요한 지표로 보고 자연스러운 상호작용의 맥락에서 교환되는 언어를 방법론적으로 중요한 분석의 대상으로 본다.

사회문화적 시각에서 수학 교실은 관행공동체로 설명되며, 특히 많은 선행 연구 결과가 보여주듯, 수학교실은 공동체적 관행의 중요한 일면으로서 독특한 말하기 방식을 공유한다 (Ju, 2000; Lampert & Blunk, 1998; Lemke, 1990; Pimm, 1987). 특히, 개념적 은유가 수학 교실에서 관찰되는 대표적인 의사소통 패턴이며 말하는 이의 문화적 모델을 반영함이 입증되었다 (English, 1997; Ju, 2001; Pimm, 1987). 이러한 관점에 기초하여, 본 연구는 대학 미분방정식 수업에 참여하는 학생들이 가지는 미분방정식에 관한 개념적 모델에 대한 탐구를 학생들의 수학적 토의 상황에서 나타나는 수학적 발화, 특히 개념적 은유의 사용 패턴을 사회언어학적 민족지학적 접근법에 따라 탐구했다. 본 연구가 진행된 수업의 맥락에서 학생들이 사용한 미분방정식에 관한 개념적 은유의 사용 패턴에 대한 발화 분석은 구체적으로 다음의 연구 질문을 중심으로 이루어졌다. 첫 째, 학생들이 사용하는 미분방정식에 관한 개념적 은유는 무엇이며 각각의 개념적 은유가 미분방정식 개념에 대한 개념적 모델로서 가지는 수학적 특성은 무엇인가?

## III. 교실 상황

본 연구는 대학 수학 교육에서 '현실주의적 수학 교육(Realistic Mathematics Education, 이하 RME)' 이론의 적용 가능성과 그 적용의 구체적인 방안을 모색하는 것을 목표로 하는 미분방정식 수업 개발 연구의 일환으로 구성되었다. 본 연구의 구체적인 초점은 수업 맥락에서 학생들의 개념적 은유 사용 패턴을 분석하여 그들의 미분방정식에 대한 개념적 모델을 탐구하는 것에 있다. 분석을 위한 발화 자료는 2003년 2학기 본 대학 수학교육과 1학년 전공과정으로 개설된 미분 방정식 수업에서 참여적

관찰을 통해 수집되었다. 매시 수업 관찰 후 필드노트가 작성되었고 모든 수업은 두 대의 캠코더를 통해 녹화되었다. 각 캠코더는 전체 토론과 더불어 서로 다른 두 소집단의 수학적 토의를 녹화하였고 본 연구의 발화분석은 수업 녹화내용의 프로토콜에 기초하여 이루어졌다.

본 수업 개발 연구의 철학적 기저를 구성하는 RME 이론은 수학은 인간 활동의 산물이며 따라서 학생들이 자신에게 경험적으로 실제적인 수학적 문제 상황에서의 활동을 통해 점진적으로 수학적 지식을 구성하는 과정을 경험할 때 의미있는 수학학습이 이루어진다고 주장한 Freudenthal의 교수학적 현상학으로부터 유래한다(Freudenthal, 1973, 1983). 이와 같은 RME이론의 교수학적 원리는 "점진적 수학화"를 통한 "안내된 재발명"으로 요약될 수 있다. "수학화"란 비수학적 대상을 수학, 또는 수학적으로 덜 발달된 대상을 보다 현저하게 수학적인 것으로 변환시키는 과정을 의미한다(Freudenthal, 1993). "점진적 수학화"는 Treffers(1987)가 제시한 개념으로 수학화의 과정을 "수평적 수학화"와 "수직적 수학화"로 세분하여 설명한다. "수평적 수학화"란 문제 상황을 수학적 용어를 통해 기호화하여 수학적 도구를 통해 해결가능한 문제로 변환하는 과정이다. "수직적 수학화"는 학습자의 수학적 활동 결과를 수학화하는 과정으로, "수평적 수학화"가 경험적 세계에서 기호적 세계로의 전이라면, "수직적 수학화"는 기호적 세계에서 진행되는 수학적 수준의 비약이다.

"점진적 수학화"가 학습자의 수학적 의미의 재조정 과정을 의미한다면, "안내된 재발명"은 학습자의 수학적 의미의 재조정 과정이 지향하는 방향을 설정한다. Freudenthal은 근본적으로 수학을 개인과 인류의 역사를 통해 구성되어온 상식의 체계라고 보며, 따라서 학습자 스스로 수학적 지식을 재발명하는 것이 가능할 뿐만 아니라 교수학적으로 보다 의미있는 지도 방법이라고 주장한다(Freudenthal, 1993). 그러나, 이때 "재발명"이란 '발명' 그 자체보다는 학습 경험 또는 과정으로서의 의미를 갖는다. 즉, "재발명"이란 학습자가 수학적 지식을 발달시켜온 인류의 역사적 과정과 일관된 학습 과정을 통해 자신의 수학적 의미를 재조정해가는 과정이며, 그러한 "재발명"의 과정은 학습자가 독자적으로 수행하는 것이 아니라 적절한 안내 하에 이루어지는 "안내된 재발명" 과정이다.

본 미분방정식 수업에서 "점진적 수학화"를 통한 "안내된 재발명"이라는 RME의 교수학적 원리는 "맥락문제의 활용"과 "사회적 상호작용"에 기초한 발생적 모델을 통해 구현되었다. '점진적 수학화'에서 구체적인 맥락에 기반을 둔 수학적 활동이 의미있는 수학적 개념의 구성과정에 핵심적임을 고려할 때, 이는 수학 교수-학습은 경험적으로 실제적인 맥락 문제의 탐구를 통해 비형식적이고 구체적인 문제 해결 전략을 구성하는 것으로부터 출발해야함을 의미한다. 뿐만 아니라, '점진적 수학화'와 연결지어 볼 때, 맥락 문제의 해결은 단순히 그 문제에 대한 해결 전략을 모색하는 것에 그치는 것이 아니라, 나아가 학생들에게 수학적 활동과 탐구의 기반을 제공함으로써 반복적인 수평적/수직적 수학화의 과정을 통해 의도된 수학적 개념이 점진적으로 발생되어 가는 과정의 출발점이 된다(Gravemeijer & Doormann, 1999). 이러한 발생적 과정에서 학생들은 사회적 상호 작용을 통해 그들의 수학적 의미를 재조정하고 궁극적으로 교실 공동체에 의해 공유된 수학적 의미를 구성하는 것을 강조한다.

이와 같은 교수학적 원칙에 입각하여, 본 수업은 교사 주도적이며 알고리즘의 획득을 강조하는 전통적 미분 방정식 수업 방식과 여러 측면에서 구별된다. 우선, 분석적 방법을 포함한

수치적, 그래프적, 질적 방법과 모델링과 같은 다양한 수학적 방법의 적용을 통해 미분 방정식에 대한 개념적 이해를 지향하는 수업으로 구성되었다. 뿐만 아니라, 본 수업에서는 매시 지도하고자 하는 미분 방정식 개념을 반영하는 맥락 문제가 연구팀에 의해 구성되어 학생들에게 제시되고, 학생들은 소집단 토론과 전체집단 토론에 반복적으로 참여하는 과정을 통해 문제해결을 위한 탐구를 하였다. 프로젝트 교실에서의 활동을 도식적으로 설명하면 다음과 같다. 수업이 시작되면 수업 목표에 해당하는 미분 방정식 개념을 반영하는 맥락 문제를 포함하는 활동지가 배포된다. 학생들은 약 5분 동안 소그룹 토론을 통해 문제의 의미를 파악하고 이어지는 전체토론을 통해 학급 전체가 소그룹 토론을 통해 탐구한 문제의 의미를 공유한다. 파악된 문제의 의미에 기초하여 학생들은 주어진 맥락 문제를 해결하기 위해 다시 소그룹 토의로 들어간다. 약 15분 간의 소그룹 토론에 이어 지는 전체 학급 토론에서 소그룹 토의를 통해 얻은 문제해결에 대한 아이디어를 공유한다. 강의 담당 교수는 학생들이 소집단 토론을 하는 동안 학생들 사이를 오가며 전체 토론에 대한 계획을 구상한다. 이 계획에 따라 이어지는 전체 토론에서 학생들이 소집단 토론 결과 형성된 수학적 의미를 공유하고 미분방정식 개념을 재발견해가는 것을 촉진하는 역할을 했다.

이처럼 맥락 문제를 기반으로 한 사회적 상호작용 과정을 통해 학생들은 단순히 주어진 문제의 해결에 요구되는 해법을 발견하는 것을 넘어 맥락 문제와 그 해법에 함축되어 있는 수학적 의미를 규명하고 공유해가는 과정을 통해 미분방정식 개념을 재발견해갔다. 이와 같은 수학적 개념의 재발견 과정에서 학생들은 형식적인 수학적 언어보다는 자신의 수학적 경험을 반영하는 개념적 은유를 빈번히 사용하는 것이 관찰되었고, 본 연구는 학생들이 수업 상황에서 미분방정식 개념에 관한 자신의 수학적 아이디어를 표현하기 위해 사용한 개념적 은유를 분석함으로써 미분방정식에 관한 학생들의 개념적 모델의 특성을 사회문화적 관점에서 해석하였다.

## Ⅳ. 분석 결과

미분방정식의 해는 그것이 주어진 미분방정식을 만족시키는 '대상'으로서 의미를 갖는 동시에, 미분방정식에 의해 표현되는 현상 속에서의 변화를 표상하는 '함수'가 된다는 점에서 수학적으로 양면성을 갖는다고 할 수 있다. 미분방정식의 해가 가지는 이러한 수학적 이중성은 학생들이 미분방정식의 학습 과정에서 경험하는 대표적인 인지적 곤란의 근원으로 지적된다(Habre, 2000; Rasmussen, 2001). Habre(2000)은 미분방정식 수업에 참여하는 학생들이 문제해결에서 해석적이고 기호적인 전략을 보다 수학적으로 강력한 방법으로 일방적으로 선호함으로써 그 전략이 적절하지 않은 문제 상황에도 그 전략을 고수하여 결과적으로 문제해결에 실패함을 지적했다. 또한, Rasmussen(2001)은 학생들의 미분방정식 개념에 대한 발화 분석을 통해, "방정식의 해는 수"라고 생각하는 학생들의 개념적 모델이 결과적으로 미분방정식의 해를 함수적 측면에서 해석하는 과정에 인지적 장애로 작용함을 지적하였다(Rasmussen, 2001).

본 연구의 발화 분석을 통해 볼 때 본 미분방정식 수업에 참여한 학생들 역시 위에서 언급된 바와 같은 미분방정식의 해에 대해 이중적인 개념을 가지고 있으며 그러한 이중성이 수학적 토의의 원활한 진전에 장애로 작용하는

것이 관찰되었다. 본 논문에서는 이러한 개념적 이중성을 학생들이 그들의 미분방정식 개념을 표상하는 과정에서 한 가지 이상의 개념적 은유를 사용하는 현상과 연관지어 설명할 것이다. 구체적으로, 이어서 제시되는 "기계은유"와 "가상적 운동 은유"는 본 연구가 진행된 수학 교실에서 학생들의  수학적 발화 속에서 등장하는 미분방정식에 대한 개념적 은유이다. 본 논문에서는 이 두 개념적 은유의 수학적 특성을 분석하여 이중적인 개념적 은유의 사용이 선행 연구를 통해 밝혀진 미분방정식의 해에 관한 학생들의 이중적 이해와 연관됨을 보일 것이다. 그러나, 본 연구는 이들 개념적 은유가 보여주는 대조적인 수학적 특성에 의해 부각되는 미분방정식 개념적 모델의 이중성에 대한 사회문화적 해석과 그에 기초한 수업의 질적 개선을 위한 이론적 시사점을 통해 사회문화적 이론이 학교수학의 질적 개선에 기여할 수 있는 방안을 모색하고자 한다.

## 1. 미분방정식의 개념적 은유

### (1) 기계은유

"기계은유"는 수학적 발화에서 흔히 찾아볼 수 있는 기초은유의 하나이다 (Lakoff & Nunez, 1997). 예를 들어, "함수 $f(x)=x+5$에 3을 대입하면 8이 나온다"라는 표현에서 볼 수 있듯이, 기계은유의 관점에서 '함수'란 투입 가능한 대상으로부터 어떤 결과물을 만들어내는 조작을 수행하는 '기계'로 해석된다. '알고리즘' 역시 이와 같은 기계 은유에 기초한 수학적 개념의 대표적인 예에 해당한다. "합성수는 소수의 곱으로 만들어지는 수이다"라는 표현은 '곱셈'이라는 조작을 수행하는 기계 상자 속에 몇몇 소수를 투입함으로써 합성수를 만들어 내는 과정을 연상시킨다. 따라서, 기계은유에서 수학적 관계는 투입된 대상에 대한 조작을 통한 결과물의 산출이라는 관점에서 묘사된다. 이처럼 기계은유는 다양한 수학적 개념에 관한 표현에서 쉽게 찾아볼 수 있는 개념적 은유이며, 이러한 기계은유가 대학 수준의 미분방정식 수업에서의 학생들의 수학적 발화 속에서도 자주 등장하는 것을 볼 수 있었다. 구체적으로 본 미분방정식 수업에서 기계은유는 학생들이 미분방정식의 풀이를 주어진 미분 방정식에 대입했을 때 등식을 만족시키는 식을 찾는 과정으로 개념화하는 경우에 관찰되었다. 다음은 연립변화율방정식의 해를 구하는 과정에서 학생이 미분방정식에 대한 기계은유를 사용하는 경우의 한 예이다.

> 은정: *dt* 분에 *dv*를 *dt* 제곱 분에 *d* 제곱 *x* 이렇게 다시 <u>바꿨어요</u>...그렇게 되면 *x*를 두 번 <u>미분한 게</u> *dt* 분에 *dx* 라는 <u>값</u>하고 *x*라는 <u>값</u>이 같이 <u>나오잖아요</u>...그래서 아마 $x(t)$ 함수가 $e^{kt}$가 아닐까 라는 생각을 먼저 하게 됐어요..

위의 예에서, 은정은 주어진 연립변화율방정식의 해를 주어진 두 관계식을 연립하여 얻은 이계미분방정식을 통해 구하는 과정을 설명하고 있다. 특히, 은정이 "*x*를 두 분 미분한게 *dt* 분의 *dx*라는 값하고 *x*라는 값이 같이 나오잖아요"라고 언급하는 곳에서 볼 수 있듯이 미분방정식의 해로서 $x(t)$를 "것"과 "값"이라는 표현을 통해 하나의 대상 또는 수식으로  표상하고 있다. 즉, 은정은 이 대목에서 주어진 미분방정식의 해를 하나의 개체, 또는 대상으로 파악하고 있으며, "미분"을 그 대상에 가해지는 조작, 또는 그 대상이 투입되었을 때 연산을 행하여 결과를 배출하는 기계로 간주하고 있다. 따라서 은정은 주어진 이계변화율방정식으로 프로그램화된 기계 상자에 무엇을 투입했을

때 0을 결과로 얻을 수 있는지 생각하고, 반복해서 미분해도 변화하지 않는 함수로 지수함수를 생각해낸다. 이처럼 학생들이 미분방정식의 풀이를 대입해서 주어진 등식을 만족시킬 수 있는 수식을 찾는 것으로 개념화하는 것을 자주 관찰할 수 있었고 이러한 미분방정식 개념은 기계은유를 통해 표상되었다.

(2) 가상적 운동 은유

앞서 언급했듯이, 미분방정식의 해는 미분방정식이 포함되어 있는 다양한 종류의 변화율 함수들의 조합으로 표현되는 변화하는 현상에 대한 함수이다. 예를 들어, 미분방정식 $\frac{dP}{dt}=0.8P$의 해는 $P(t)=P_0e^{(0.8t)}$이다. 이해는 위의 기계은유의 관점에서 보면 주어진 미분방정식을 만족시키는 수식이다. 그러나 미분방정식을 변화하는 현상, 예를 들어 인구의 변화와 결부시켜본다면, 위의 해는 주어진 초기인구수 $P_0$에 대하여 시간 $t$의 흐름에 따라 인구의 추이를 표현하는 함수가 되며 무한한 초기조건에 대해 무수히 많은 해함수로 이루어진 해공간을 의미한다. 이처럼 미분방정식 해가 가지는 함수적 측면에 대한 인식은 '가상적 운동 은유'를 통해 표상되었다.

"경부고속도로는 대전을 지나 부산에 이른다"라는 표현은 '가상적 운동 은유'의 한 예이다. 여기서 경부고속도로는 이미 건설이 완료된 정적인 대상이고 실제로 대전을 거쳐 부산에 이르는 것은 그 도로 위를 주행하는 운전자 자신이다. 그러나, 이 표현 속에서는 마치 경부고속도로 자체가 능동적으로 움직여 지정된 지점을 지나 목적지에 도달하는 점의 궤적으로 묘사되고 있다. 이처럼 가상적 운동 은유는 인간이 공간 속에 존재하는 곡선이나 직선에 대해 사고 할 때 자주 사용되는 기초 은유의 하나이며, 일상적 경험뿐만 아니라 수학적 개념에 대한 논의에서도 자주 등장한다. 가상적 운동 은유가 자주 사용되는 대표적인 수학적 개념의 예는 '함수'인데, "이차함수 $f(x)=x^2$는 점점 내려오다 원점에서 최소점을 지나 다시 쭉 올라간다"라는 표현에서 볼 수 있듯이, 가상적 운동 은유의 관점에서, '함수'는 평면 또는 공간을 움직여 다니는 점의 자취로 개념화된다. 앞서 언급했듯이, 미분방정식의 해를 함수로 해석한다면, 본 미분방정식 수업에 참여한 학생들이 미분방정식에 관한 아이디어의 표현에 가상적 운동 은유를 적용하는 것은 자연스러운 현상이다. 다음은 미분방정식 $\frac{dP}{dt}=0.3P(1-\frac{P}{12.5})$를 이용하여 사슴 수를 예측하는 과제, 특히 평형해 $P=12.5$ 근처에서 사슴수가 변화하는 패턴에 대해 토의하는 맥락에서 사용된 가상적 운동 은유의 예이다:

> 선재: 저기서..일단 사슴의 수가 12.5보다 작을 때랑 같을 때랑 나누어서 생각했거든요..그러니까 $P$가 12.5보다 작을 때는 변화율, 변화율 자체가 양수이기 때문에 <u>계속 늘어나는</u> 그런 거에다가 12.5에 <u>가까워짐에 따라서 점점 변화하는 증가량에다가</u>..어..12.5가 되면 더 이상 늘어나지 않구요. 12.5가 되면 델타 $t$ 분에 델타 $P$가 0 이 되기 때문에 <u>계속 증가하다가 개체수가 0인 현재 수를 유지하게 되요</u>. 그 다음에 사슴 수가 12.5보다 크면 변화율 자체가 음수가 되기 때문에 <u>계속 줄어드는 그래프</u>가 나오게 됩니다.

기계은유는 해를 하나의 대상으로 파악하고 현상을 포괄적으로 요약하는 기호적 표상을 탐색하는 것에 주력하고 그 결과 주어진 미분방정식이 표현하는 현상 속에 나타나는 미시적 변화 과정은 간과하는 경향을 갖는다. 반면, 위의 예 속에서 인구 변화 동향을 "가까워진다",

"늘어난다", "유지한다", "줄어든다" 등의 언어를 사용하여 표현하는 것에서 볼 수 있듯이, 선재의 설명 속에서 주어진 미분방정식의 해는 전체인구수를 표상하는 점이 주어진 방정식에 나타내는 수학적 관계에 따라 평면에서 움직여 다니는 "운동(motion)"의 자취로 개념화되고 있다. 이처럼 가상적 운동 은유는 하나의 현상이 움직이는 점에 의해 구성되는 것으로 개념화함으로써 하나의 현상이 부단히 변화해가는 과정 자체에 초점을 두고 변화의 과정을 미시적 관점에서 탐구하고 미시적 변화가 누적된 전체로서 현상을 바라보게 된다.

## 2. 미분방정식에 대한 개념적 은유의 수학적 특성

본 연구의 수업에서 학생들은 그들의 미분방정식 개념의 표상을 위해 "기계은유"와 "가상적 운동 은유"라는 두 개념적 은유를 지속적으로 사용하였다. 그러나 위에 제시된 예에서 볼 수 있듯이, 실제적 수업 맥락 속에서 관찰되는 학생들의 미분방정식에 대한 두 개념적 은유들은 각각 독특한 방식으로 미분방정식의 해를 개념화하고 있다. 이 절에서는 본 미분방정식 수업에 참여한 학생들이 기계은유와 가상적 운동 은유를 실제로 사용하는 패턴 분석을 통해 각각의 수학적 특성을 묘사하고자 한다.

다음의 예는 미분방정식 $\frac{dP}{dt}=0.3P(1-\frac{P}{12.5})$과 이전에 학습했던 변화율방정식 $\frac{dP}{dt}=0.3P$을 비교하는 수학적 토의의 일부이다. 이전의 수학적 토의를 통해 학생들은 $\frac{dP}{dt}=0.3P$는 종(種)이 하나뿐이고 자원이 무한하며 사슴이 계속해서 번식하는 경우의 사슴수를 묘사하는 미분방정식임을 알고 있다. 이제 학생들은 미분방정식 $\frac{dP}{dt}=0.3P(1-\frac{P}{12.5})$이 $\frac{dP}{dt}=0.3P$에서의 사슴수의 변화에 대한 가정을 어떻게 수정했는지 생각해 보고, 현재 사슴의 수가 3일 때 시간 $t=0.5$, 1, 1.5, 2에서의 사슴의 수를 구체적으로 예측해야 한다. 다음의 예에서 선재는 $\frac{dP}{dt}=0.3P(1-\frac{P}{12.5})$의 해공간을 묘사함으로써 $\frac{dP}{dt}=0.3P$와 구별하고 이어, 주어진 시각에서의 사슴수를 구체적으로 예측하는 방법을 설명한다:

> 선재: 저기서 일단 사슴의 수가 12.5보다 작을때랑 같을때랑 나누어서 생각했거든요. 그러니까 이 식 전체에서 $P$ 이 부분이 12.5라고 했으니까 $P$가 12.5보다 작을 때는 변화율, 변화율 자체가 양수이기 때문에 <u>계속 늘어나는</u> 그런거에다 12.5에 <u>가까워짐에 따라서 점점 변화하는 증가량에다가</u>..어 ..12.5가 되면 더 이상 <u>늘어나지 않구요</u>. 12.5가 되면 델타 $t$ 분에 델타 $P$가 0이 되기 때문에..<u>계속 증가하다가 개체수가 0인 현재 수를 유지하게 되요</u>. 그 다음에 사슴 수가 12.5보다 크면 변화율 자체가 음수가 되기 때문에 <u>계속 줄어드는 그래프</u>가 나오게 됩니다.
> 교수: 현재라는 것이 2002년도 책정일 수도 있고 혹은 2000년도에서 했으면 2000년도 책정일 수도 있겠죠. 그래서 이제 3이었을 때, 밑에 있는게 아마 3인가 보죠? 이게 3이겠죠? 그럼 3일 때, 0.5를 찾는 방법을 어떻게 찾았는지를 숫자만 이렇게 써서 그 주어진 변화율 방정식을 한번 표현해 볼 수 있겠어요?
> 선재: 직접 계산을 한거 거든요.
> 교수: 어떻게 대입을 했어요?
> 선재: 이 식의 그래프를...
> 교수: 그럼 3.3자리는 어떻게 구했는지 한 번 구해보세요. 1일 때, 1년 후에 3.3자리는 얼마나...
> 선재: 저기 있는 걸 그대로 하면 지금 여기 이

렇게 된 거거든요.

교수: 이 방법은 저번에 한 방법하고 똑같은 방법인가요?

선재: 그러니까 시간의 단위..시간의 변화..그러니까 이게 1이렇게 증가하는게 아니라 0.5, 1, 1.5이렇게 시간의 단위가 0.5로 줄어들기 때문에 그 $\frac{dP}{dt}$ 자체를 저번에 은실이가 한 것처럼 $\frac{1}{2}$로 줄어들면서 변화율 앞에 있는 그 상수가 줄어들어 $0.15P$ 이렇게 만들어 가지고요. 그 자체에다가 이제 저번에 계산했던 것은 $P_0$는 3으로부터 시작해서 $P_1$은 0.5를 의미하는 것이기 때문에 3+거기다가 이제는 $P$ 자리에 3을 집어넣은 것을 더해서 그 계산 결과가 0.342가 나와서 그걸 더해서 3.342가 나와요.

위의 예는 앞서 가상적 운동 은유에서 살펴본 예에 이어지는 수학적 토의로서 전반부에서는 가상적 운동 은유가, 후반부에서는 기계 은유가 사용되고 있다는 점에서 두 개념적 은유의 수학적 성격을 대조적으로 보여준다. 전반부에서 선재가 주어진 미분방정식에 따라 사슴수가 평형해 근처에서 어떻게 변화하는지 가상적 운동 은유를 통해 설명한 후, 초기 사슴수가 3일 때 반년 후 사슴수를 예측하는 과제가 제시된다. 새로운 과제의 제시와 더불어 선재는 "직접 계산을 했다"는 말과 함께 후반부의 수학적 토의는 기계 은유에 기초한 개념적 모델에 기초하여 구성된다.

위의 예를 살펴보면서, 가상적 운동 은유는 미분방정식의 해를 시간에 따라 변화하는 사슴수의 함수로 개념화하며 해공간은 주어진 미분방정식을 만족하는 함수들이 구성하는 평면으로서 질적으로 묘사된다. 위의 선재의 표현에서 볼 수 있듯이, 미분방정식의 해는 초기값에 따라 무수히 많은 해들로 이루어진 하나의 공간을 형성하고 각각의 해들은 그 공간 속에서 고유한 궤적을 그리는 함수이다. 반면, 기계 은유는 미분방정식의 해를 주어진 관계식을 만족시키는 기호적 대상으로 묘사한다. 기계 은유에서 미분방정식의 해의 무한성은 초기값에 따라 결정되는 상수 기호를 통해 이차적으로 표현된다. 따라서, 해공간이라는 개념은 상대적으로 잘 부각되지 않으며 그것을 총체적으로 포괄하는 분석적이고 기호적인 표상만이 주어진다. 또한 위의 예에서 볼 수 있듯이, 기계 은유 속에서 미분방정식은 구체적인 수치를 산출하기 위한 알고리즘으로 작용한다. 즉, 가상적 운동 은유에서 미분 방정식의 해는 개형 위주로 표상되고 있지만, 기계 은유를 적용하는 경우 학생들은 미분 방정식에 값을 대입하여 구체적인 결과를 얻으려 시도한다.

또한, 위에 주어진 수학적 발화 예의 초기 단계에서 사용된 가상적 운동 은유는 주어진 현상을 동적인 관점에서 바라봄으로써 "연속적으로 변화하는 상황 또는 과정"으로 파악한다. 가상적 운동 은유에 비해 기계 은유는 "변화" 개념을 크게 부각시키지 않는다. 실제로 앞서 기계 은유에 대한 논의에 제시되었던 예에서 보았던 바와 같이, 기계 은유는 미분방정식의 해를 기호적 수식과 같은 하나의 대상으로 취급함으로써 역동적 과정을 부각시키지 못했다. 그러나, 기계 은유가 "변화"라는 개념과 완전히 단절된 것은 아니다. 실제로, 위의 제시된 예의 후반부에서는 기계 은유의 사용이 변화라는 개념과 접목되고 있음을 발견할 수 있다. 그러나 중요한 점은 각각의 은유 속에서 "변화"라는 개념이 파악되는 양상이 차별화된다는 점이다. 구체적으로, 위에 제시된 예의 초반부에서 선재가 " 12.5가 되면 $\Delta t$ 분에 델타 $P$가 0이 되기 때문에..계속 증가하다가 개체수가 0인 현재 수를 유지하게 되요"라고 말하는 부분에서, 선재는 가상적 운동 은유를 통해 사슴수가 연

<표 1>. 기계은유와 가상적 운동 은유의 수학적 특성 비교

| | 기계은유 | 가상적 운동 은유 |
|---|---|---|
| 해의 개념 | 대 상 | 함 수 |
| 해의 표상 | 기호적: 해의 기호적 표현을 강조한다 | 그래프적: 해공간의 기하적 특성을 강조한다. |
| 변화 개념 | 이산적: 변화를 이산적 단위에 기초하여 분석한다. | 연속적: 변화를 연속적이고 역동적인 과정으로 파악한다. |
| 문제해결전략 | 알고리즘적: 구체적인 수치를 찾는다. 문제해결 과정에서 미분방정식이나 그 해의 의미는 중요하지 않다. | 질적: 해공간의 변화양상의 의미를 파악하고 그 의미에 기초하여 해를 구한다. |

속적 변화해가는 역동적인 과정을 묘사한다. 반면, 후반부의 한 시점에서 구체적인 사슴수를 구하는 대목에서 선재는 기계은유를 적용하는데 이 때 변화는 이산적인 관점에서 파악되고 있다. 즉 $\frac{dP}{dt}$를 근사적 변화율 $\frac{\Delta P}{\Delta t}$, 즉 주어진 시간 단위에 대한 사슴수 차이의 비율로 대체하고 있다. 이러한 이산적 접근은 기계의 작동이 확정된 투입을 필요로 한다는 학생들의 가정에 기초한다고 할 수 있다. 학생들의 수학적 발화 분석을 통해 추출된 '기계은유'와 '가상적 운동 은유'의 수학적 특성은 위의 [표 1]에 정리되어 있다.

## Ⅴ. 결론 및 시사점

본 연구는 실제적인 미분방정식 수업의 수학적 토의 상황에서 학생들이 그들의 미분방정식 개념을 표상하기 위해 사용한 개념적 은유를 분석 추출하였다. 뿐만 아니라, 학생들이 미분방정식에 관한 개념적 은유를 실제적인 수학적 토의의 과정에서 사용하는 패턴을 분석하여 각 개념적 은유의 수학적 특성을 탐구함으로써 학생들의 미분방정식에 관한 개념적 모델의 수학적 특성을 묘사하였다. 앞서 제시한 개념적 은유 분석 결과가 보여주듯이, 기계 은유와 가상적 운동 은유는 본 연구가 진행된 수업에 참여한 학생들의 미분방정식의 개념적 모델을 반영하는 대표적인 개념적 은유이다. 본 논문에서 발견된 두 개념적 은유는 선행 연구에서 규명된 학생들의 미분방정식 문제해결전략의 이중적 양상과 연관지어 볼 수 있다(Habre, 2000; Rasmussen, 2001). 그러나 이러한 개념적 모델의 이중성은 선행 연구에서 지적하듯 학습 과정에서 장애로 작용하기도 하지만 본 연구의 관점에서 중요한 것은 학생들의 개념적 모델이 다양한 수학적 관점을 가진 이들과의 상호작용을 통해 부단히 변화해 가며 결과적으로 개념적 심화 및 이해의 확대로 이어진다는 점이다. 이와 같은 수학 학습 과정을 통해 진행되는 개념적 모델의 재조정에 관한 논의는 수학 교실에서의 실제적인 수학적 토의에 관한 후속 연구를 필요로 한다. 이 절에서는 본 연구의 발화 분석 결과가 제공하는 교육적 시사점에 대해 논하고자 한다.

첫 째, 본 연구에서 보여진 미분방정식에 대한 개념적 모델의 이중성은 다양한 수학적 관

점이 공존하는 수학 수업의 맥락과 연관지어 생각할 수 있다. 본 논문에서는 기계 은유와 가상적 운동 은유는 한 학생의 개념적 모델을 구성하는 주요한 두 측면이라는 점에서 개념적 모델의 이중성을 언급했다. 그러나 이러한 이중성은 한 수학 교실에 참여하는 학생들의 독특한 수학적 스타일을 반영하기도 한다. 즉, 어떤 학생들은 기계 은유에 보다 친숙한 반면 가상적 운동 은유에 보다 친숙한 학생들을 찾아볼 수 있었다. 이처럼 개념적 은유의 이중적 용법이 시사하는 개념적 모델의 이중성은 한 학생의 개념적 모델에 국한되는 특성이 아니라 하나의 수학 교실에 참여하는 학생들 사이에서 발견되는 인지적 스타일의 차이를 반영한다고 할 수 있다. 나아가 이러한 인지적 스타일의 다양성은 비단 학생들에게만 적용되는 것이 아니며 수학 교사 역사 수학 교실에서의 인지적 다양성을 구성하는 존재임을 인식되어야 한다. 이는 보다 나은 수업을 구성을 위해 학생들의 개념적 모델의 관점에 비추어진 학교 수학 문화의 이질성을 고려해야 함을 의미한다. 본 연구를 통해 보여졌듯이, 기계 은유는 그것이 가지는 수학적 한계에도 불구하고 학생들의 수학적 발화 속에 지속적으로 나타난다. 이는 학생들이 학교 수학이 제시하는 개념적 모델로 자신의 개념적 모델을 '대체'하는 것이 아니라 다양한 개념적 모델을 접하는 과정에서 자신의 개념적 모델을 '재조정'해감을 의미한다. 실제로 기계 은유와 가상적 운동 은유 모두 나름대로의 수학적 장단점을 가진다는 면에서 절대적인 우열을 가릴 수 없는 부분적이며 상대적인 개념적 은유일 뿐이다. 따라서, 수학 교사는 학교 수학이 제시하는 개념적 모델과 학생들의 개념적 모델 사이에 존재하는 이질성을 상대적 관점에서 탐색하고 그들 사이를 중재하는 역할을 해야 한다.

둘 째, 위에서 제시된 인지적 스타일의 다양성에 관한 논의는 개념적 모델의 차이에 의한 학습 곤란은 학습자 개인의 인지적 문제를 넘어 학교 수학 문화와는 상이한 수학 문화 속에서 사회화되어온 학습자가 경험하는 학교 수학 문화와의 마찰로 이해되어야 함을 시사한다. 이는 학생이 수학 교실에서 경험하는 수학적 곤란이 가지는 문화적 성격을 시사한다. 이러한 수학적 곤란에 의한 학습 장애는 수학 교사의 적절한 교수학적 배려가 주어질 때 극복될 수 있으며 이 때 인지적 차이에 대한 사회문화적 이해는 핵심적이다.

세 째, 인지적 스타일의 다양성에 관한 위의 논의는 교수학적으로 좋은 개념적 은유는 지도하고자 하는 수학적 개념에 대해 학교 수학이 제시하는 문화적 모델과 수학교사가 지도하고자 하는 학습자가 가지고 있는 문화적 모델에 비추어 규정되어야 함을 의미한다. 한 수학 교실에서의 수학적 토의 과정에서 의미있게 사용된 개념적 은유가 다른 수학 교실에서 수학적 토의 상황에서도 학생들이 성공적으로 안내된 재발견으로 이르게 하지는 않는다. 성공적인 수학 학습으로 유도하기 위해 교사는 자신의 수학적 안목에 비추어 지도하고자 하는 수학적 개념에 대해 학교 수학이 제시하는 문화적 모델과 학생들의 문화적 모델을 이어줄 수 있는 개념적 은유에 관한 지식을 갖추어야 할 것이다. 앞서 제시된 본 고의 논의에 비추어 볼 때, 이러한 지식은 교재분석과 더불어 수학 교사 자신이 실제로 지도하고자 하는 구체적인 교실에서의 지속적인 탐구를 통해 구해질 수 있다고 본다. 그러한 의미에서 본 연구는 학교 현장에서 수학을 지도하는 교사가 자신의 교실에서 탐구를 구상할 때 구체적인 방법론을 제공하며 또한 자신의 탐구 결과와 비교 검토할 수 있는 하나의 준거적 자료를 제공한다고 할 수

있다.

본 연구에서 논의된 미분방정식에 관한 개념적 모델의 이중성에 대한 묘사는 궁극적으로 수학 교실에 존재하는 개념적 모델의 다양성에 대한 사회문화적 이해의 중요성을 부각시킨다. 이와 같은 다양성에 대한 이해는 사회문화적 이론이 전통적인 인지적 이론과 차별화되는 부분이다. 즉, 전통적인 인지적 이론에서는 하나의 개념적 모델에 비추어 학생들의 학습과 발달 과정이 규정되고 평가되었다면, 사회문화적 이론에서는 다양한 개념적 모델의 공존과 그로 인한 개념적 모델의 재조정이 교육적으로 중요한 과제이다. 또한, 사회문화적 관점에서 학생이 실제로 경험하는 학습과 발달은 그가 접하는 다양한 수학 문화 속에 맥락화되는 복잡다단한 과정으로 인식된다. 기계 은유와 가상적 운동 은유로 대표되는 개념적 모델에서의 차이는 수업 상황에서 때로 장애로 나타나지만 궁극적으로 수학적 의미의 심화로 이어진다. 그리고 이러한 의미의 심화는 자연적으로 진행되는 것이 아니라 '차이'에 대한 의식과 이해, 그리고 수학 교사의 수학적 안목에 기초한 교수학적인 배려를 전제로 한다. 뿐만 아니라, 학생은 이러한 교사의 배려를 통해 그에 의해 제시되는 수학 공동체의 문화와 역사를 접하면서 그 문화적 규범에 비추어 자신의 문화적 모델을 재조정해간다. 이는 수학 교육이 수학적 기능의 획득이라는 기술적 차원을 넘어 학생의 문화적 모델, 즉 그의 세계를 이해하는 방식의 재조정에 관여하는 보다 심오하고 근원적인 과업임을 시사한다. 그렇다면 지적으로 자유롭고 독립적이면서 공동체의 역사와 문화에 대한 안목을 가진 학습자로 지도하여 문화적이고 역사적인 존재로 성숙할 수 있도록 배려할 수 있는 방법은 무엇일까? 어떻게 하면 교사는 초보자로서 학습자가 가진 문화적 역사적 배경의 차이를 이해하고 그가 수학 교실에서 경험하는 인식론적인 차이의 벽을 극복하도록 도울 수 있을까? 이들 질문에 답하기 위해서는 수학 교실 현장에서의 상호작용에 관한 지속적인 연구가 요구된다고 보며 사회문화적 이론은 그러한 탐구 과정에서 유용한 수학 교육 이론의 구성에 기여할 수 있을 것이다.

## 참고문헌


주 미경(2001). 수학적 은유의 사회 문화적 분석. **수학교육학연구**, **11**(2), p.239-256.

English, L. D. (Ed.). (1997). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structure*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1993). Thoughts on Teaching Mechanics: Didactical Phenomenology of the Concept of Force. *Educational Studies in Mathematics*, *25*, 71-87.

Goetz, J., & LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. New York: Academic Press.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 111-129.

Habre, S. (2000). Exploring Students'

Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(4), 455-472.

Hymes, D. (1974). Toward Ethnographies of Communication. In *Foundations in sociolinguistics: an ethnographic approach* (p. 3-28). Philadelphia: University of Pennsylvania Press.

Ju, M.-K. (2000). Communicative Routines in Mathematics Class. *(ERIC Document Reproduction Service No. ED 443 724).*

Ju, M.-K. (2001). *Being a mathematician: an ethnographic account of the cultural production of a mathematician at a university*. Unpublished Doctoral Dissertation: University of California, Davis.

Lakoff, G. (1993). The Contemporary Theory of Metaphor. In A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought* (p.202-276). New York: Cambridge University Press.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1999). *Philosophy in the flesh: the embodied mind and its challenge to western thought*. New York: Basic Books.

Lakoff, G., & Nunez, R. (1997). The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images* (pp.21-89). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lakoff, G., & Nunez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. New York: Basic Books.

Lampert, M., & Blunk, M. L. (Eds.). (1998). *Talking mathematics in school: studies of teaching and learning*. New York: Cambridge University Press.

Lemke, J. L. (1990). *Talking science: language, learning, and values*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Nunez, R., Edwards, L., & Matos, J. F. (1999). Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Context in Mathematics Education. *Educational studies in mathematics, 39*(1-3), 45-65.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically*. New York: Routledge and Kegan.

Rassmussen, C. (2001). New Direction in Differential Equations: A Framework for Interpreting Students' Understandings and Difficulties. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 55-87.

Quinn, N., & Holland, D. (Eds.). (1987). *Cultural models in language & thought*. New York, NY: Cambridge University Press.

Treffers, A. (1987). Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. *The wiskbas project*. Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. (1991). Didactical Background of a Mathematics Program for Primary Education. In L. Streefland (Ed.), Realistic *Mathematics education in primary school* (p. 21-57). Utrecht: CD-β Press.

# Students' Conceptual Metaphor of Differential Equations: A Sociocultural Perspective on the Duality of the Students' Conceptual Model

Ju, Mi Kyung · Kwon, Oh Nam (Ewha Womans University)

We present an understanding about students' conceptual model of differential equations, based on the discourse data that were collected in a differential equations course at a university in Korea. An interpretive approach is taken to analyze classroom discourse.

This paper consists of three main parts. First, we completely analyze the students' use of conceptual metaphor in a university differential equations class. Secondly, we identify conceptual metaphors representing students' conceptual model of differential equations. Finally, we describe the mathematical characteristics of the conceptual metaphors identified in detail.

Among other things, this paper reveals that there exists dual aspects of the students' conceptual model of differential equations. In other words, in the differential equations course observed we found that the students very often used two kinds of conceptual metaphor, "machine metaphor" and "fictive motion metaphor", that have contrastingly different mathematical characteristics. In order to interpret the duality, we take a sociocultural perspective, and this perspective suggests and helps us to realize the significance of understanding of cognitive diversity in mathematics classroom.

* **key words**: **개념적 모델, 개념적 은유, 미분방정식**