대한수학교육학회지 <학교수학> 제 5 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.5, No.1, 115-133. Mar 2003

교수학적 처방에 따른 중학생들의 일차함수 오개념의 변화와 그 효과 분석[1)]

이 종 희[*] · 김 부 미[**]

본 연구는 중학교 2학년 학생들의 일차함수에 대한 오개념을 탐구하여 범주화하고, 일차 함수의 개념 학습과정에서 학생들의 오개념을 교정하고자 설명식 교수 · 학습 방법과 동료간의 상호 작용을 통한 협동 학습 방법을 각각 실시했을 때의 효과를 비교 · 분석하였다. 그리고, 학생들이 동료간의 협동적 상호 작용을 하면서 개별적으로 구성한 오개념이 어떻게 변화, 발전하는 지를 탐색하였다. 연구 결과, 대수적 환경에서의 학생들의 오개념은 수 개념에 의한 장애, 변수 개념 부족에 의한 장애, 특정관점에의 집착으로 분류되고, 그래프적 환경에서 학생들의 오개념은 함수그래프의 해석과 판단에서의 장애, 변수 개념에 대한 장애로 범주화되었다. 상이한 교수학적 처방의 효과는 오개념의 범주에 따라 각각 다르게 나타났으나, 교정 학습 후에도 기존의 인지 구조에 강하게 각인된 오개념은 계속해서 남아 있었다. 또한, 학생들의 오개념 중 일부는 단순히 잘못된 것이 아니라, 이를 발판 삼아 동료간의 협동 학습을 통하여 올바른 개념으로 변환될 수 있었다.

Ⅰ. 서론

최근의 인지 심리학자들이 전제하고 있는 인지적 구성주의에서는, 학습은 학습자의 인지 구조의 계속적인 변화라고 본다. 이러한 맥락에서, 학습에 의해 학생 개개인의 인지구조는 계속적으로 수정되고 재조직된다. 또한, 학습 내용에 대한 이해의 측면에서 선언적 지식뿐만 아니라 절차적 지식의 중요성도 강조되고 있다. 절차적 지식은 학생이 아는 것을 실제에 적용할 뿐만 아니라, 기존의 인지 구조에 새로운 지식이나 경험을 스스로 의미 있게 재구성하도록 학습을 유발하기 때문이다. 이는 학습자의 개념 이해과정을 설명하고자, Gilbert, Osborne, & Fersham(1982)이 제시한 백지상태(Blank-Mind) 관점, 교사 주도적 관점, 학생 주도적 관점 중 학생 주도적 관점과 일맥 상통한다. 학생 주도적 관점은 학습자가 새롭게 배우는 지식을 자신의 인지 구조에 적용하고 탐구하며 다른 학생들과 상호작용을 충분히 할 수 있다고 가정한다. 백지상태 관점은 학습자의 새로운 지식에 대한 백지 상태의 인지 구조가 가르침을 받아 교사의 지식으로 채워질 수 있다는 것이다. 교사 주도적 관점은 학습자가 배우기 전에 사전 지식을 가지고 있어도, 교사의 지식으로 쉽게 대체될 수 있다는 관점이다.

그렇지만, 학습자 개개인의 인지구조는 학교

* 이화여자대학교(jonghee@mm.ewha.ac.kr)
** 구월여자중학교(bumi71@ewha.ac.kr)
1) 이 논문은 2002년도 한국 학술진흥연구재단의 지원(KRF-2002-030-B00051)에 의하여 이루어졌음.

나 사회가 학생들에게 가르치고자 했던 것과 다를 수도 있다. 과거의 경험과 수업으로부터 형성된 기존의 인지 구조가 새로운 지식을 동화하거나 재구성하는데 적절치 못하여 새로운 개념의 습득을 방해하거나, 학습자의 오개념이 강하여 수정되지 않고 계속 잘못된 상태로 지속될 수 있다. 특히, 우정호(1998), 박교식(1992), 정영옥(1997), Freudenthal(1983), Vinner(1983), Vinner & Dreyfus(1989) 등은 함수 개념이 학습자에게 생활 주변에서 일어나는 현상을 관찰하여 그 속에 내재된 수학적 법칙이나 형식을 발견하고 이를 구조화시키는 중요한 개념임에도 불구하고, 함수 개념을 이미 생성된 산물로써의 지식으로 가르치기 때문에, 많은 학생들이 함수 개념의 학습을 더욱 어려워하며, 그 과정에서 다양한 오개념을 가질 수 있다고 하였다. 학교 수학에서 일차함수 개념은 단순한 수식 $y=ax+b$ 또는 $f(x)=ax+b$로 제시되며, 이를 설명하기 위해 가로와 세로의 길이 변화에 따른 사각형의 넓이 또는 둘레의 길이 구하기와 같은 예들이 교과서에 주로 제시된다. 이와 같은 전형적이고 탈맥락적인 예들은 함수에 대한 편협한 개념을 다루어, 학생들이 함수 개념의 본질적인 면을 이해하는데 어려움을 준다. 또한, 그래프는 함수의 규칙을 파악하는 내용적인 측면보다 그래프를 그리는 기술적인 측면을 중심으로 지도되기 때문에, 학생들은 그래프의 역할과 필요성을 잘 이해하지 못한다.

그러므로, 교육 현장에 일차 함수 개념 지도를 위한 보다 상세한 정보를 제공하기 위해, 학생들의 일차 함수 오개념을 심층적으로 면밀히 검토할 필요가 있다. 이에 본 연구에서는 첫째, 중학교 2학년 학생들이 일차 함수를 규칙성, 관계성을 강조한 내용에 초점을 맞추어 학습할 때 발생하는 오개념을 범주화하고자 한다. 특히, 학생들이 함수의 수학적 개념을 구성하고 이해하는 데에는 두 가지 상이한 상징 체계인 대수적 표현과 그래프적 표현이 상호 보완적이나 각각 작동하므로(Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990), 오개념을 대수적 환경과 그래프적 환경으로 나누어 조사할 것이다. 둘째, 일차함수의 개념 학습 과정에서 학생들의 오개념을 교정하고자 설명식 교수·학습 방법과 동료간의 상호 작용을 통한 협동 학습 방법을 각각 실시했을 때의 효과를 오개념의 변화 측면에서 비교·분석하고자 한다. 셋째, 학생 주도적 관점을 바탕으로 하여, 일차 함수 단원에서 학생들이 개별적으로 구성한 오개념이 동료간의 협동적 상호 작용을 하면서 어떻게 변화, 발전하는 지를 탐색하고자 한다. 현재 우리나라의 수학적 오개념 연구에서 동료간의 협동적 상호작용을 통한 학습자의 이해 과정을 밝혀주는 연구가 규준 지향적(nomothetic) 연구[2]에 비해 부족하다. 이에, 본 연구에서는 오개념의 새로운 교수학적 처방의 가능성을 모색하고자, 규준 지향적 연구가 아닌 동료간의 협동 학습을 통해 학생들이 스스로 오개념을 반성하여 올바른 개념으로 인지적 재구성을 할 수 있다는 것을 보이려고 한다. 본 논문의 연구 문제는 다음과 같다.

연구문제 1: 대수적 환경과 그래프적 환경에서 학생들의 일차 함수 개념에 대한 주된 오개념은 무엇인가?

연구문제 2: 일차 함수 개념을 설명식 수업 학습과 상호 작용을 강조한 동료간의 학습을 통해 학습한 후, 오개념의 변화에서 차이를 보이

2) Driver와 Easley(1978)에 따르면, 규준 지향적 연구는 기준을 정하고 연구자가 그 기준에 순응하는 학생들의 이해 정도를 평가하는 방법으로, 학생의 지식이나 정보의 습득 여부를 평가하기에는 적합하지만, 학생이 왜 오류를 범하는 지 등에 대한 자세한 정보를 수집하기는 어렵다.

는가?

연구문제 3: 학생들의 일차 함수 개념에 대한 오개념이 동료와의 상호작용을 강조한 협동 학습을 통하여, 수학적 정교화의 관점에서 어떻게 변화되어 올바른 일차 함수 개념을 구성하는가?

II. 이론적 배경

1. 함수 개념

함수는 학교 수학에서 중요한 개념으로 우리나라 교육 과정에서 큰 비중을 차지하고 있다. 함수의 본질은 크게 두 가지로 대비되는데, 하나는 종속 관계를 함수의 본질로 보는 것이고, 또 하나는 함수를 대응 관계로 보는 것이다. 특히, 7차 중학교 수학과 교육 과정에서는 함수 개념을 대응관점에서의 함수를 정의한 후에 도입하는 것이 아니라 비례 관계를 이용한 종속 개념으로 도입하고 두 변수 사이의 규칙적인 관계에 주목한다.

초등학교 수학에서는 함수라는 용어가 사용되고 있지 않지만, 배(倍)의 개념으로 수, 사칙 계산, 대응 규칙 찾기, 표와 그래프 등 종속성과 관련된 함수적 사고 활동이 이루어지고, 중학교 수학에서는 종속 관점에서의 함수 정의와 용어가 도입되며, 정비례, 반비례 관계와 그 그래프, 일차 함수와 이차 함수 및 그 그래프, 직선의 방정식 등이 다루어진다. 이는 함수를 학생의 발달 단계와 활용성 등을 고려하여 함수의 초보 개념인 변수의 변화 관계로 도입하여, 현실적인 변화 상황을 기술하고 해석하며 예측하기 위한 도구로서 익히는 것을 의미한다. 또한, 언어적 표현, 그래프, 대수식 등의 다양한 표현 사이의 번역을 통하여 학생들에게 함수적 관계의 다양성과 임의성을 인식시키고자 하는 것을 의미한다. 이에, 본 연구에서는 현 중학교 수학에서 다루는 일차 함수 개념을 중점적으로 살펴보고자 한다.

일차 함수 개념은 종속 관계로 보는 관점을 따르며, 한 양 체계 내에서의 비가 다른 양 체계 내에서의 비로 보존되는 비례 관계의 선형 사상으로 고대 그리스시대에서 그 원류를 찾을 수 있다. 그리스인들은 $y=ax\pm b$의 꼴의 일차 함수를 '비 보다 더 크게 혹은 더 작게 주어진 양'이라고 하였다(Freudenthal, 1983). 정영옥(1997)은 일차 함수가 종속 관계를 포함하는 상황들에서 변화를 측정하고 수량화하여 관계식으로 나타나며, 다이어그램, 그래프 표현 등을 이용하여 변화하는 대상들 사이의 종속 관계를 파악하는 것이라고 하였다. 일차 함수는 1학년 때 배운 함수식 $y=ax$를 확장해서 중학교 2학년 때, 진행거리와 시간 또는 시간과 시간당 요금과 같은 일상 생활에서 접할 수 있는 두 양 사이의 관계를 식 $y=ax+b$로 나타내어 봄으로써 도입된다. 교과서의 일차함수의 정의는 다음과 같다. '일반적으로 y는 x의 함수이고 $y=ax+b$(a, b는 상수, $a\neq 0$)과 같이 y가 x에 관한 일차 식으로 나타내어질 때, 이 함수를 일차함수라고 한다'(강행고 외, 2001). 정의가 도입된 후, 그래프를 그리는 방법과 기울기의 개념을 다루고, 변수 a의 역할, y절편 b의 역할, 일차 함수의 그래프와 일차 방정식의 관계를 다룬다. 그 후, 온도 변화, 속도와 거리의 문제 등과 같은 실생활의 현상과 관련된 일차 함수 문제를 응용 문제로서 다룬다.

일차 함수의 그래프 개념과 관련하여, Schoenfeld, Smith, & Arcavi(1989)는 학생들의 일차 함수의 그래프에 대한 수학적 이해가 어떻게 변하는 지를 네 가지 수준으로 기술하였다(Tall, 1991, 재인용). 수준 1은 스키마 측면에서 지식의 거시적 조직(macro-organization)과 관련

된 것으로, 직선의 방정식 $y=mx+b$에서 m과 b는 각각 기울기와 y절편을 나타낸다는 것을 이해하는 수준이다. 수준 2는 축적된 지식을 바탕으로 거시적 실재(macro-entities) 및 그 함의와 관련된다. m>0이면 직선은 증가하고, $|m|$이 클수록 직선은 y축에 가까우며, 점 $(0, b)$는 직선과 y축과의 교점임을 이해하는 수준이다. 수준 3은 그 지식을 뒷받침하는 정교한 상위 구조와 관련되는 것으로, 주어진 두 점을 지나는 직선의 기울기 $\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$를 두 유향 성분으로 생각할 수 있고, $y=mx+b$에서 x=0일 때 y절편을 얻을 수 있다는 것을 깨닫는 수준이다. 수준 4는 제한된 적용 상황을 벗어나 수준 3에서 볼 수 있었던 핵심 개념을 파악하여 그 구조를 다양한 문제 상황에 활용할 수 있는 수준이다.

2. 수학적 오개념

Brousseau(1997), Tall(1989), Herscovics(1989), Cornu(1991) 등 많은 학자들은 수학적 오류 또는 오개념을 인식론적 장애, 인지적 장애 등으로 언급하였다. 인식론적 또는 인지적 장애의 정의는 학자마다 약간의 차이가 있으나, 주로 특정한 맥락에서 유용했던 학생의 인지구조의 일부가 새로운 문제 상황이나 더 넓어진 맥락에서 부적합해지는 지식을 일컫는다. 이 때, 학생들은 지식을 획득하는 과정에서 불가피하게 오류를 범하기 때문에, 교육적 입장에서 이에 적극적으로 대처할 것을 주장하였다. 인식론적 장애와 인지적 장애를 구분할 때, Herscovics (1989)는 인지적 장애를 학생들이 개인적인 지식의 발달 과정에서 겪는 어려움의 원인으로 발생하는 장애로, 인식론적 장애는 역사적으로 학문적 지식의 발달 과정에서 나타난 장애라고 하였다. Herscovics가 학생들의 장애를 구분하여 명명한 것은 학생들의 장애가 반드시 인식론적 측면에서만 기인하지 않을 뿐만 아니라, 개념의 역사적 발달 과정에서 발견된 것과 유사한 개념이 나타난다고 해도, 그 개념이 발달하던 과거의 상황과 현재의 상황이 다르기 때문이다. Cornu(1991)는 인지적 장애를 근원에 따라 학생 개인의 발달 결과로서 발생하는 심리적·발생적 장애로, 인식론적 장애는 수학적 개념 그 자체의 본성 때문에 생기는 장애로, 교수학적 장애는 교사와 교수의 영향 때문에 발생하는 장애로 분류하였다.

그리고, Confrey(1987)는 학생들이 학습에 들어가기 이전부터 이미 각각의 경험을 통해 학습과 관련된 선개념(先概念)을 가지며 이것이 수학적 개념과 대립될 때, 이 선개념을 오개념이라고 정의한다. 학생들은 학교 수업을 받기 전의 사회·문화적 경험 등을 통해 학습할 내용에 대한 선개념이나 직관을 형성하고, 이것이 학생의 인지구조에 깊이 자리잡게 되면 학교 교육에서 제시되는 새로운 개념들과 접하면서 갈등과 마찰을 일으키게 된다. 이 과정에서 발생한 학생의 개념체계가 오개념인 것이다. 그밖에도, Vinner와 Tall(1981)은 개념 정의와 개념이미지의 격차로 인해 인지 갈등을 일으키고, 이로 인해 공식적인 개념 정의를 잘못 해석하여 오개념을 형성한다고 보았다. Sierpinska (1987)는 오개념이 학생들의 개념 이해 측면에서 어려움의 원인이 되지만, 학생들의 지식의 일부를 차지하는 필수적인 구성부분이 될 수 있다고 하였다. 즉, 오개념을 새로운 지식의 구성을 방해하는 부정적인 관점에서만 볼 것이 아니라 학생들의 개념 이해 과정의 토대가 되어, 학생들이 그 오개념을 극복하고 바른 개념을 이해하도록 한다는 긍정적인 시각이 필요함을 시사한 것이다.

이와 같이 많은 선행연구를 살펴보면, 학생들의 수학적 오개념은 수학적 지식에 대한 단순한 장애가 아니라 합당하고 형식적인 근거를 가진 사고 체계로서 무작위적이고 암묵적이라기보다는 반복적이고 분명한 형태를 취하고 있다. 또한, 선행 연구들은 수학적 지식의 통합이나 다른 지식과의 연결 과정, 문제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 오개념, 오류를 인지적으로 재구성하는 방안을 탐색할 필요성을 역설하고 있다. 이에, 본 연구에서는 앞서 고찰한 오개념을 발생 요인별로 다음과 같이 정리하였다. 첫째, 개념체계의 요인이다. 학생의 기존 개념체계는 학생과 환경이 상호 작용한 결과이다. 그래서 학생은 기존의 인지구조를 이용해서 새로운 인지구조를 형성하게 되는데, 이 과정에서 개념을 정확하게 이해하지 못하면 오개념이 발생한다. 이러한 관점에서, 학생이 지닌 특정한 선개념이 확고하여 새로운 개념으로 조절이 되지 않는 경우와 인지적 장애 등은 개념체계의 요인에서 발생할 수 있는 오개념이다. 둘째는 본질적 요인으로, 오개념은 인지과정에서 감각, 지각, 기억, 추론 등의 사고 과정을 거치게 되는데, 특히 개념의 지각적 특징과 관련해서 발생한다. 예를 들어, 그래프 해석에서 그 시각적 특징으로 인해 함수의 관계성을 잘못 습득하는 경우나 개념 이미지와 개념 정의의 격차로 인해 발생할 수 있는 오개념이 해당된다. 이 밖에도, 경험적 요인으로 교과서, 언어, 개인의 경험에서 오개념이 발생할 수 있다.

3. 선행 연구의 고찰

앞에서 살펴본 오개념의 발생 요인을 토대로 함수의 오개념에 대한 선행 연구를 다음 세 가지 유형으로 고찰하고자 한다. 첫째, 개념체계 요인과 관련하여, 학생의 함수 개념 학습 시, 특정 선개념이 강하여 발생하는 오개념을 "특정 관점에의 집착으로 인한 오개념"이라고 할 수 있다. 둘째, 학생들이 함수를 학습할 때, 개념의 지각적 특징으로 인해 사고 과정에서 방해를 받아 학습하고자 했던 개념에 대한 오판이 일어나게 되는 경우, 오개념은 본질적 요인 때문에 발생한 것이다. 구체적인 예로, 학생들은 종종 두 자동차의 시간과 속도의 관계를 나타낸 그래프에서 교점의 의미를 그래프의 시각적 특징으로 인해 두 자동차가 만나는 위치라는 공간적 의미로 해석한다. 이처럼 함수 개념의 지각적 특징과 같은 본질적 요인으로 발생하는 인지적 장애를 "관계적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오개념"으로 구분할 수 있다. 끝으로, 경험적 요인과 관련된 함수에 대한 오개념은 주로 교과서, 언어, 개인의 경험에 의해 발생하는 변수 개념의 장애를 들 수 있다. 이에, 본 연구에서는 함수의 오개념에 대한 선행연구를 특정 관점에의 집착으로부터 오는 오개념 연구, 관계적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오개념 연구, 변수 개념에 대한 장애로 인한 오개념 연구, 오개념의 올바른 개념으로 변화하는 과정에 초점을 맞춘 연구, 그 외의 다른 연구로 분류하여 고찰하고자 한다.

첫째, 함수 학습에서 특정 관점에의 집착으로 인한 오개념은 주로 표현과 관련된 연구에서 나타난다. Mevarech와 Kramarsky(1997)는 그래프의 구성과 관련된 학생들의 특정 관점에 집착하는 오개념을 조사하여 3가지 유형으로 나누었다. 오개념의 3가지 유형은 (a)그래프를 전체 자료의 특징을 대표하는 하나의 값을 찾아서 그 한 점으로 표현하는 것, (b)관련된 데이터 각각의 요소에 대응되는 각각의 그래프를 연속적으로 표현하는 것, (c)모든 조건에 대해 증가함수의 형태를 보존하는 것이다. 그리고, Rich(1990)는 학생들이 기울기 개념에 대한 대

수적 표현에 집착하기 때문에, 기울기를 그래프로 번역할 때, 그 의미하는 바를 어려워한다고 하였다.

둘째, 관계적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오개념은 주로 기울기와 높이를 함수의 그래프에서 혼동하거나, 그래프의 전체적인 모양과 문제 상황의 시각적 특징들 또는 축이나 변수에 대한 오판으로 나타난 오개념 연구에서 찾아 볼 수 있다. Clement(1989)는 두 자동차의 움직임에 대한 시간-거리 그래프를 제시하고 특정 시간일 때, 학생들에게 두 자동차 중 속도가 빠른 것을 지적하라고 하였다. 이 때, 학생들은 변수와 그래프적 특징을 잘 해석하지 못하여 기울기 대신 높이라는 그래프 특징에 주목하여 대답하였다. 그리고, 언덕을 내려올 때 자전거의 시간에 따른 속도를 그래프로 나타내라고 했을 때, 학생들은 그래프의 전체적인 모양과 문제 상황을 대응시킴으로써 언덕 모양의 그래프를 그리는 오류를 범하였다. Billing와 Klanderman(2000)은 축의 눈금을 조정한 좌표 평면 위에 어떤 물체에 대한 시간-거리 그래프를 그린 후, 학생들에게 물체의 속도를 판단하게 하였다. 이 때, 학생들은 축의 눈금 변화로 인해 그래프의 형태가 변화했다는 점에 주목하기보다는, 단순히 시각적 특징에 따라 속도를 판단하는 오류를 보였다.

셋째, 변수 개념에 대한 장애의 관점에서 함수의 오개념을 조사한 연구는 다음과 같다. Dreyfus와 Eisenberg(1987), Schoenfeld(1985), Karplus(1979), Ponte(1984)는 많은 학생들이 한 변수로 된 일차 함수와 자신이 직접 그린 그래프를 거의 연결시키지 못한다고 하였다(Tall, 1991, 재인용). 이 연구들은 이러한 현상이 나타나는 원인으로, 학생들이 그래프에 나타나는 독립변수와 종속변수 사이의 관계와 같은 함축된 의미를 완전히 이해하지 못하기 때문에 그래프를 해석하지 못하는 것이라고 하였다.

넷째, 함수에서 오개념의 개념적 변환과 관련된 연구를 살펴보면, Moschkovich(1992, 1999)는 학생들의 일차함수와 일차 방정식에 대한 오개념이 동료와의 상호 작용을 통하여 변화 발전하는 과정을 분석하여 "과도기적 개념"을 제시하였다. 과도기적 개념은 오개념 중, 특정 문제 맥락에서는 올바른 개념으로 응용될 수 있는 일부 오개념으로서, 이를 수정하면 학습할 옳은 개념으로 전이되고 진화할 수 있는 개념을 말한다. 이 연구에서 학생들은 일차 함수식 $y=mx+b$을 구할 때, x절편을 사용하지 않음에도 불구하고, $m=1$일 때, x절편의 x좌표와 부호가 반대되는 수를 b로 사용하여 함수식을 유도하였다. 이와 같이, 일차함수의 관계식 유도에서 나타난 x절편에 대한 학생들의 개념을 과도기적 개념이라고 하였다.

이밖에도, 오정현(1996)은 중학생들을 대상으로 함수영역에서 발생하는 수학적 오류를 오용된 자료, 잘못 해석된 언어, 논리적으로 부적절한 추론, 필수적인 사실과 개념의 부족한 숙련, 요구되지 않은 해답, 기술적 오류, 풀이과정의 생략으로 분류하였다. 그리고, 이종희(1999)는 함수 개념의 역사를 살펴봄으로서 학생들이 함수 개념에 대해서 어려워하고 오류를 범하는 원인을 찾고자, 인식론적 장애를 변화하는 세계에 대한 인식의 결여, 수리철학에 의한 장애, 수 개념에 의한 장애, 변수 개념 부족에 의한 장애, 함수의 관계에 의한 장애, 함수 표현에 의한 장애, 정의 개념에 의한 장애로 나누어 살폈다.

본 연구에서는 일차 함수의 학습 시 나타나는 학생들의 오개념은 하나의 특정 근원을 통해서만 설명될 수 없기 때문에, 대수적 측면과 그래프적 측면 각각에서 오개념을 앞서 분류한 특정 관점에의 집착, 관계적 해석과 판단에서

의 장애, 변수 개념에 대한 장애 등으로 유형을 분류하여 탐색하고자 한다. 또한, 일차 함수 개념을 설명식 수업 학습과 상호 작용을 강조한 동료간의 학습을 통해 학습한 후, 범주화했던 오개념 유형에서의 변화가 있는 지를 살피고자 한다. 그리고, 특히 동료와의 상호작용을 강조한 협동 학습에서 오개념이 올바른 개념으로 변화할 수 있는 지를 알아볼 것이다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 인천의 G여자 중학교 2학년 학생들로, 설명식 수학 수업을 받은 학생들 40명과 동료와의 상호 작용을 통한 협동식 수업을 한 학급 학생들 30명이었다. 학생들의 수학 실력은 1학기말 고사 성적을 기준으로, 설명식 수업 학급의 평균 성적은 69.35점, 동료와의 협동식 수업 학급의 평균 성적은 69.85점으로 비슷하였다. 특히 연구 문제 3를 위해, 집중적으로 녹화된 협동식 수업 학급의 2조 학생들 4명은 매우 친한 또래 집단으로 각각 E, J, G, S로 표기할 것이다. 학생 E와 S의 수학 성적은 학급 평균을 기준으로는 중위권 학생이며, J와 G는 상위권 학생이다. 그리고 E를 제외한 학생들 3명은 수학을 흥미 있는 과목으로 생각하는 긍정적인 수학 태도를 가진 학생들이다.

2. 연구 방법

연구 대상인 두 학급의 학생들은 일차 함수 단원을 본 연구가 실시되기 전인 2002년 5월 중순부터 1학기말고사 이전까지 설명식 수업을 주당 3시간, 동료간의 의사 소통을 위주로 한 토론 수업을 주당 1시간씩 연구자에게 직접 배웠다. 따라서, 1학기말 고사 후 실시된 본 연구에서 표집된 두 학급 학생들은 설명식 수업과 동료간의 협동 학습에 모두 익숙하였다.

일차 함수 오개념에 대한 예비 연구를 표집 학급이 아닌 한 학급을 대상으로 앞서 말한 방식으로 수업을 진행한 후 실시하였다. 이 때, 일차 함수 개념을 묻는 대수적 환경의 검사지와 그래프 해석과 그리기를 위주로 하는 그래프적 환경의 검사지를 직접 제작하여 실시하였다. 그런데, 학생들의 수준이 교사의 예상보다 낮아서, 검사지에 실린 문제의 난이도를 보다 쉽게 조정하여 본 실험에 적용하였다. 특히, 상황을 제시하고 그래프를 그리게 하는 응용 문제를 제시했을 때, 4명을 제외한 모든 학생들이 교사의 도움을 받은 뒤에만 과제를 완수 할 수 있었기 때문에, 그래프적 환경의 검사지는 그래프 해석 능력에 초점을 둔 과제로 변경하였다. 그러나, 그래프 표현의 응용문제를 풀지 못하는 원인을 찾고자, 대수적 환경의 검사지에서 문제 3-(4)의 $y=ax$와 같은 가장 기본적인 일차 함수의 그래프를 그리는 문제를 제시하였다. 이 문제는 학생들이 1학년 때 이미 학습한 내용으로, 사전 지식을 형성한 가장 간단한 일차함수 $y=ax$를 교과서에서 제시되는 전형적인 순서, 즉 대수적으로 관계식과 함수값을 구한 뒤 좌표평면에 그래프를 그리는 방법으로 조사하였다.

특히, Leinhardt, Zaslavsky, & Stein (1990)은 함수 과제를 그래프 해석과제와 그래프 구성과제로 구분하고, 본 연구에서 사용된 대수적 환경의 검사지에서 문제3-(4)와 같은 유형을 그래프 구성과제라고 하였다. 그래프 해석과제는 그래프에서 변수에 대응하는 값 찾기, 변수들 간의 관계 진술하기, 그래프로부터 상황이나 추상적인 함수적 관계를 표현하기 등이며, 그

래프 구성 과제는 자료나 방정식으로부터 그래프를 그리거나, 그래프가 주어졌을 때 그에 알맞은 대수적 관계를 만드는 활동, 자료를 선택하여 축에 이름을 붙이고 축의 눈금을 선택하며 단위를 확인하여 그래프를 그리는 것이다.

본 실험은 표집된 두 학급을 대상으로 수정된 검사지를 사용하여 기말고사 후인 7월 둘째 주에 실시하였다. 두 학급은 설명식 수업 학급(40명)과 동료간의 상호 작용을 강조하는 협동식 수업 학급(30명)으로 구분된다. 본 실험은 <그림 1>과 같이 설계되었다.

설명 수업식 학급	F_1	T	F_2
협동 수업식 학급	F_1	S	F_2

<그림 1> 연구의 실험 설계

연구 문제 1의 일차 함수에 대한 오개념을 범주화하기 위해서, 설명 수업식 학급과 동료간의 협동 수업식 학급의 모든 학생들에게 대수적 환경과 그래프적 환경으로 구성된 검사지(F1)를 풀게 하였다. 대수적 환경의 검사지는 학생들에게 익숙한 교과서 연습 문제 형식의 보통 수준의 난이도인 문제 4개로 구성되었다. 문제 1은 물의 온도와 시간에 대한 문제로, 관계식 구하기와 변수로 주어진 시간 및 온도 각각의 함수값 구하기로 이루어졌다. 문제 2와 4는 독립변수와 종속변수로 가로와 세로의 길이, 문제의 맞은 개수와 점수가 각각 주어졌을 때, 넓이와 총점에 대한 관계식을 구하는 문제이다. 문제 3은 속도와 거리사이의 관계식과 함수값을 구하고, 정의역이 주어졌을 때 그래프를 구성하는 문제이다. 그래프적 환경의 검사지는 여러 가지 다양한 상황을 해석하여 주어진 그래프와 대응시키면서 자신의 의견을 정당화하는 문제 8개로 구성되었다. 각 문제 당 실생활 상황이 문장으로 주어지면 그에 알맞은 그래프를 고르고 그 선택 이유를 기술하도록 하였다. 사후검사 문제지(F2) 역시 대수적 환경과 그래프적 환경의 검사지 각 1장으로 구성되었고 그 내용은 사전검사와 동형이었다. 그리고, F1과 F2의 두 검사지 모두 학생들이 답을 기록할 때, 그 답을 쓴 이유를 문제 이해하기-계획수립하기-실행하기-반성하기의 단계별로 상세히 설명하게 하였다.

연구 문제 2의 오개념을 교정하기 위한 교수·학습 방법의 효율성을 비교·분석하고자, 설명 수업식 학급은 사전 검사(F1) 후, 일차 함수에 대한 문제 해결 과정을 45분씩 2시간동안 설명식 교수(T)를 한 다음 사후검사 문제지(F2)를 풀게 하였다. 협동 수업식 학급 역시 F1을 행한 뒤, 동료간의 상호 작용(S)을 통하여 일차 함수 활용에 대한 문제 해결 학습을 45분씩 2시간 동안 6개조로 나뉘어 함께 수행하였다. 그러나, 사후검사 때에는 사후검사 문제지(F2)를 학생 개개인이 먼저 수행한 뒤, 6개의 조로 나뉘어 동료간의 협동 학습으로 풀게 하였다. 이 때, 사후 검사 수행 시간은 설명식 수업 학급과 협동식 수업 학급이 60분으로 같았다. 조별 협동 학습을 할 때, 학생들의 활동은 녹화되었다. 교사는 자연스럽게 학생들을 관찰하고, 조별 활동 시 학생들이 질문을 하면 직접적인 답을 알려주지 않고 조언을 하였다.

연구 문제 3의 학생들의 개념적 변화 과정을 살피기 위해, 교사의 개입이 전혀 없는 상태에서 4명의 학생들로 이루어진 2개조를 대상으로 F2의 문제 해결과정을 활동 시간 내내 전체 학급 활동의 녹화와는 별도로 녹화·분석하였다. 녹화된 기록 내용과 조별 활동에 대한 관찰일지의 분석은 다음의 가정 하에 진행하였다. 수업 시간 내내 학생들 사이의 일차 함수 개념

학습의 발전과정에 대한 상호작용은 비슷한 패턴을 보여주었으므로, 중점적으로 관찰된 조의 연구 결과는 협동식 수업 학급의 전형적인 것으로 가정한다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 학생들의 오개념의 범주화

사전검사에서 나타난 연구 문제 1에 대한 그래프적 환경과 대수적 환경에서 학생들의 일차함수 오개념의 범주화 결과는 다음과 같다. 먼저, 대수적 환경의 검사지에 대한 활동 결과, 학생들에게서 공통적으로 나타나는 일차 함수 단원의 오개념을 선행 연구 고찰에서 살펴보았던 발생 요인에 따라 분석하면, 수 개념에 의한 장애, 변수 개념 부족에 의한 장애, 특정관점에의 집착으로 인한 오개념으로 범주화된다.

수 개념의 장애는 적어도 한 번은 문제에서 제시된 수를 그대로 받아들이는 장애이다. 대표적인 예로서, 대수적 환경의 문제 1-(1), '물은 온도 100℃에서 10분이 지날 때마다 온도가 5℃씩 내려가고 x분 후에는 y℃가 된다. 이 때 y를 x에 관한 식으로 나타내어라'를 풀 때, 학생들은 1분마다 x의 변화량을 구해야 하는데, 10분마다 5도씩 내려간다는 문제에 제시된 수를 그대로 받아들여 관계식을 구하였다.

변수 개념 부족에 의한 장애는 위 문제 1에서 물의 온도가 20℃가 될 때의 시간과 1시간이 지난 후 물의 온도를 구하는 문제에서 x, y 중 어디에 20과 60(1시간)을 넣어야 할지 혼동하는 장애이다. 즉, 함수식에서 특정 변수에 대한 값을 구하는 문제와 일차 함수의 관계식을 구하는 문제에서 학생들이 적어도 한 번은 x, y의 사용을 혼동하는 장애를 말한다.

특정관점에의 집착으로 인한 오개념은 적어도 한 번은 소수나 분수보다는 정수로 인식하는 특정 관점에 집착하는 경우, 함수의 관계식에 대한 문제를 연산 기술 등을 강조한 방정식으로만 풀려고 하는 경우, 모든 일차함수의 그래프 모양이 y=x의 기울기가 1인 증가 함수의 모양으로 그려서 정의역의 구간만 다를 뿐 그래프의 모양이 모두 같게 그리는 경우로 분류되었다. 각각의 대표적인 예는 다음과 같다. 학생들은 계수에 분수나 소수가 있는 방정식 풀 때 계수를 정수로 간단히 했던 사전지식 때문에, 앞의 문제 1에서 관계식 $y=-0.5x+100$을 구할 때, -0.5 대신에 -5를 써야 한다고 주장하였다. 또, 문제2에서는 가로, 세로의 길이가 각각 5cm, 4cm인 직사각형에서 가로의 길이를 x cm만큼 줄였을 때, 넓이 y㎠와 x사이의 관계식을 구하도록 하였다. 이 때, $(5-x)\times 4=y$라고 답을 쓴 학생은 옳은 관계식을 구했지만, 변수가 x와 y, 두 개인 이유를 "x랑 y랑 당연히 들어가야 방정식이기 때문에"라고 답하였다. 이것은 방정식이라는 특정 관점에 집착한 나머지, 두 변수 x, y 사이의 함수 관계를 인식하지 못하고 식을 세우는 문제와 혼동한 것이다. 그리고, 어떤 학생은 관계식 $y=(5-x)\times 4$는 옳지 않고, 풀기 전과 후를 구분하기 위해서 $(5-x)\times 4=y$라고 써야 한다고 주장하였다. 이는 x, y의 관계를 찾기보다는 방정식을 풀어 나갈 때, "x=해"의 형태를 얻는 연산 과정의 전후를 강조한 학습의 결과인 듯하다. 또한, 문제 3-(4), '1분에 4㎞씩 달리는 자동차가 같은 속도로 x분 동안에 달린 거리를 y㎞라 할 때, $0\leq x\leq 10$에서 이 관계식의 그래프를 그려라'에서, 모든 학생들이 그린 일차함수의 그래프 모양이 $y=x$형태의 기울기가 1인 증가함수의 모양에만 집착하여 그리기 때문에 정의역의 구간만 다를 뿐 그래프의 모양이 모두 같았다. 이

상의 특정 관점에의 집착으로 인한 오개념은 학생들이 대수식으로 함수에 접근함으로써, 함수 개념에 대해 잘못된 개념 이미지를 갖게 되어 발생하는 것 같다. 연구결과, 학생들은 특정 관점에의 집착으로 인한 오개념을 다른 오개념보다 많이 가지고 있으며, 특히 함수의 관계식에 대한 문제를 방정식 풀이방법을 사용하여 풀려는 학생들이 전체 학생들의 69%를 차지하였다.

대수적 검사지에서 범주화된 학생들의 오개념의 구체적인 결과는 다음의 <표1>과 같다. 그래프적 환경에서 학생들의 오개념은 그래프 해석과 판단에서의 장애, 변수 개념에 대한 장애로 범주화된다. 본 과제가 함수의 그래프 해석 능력, 즉 상황에 따른 가장 적합한 그래프 유형을 고르도록 하는 데에 초점을 두었던 제한점으로 인하여, 함수 표현에서의 장애는 범주화 할 수 없었다. 그래프 해석 문제에서 그래프를 전반적인 특징으로 인식하는 경우와 최적의 그래프를 2개로 답한 경우를 그래프 해석과 판단에서의 장애로 분류하였다. 변수 개념에 대한 장애는 학생들이 변수를 선정하여 축에 사상시킬 때, y축을 자의적으로 해석하여 혼동하는 장애이다.

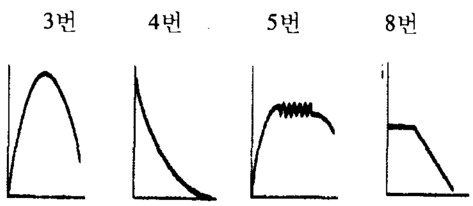
각 범주의 구체적인 예를 살펴보면 다음과 같다. 그래픽 환경의 검사지의 3번 문제는 '풍선을 최대로 불었다가 놓아 버리면 풍선은 방바닥을 이리저리 돌아다닐 것이다. 이 때, 풍선

<표 1> 범주에 따른 대수적 환경에서의 오개념 분류3)

오개념의 범주 \ 범주별 학생 수	설명식 수업 학급 (n=40)	협동식 수업학급 (n=30)	합계 (n=70)
수 개념에 의한 장애 적어도 한 번은 문제에 제시된 수를 그대로 받아들이는 장애	10(25%)	8(27%)	**18(26%)**
변수 개념에 의한 장애 적어도 한 번은 관계식과 식의 값을 구하는 문제에서 x, y의 사용의 혼동	12(30%)	10(33%)	**22(31%)**
특정 관점에의 집착 (1)적어도 한 번은 소수나, 분수보다는 정수로 인식하는 특정 관점에 집착	15(38%)	9(30%)	**24(34%)**
(2)적어도 한 번은 함수의 관계식에 대한 문제를 연산 기술 등을 강조한 방정식으로만 풀려고 하는 장애	28(70%)	20(67%)	**48(69%)**
(3)모든 일차함수의 그래프 모양이 y=x의 기울기가 1인 증가 함수의 모양으로 그려서 정의역의 구간만 다를 뿐 그래프의 모양이 모두 같게 그리는 오류	30(75%)	21(70%)	**51(73%)**

3) <표1>과 <표2>는 오개념의 범주화가 목적이기 때문에, 설명식 수업 학급과 협동식 수업 학급의 구별 없이 각 장애에서의 총 학생 수(백분율)로 해석되어야 한다. 그러나, 연구 문제 2(교수학적 처치와 오개념의 차이 비교)와 관련하여 <표3>과 <표4>와의 연관을 위해 각각의 수업 방식을 구분하여 범주별 학생 수를 적었다.

속 공기의 양과 시간의 관계를 표현한 가장 적합한 그래프를 고르고 그 선택 이유를 써라(단, 가로축인 x축은 시간을 의미한다)'였다. 이 현상을 그래프로 해석할 때, 일부 학생들은 처음 풍선 속 공기의 값이 최대이고 점점 공기의 양이 줄어들기 때문에, <그림 2>의 4번 그래프를 선택하였다. 다른 학생들은 처음에 풍선 속의 공기가 빨리 빠져나가고 일정 시간이 지나면 천천히 빠져나가기 때문에 속도를 y축으로 하여 <그림 2>의 3번 그래프를 선택하였다. 그 외에도, 공기가 빠지면 풍선이 이리저리 튕겨 다니기 때문에, 지그재그 형태의 그래프인 <그림 2>의 5번을 선택한 학생들도 있었다. 이와 같이, 그래프 모양을 기준으로 y값을 정하면서, 그래프를 전반적인 특징으로 인식하려는 그래프 해석과 판단에서의 장애가 있었다. 또한, 학생들은 문제에 변수 개념이 주어졌는데도 y축을 공기의 양인지 공기의 빠지는 속도인 지를 자의적으로 해석하여 y축을 선정하는 문제에서 장애를 보였다. 이러한 오개념은 변수 개념의 장애로 분류하였다.



<그림 2> 그래프적 환경 검사지에 언급된 그래프
(단, x축은 시간을 의미한다)

그리고, 문제 5번의 물을 냉동실에 얼릴 때 시간과 냉동실에 있는 물의 온도와의 관계를 그래프로 표현하는 문제에서, 일부 학생들은 답으로 8번 그래프와 4번 그래프를 모두 택하였다. 그 이유를 일정시간 지나야 물의 온도가 떨어지기 때문에 8번이 답이 되고, 어는점까지 온도는 조금씩 계속 감소하기 때문에 4번도 답이 된다고 주장하였다. 이와 같이 그래프 선택에 있어서 현상을 해석할 때, 기존의 알고 있는 지식으로 인해 해석과 판단의 장애로 인해 답을 2개로 구하였다. 이상을 종합한 구체적인 오개념 범주는 아래 <표2>와 같다.

<표 2> 범주에 따른 그래프적 환경에서의 오개념 분류

범주별 학생 수 / 오개념의 범주	설명식 수업 학급 (n=40)	협동식 수업 학급 (n=30)	합계 (n=70)
그래프 해석과 판단에서의 장애			
(1) 그래프를 전반적인 특징으로 인식하려는 경향	24(60%)	21(70%)	**45(64%)**
(2) 답을 2개로 구한 경우	4(10%)	14(47%)	**18(26%)**
변수개념에 대한 장애 그래프 해석 시 y축을 자의적으로 해석하여 y축에 사상시킬 변수를 혼동하는 장애	6(15%)	10(33%)	**16(23%)**

2. 학생들의 오개념의 변화에 대한 두 학급의 비교

연습 문제 2의 일차 함수 개념에 대한 설명식 교수 학습과 상호 작용을 강조한 동료간의 협동 학습 후 오개념의 변화에서 차이를 조사하기 위해, 각각의 학습 후 F2를 실시하여 오개념의 수정여부를 비교하였다. 그 결과는 아래 <표 3>과 <표4>이다.

<표 3> 설명 수업식 학급(n=40)의 오개념의 변화에 대한 비교

			오 개 념 F1 → F2	
			교정된 경우	교정이 안된 경우
대수적 환경	수 개념의 장애(n=10)		7(70%)	3(30%)
	변수 개념에의 장애(n=12)		9(75%)	3(25%)
	특정 관점에의 집착	(1) n=15	8(53%)	7(47%)
		(2) n=28	15(54%)	13(46%)
		(3) n=30	16(53%)	14(47%)
그래프적 환경	그래프 해석과 판단에서의 장애	(1) n=24	12(50%)	12(50%)
		(2) n=4	3(75%)	1(25%)
	변수에 대한 장애 (n=6)		4(60%)	2(40%)

<표 4> 협동적 상호 작용 수업식 학급(n=30)의 오개념의 변화에 대한 비교

			오 개 념 F1 → F2	
			교정된 경우	교정이 안된 경우
대수적 환경	수 개념의 장애(n=8)		5(63%)	3(37%)
	변수 개념에의 장애(n=10)		7(70%)	3(30%)
	특정 관점에의 집착	(1) n=9	5(56%)	4(44%)
		(2) n=20	12(60%)	8(40%)
		(3) n=21	10(48%)	11(52%)
그래프적 환경	그래프 해석과 판단에서의 장애	(1) n=21	7(33%)	14(67%)
		(2) n=14	9(64%)	5(36%)
	변수에 대한 장애 (n=10)		7(70%)	3(30%)

대수적 환경에서 각 오개념에 대한 처치 후 효과의 차이를 비교·분석하고자 한다. 수 개념에 의한 장애의 경우, 설명식 수업 학급과 동료간의 협동식 수업학급사이의 교정율은 각각 70%와 63%로 비슷하였고, 변수 개념에 의한 장애도 두 학급의 교정율이 각각 75%, 70%

로 비슷하였다. 그러나, 특정 관점에의 집착 오개념은 모든 처치 후에도 교정율이 다른 항목에 비해 전반적으로 낮았다. 상세히 살펴보면, 세부 항목 (1)인 소수 또는 분수보다는 정수로 인식하려는 특정 관점에의 집착하는 경우를 제외하고는 그 교정율에서 차이가 있었다. 세부 항목 (2)인 함수의 관계식에 대한 문제를 연산 기술 등을 강조한 방정식으로만 풀려고 하는 경우에는 설명식 학급의 교정율 54%보다 동료간의 상호 작용을 한 학급의 교정율이 60%로 더 높았다. 그러나, (3)모든 일차함수의 그래프 모양을 기울기가 1인 증가 함수 y=x의 모양으로 그려서 정의역의 구간만 다를 뿐 그래프의 모양을 모두 같게 그리는 오류의 경우, 교정 결과는 설명식 교수 학습을 통한 처치가 교정율 53%로, 동료간의 협동식 수업 학급의 교정율 48%에 비해 더 효과적이었다.

그래프 변수에 대한 장애와 그래프 해석과 판단에서의 장애 중 (2)답이 2개인 경우는 두 학급의 교정율이 비슷하였다. 그러나, 그래프 해석과 판단에서의 장애 중 (1)그래프를 전반적인 특징으로 인식하는 경우는 두 학급 모두에서 교정율은 낮았지만, 설명식 수업 학급이 교정율이 50%로, 교정율 37%인 동료간의 협동식 수업 학급보다는 효과적인 것으로 나타났다.

3. 학생들의 개념적 변환

연구 문제 3인, 학생들이 일차 함수 개념에 대한 오개념을 동료와의 상호작용을 강조한 협동 학습 시 어떻게 올바른 개념으로 구성해 가는 지를 탐구하고자, 사후 검사(F2)에서 개별 활동이 끝난 뒤 동료간의 협동 학습 활동을 중심으로 살펴보았다. 그 결과, 대수적 환경에서는 특정 관점에의 집착 오개념의 범주 중 함수의 관계식에 대한 문제를 연산 기술 등을 강조한 방정식으로 풀려고 하는 경우와 그래프적 환경에서는 그래프 해석과 판단의 장애 중 답을 2개로 고르는 경우에, 학생들은 조별 활동을 통하여 오개념을 잘 수정하였다. 그 자세한 변환 과정을 동료간의 협동 학습 활동의 녹취록을 중심으로 분석하였다. 녹취록의 ...은 말하는 도중 약간의 멈춤을 나타내고 ( )안의 내용은 학생들의 제스처나 행동을 나타낸다.

F2의 대수적 환경에서 문제 3의 해결 과정에 대한 녹취록은 학생들의 개념적 변환이 동료간의 상호 작용을 통한 협동학습에서 일어나고 있음을 명확히 보여주는 예이다.

3. 은재는 매일 아침 자전거로 1분에 3㎞씩 달려서 등교한다. 같은 속도로 x분 동안에 달린 거리를 y㎞라 할 때, 10분 후에 학교에 도착할 수 있다. 집에서 출발하여 학교에 도착할 때까지의 관계식을 구하고 이 때의 그래프를 그려라.

[관계식 y=3x를 구하는 과정은 아래의 녹취록에서 생략하였다.]

1. E: 이게[x축을 가리키면서] 속력이야?
2. S: 속력은 계속 3이잖아.
3. E: 3x 아냐?
4. J: 어, 속력이 3이고, 시간이 x야.. 그래서 4x를 y로 해..
5. E: 잠깐, 가로축이 시간이고.. 시간이 x고...시간×속력은 거리잖아... 시간이 흐르면 거리는...
6. S: 이쪽[x축을 가리키면서]이 시간이니까..시간은 1, 2, 3, 4,⋯
7. E: 그러면, 여기[x축을 가리키면서]가 시간이고, 여긴[y축을 가리키면서] 거리면 속력은 뭐야?
8. G: 그래프에서 기울기가 속력이야.. 좀 있다가 알려 줄게.. 그래프부터 그리려고.. 그럼 x하고 y가 정비례하는 거잖아..[점을 원점부터 하나씩 찍으면서 그린다.]
9. S: 점을 찍으라고? 그냥 이렇게 선으로 이으면 안 돼? x가 1일 때 y가 3이니까..
10. E: 잠깐.. 3Km씩 달리니까, 거리가 3Km씩 증

가하고 여기 1, 3을 쓰고 그러면, 2, 6을 쓰고.. 속력이 3의 배수라는 거네. 맞아?

11. J: 아냐. 3의 배수로 증가하는데 그건 중요하지 않아. 거리가 3의 배수로 증가하지. 속력은 기울기라고 배웠잖아. x가 증가량 분에 y의 증가량이 기울기라고..[(y의 증가량/x의 증가량)을 쓰면서 E에게 묻는다] x가 뭐지?
12. E: 시간..
13. J: y는?
14. E: 거리..
15. J: 그러니까 (거리의 변화량/시간의 변화량)이 속력이 되고 그게 기울기야.. 이것 봐. [그래프의 두 점 사이의 직선과 x축 사이의 각을 가리키면서] 각이 다 똑같잖아...
16. E: 속력이 같으면 직선이 일자로 생겨야지..[종이 위에 x축과 평행한 y=상수 형태의 함수를 그린다.]
17. J: 그러면 y축이 거리인데, 거리가 같아지잖아..정말 그래?
18. E: 아니네..거리는 늘어나는데..그러면 기울기가 속력이구나.

[J와 E의 대화동안 S와 G는 그래프를 완성했다. 다 같이 S의 그래프를 본다. S의 그래프는 원점이 찍혀 있지 않다. x축의 한 칸이 1씩 되어서 10까지 그렸다. 단, 모든 점을 그리지 않고 x가 1,2, 3,···,10일 때로 그렸고, y축도 x축과 같은 간격이지만 숫자는 3, 6, 9,···등으로 되어 있다. 즉, 그래프의 기울기가 1인, 즉 x축과 이루는 각이 45˚ 인 증가함수 y=x 모양의 전형적인 연속함수로 그렸다.]

19. G: 나랑 달라..

[G가 그래프를 보여준다. 기울기가 1 즉 x축과 이루는 각이 45˚ 인 y=x 형태인 S의 그래프와 모양은 같으나, 좌표 (10, 20), (20, 60)의 두 점만 찍은 후, 원점부터 이 두 점을 지나가는 연장선으로 그렸다. J, E가 두 그래프를 계속 본다.]

20. J: 0부터 시작해야 되는 것 아닌가?
21. S: 왜 0부터 그려?
22. J: 출발하는 순간은 시간이 0부터잖아.. 1분부터 찍으면 출발할 때부터 1분 사이는 표시가 안되잖아. 근데, [G의 그래프의 x축의 단위가 10, 20인 것을 가리키면서] G것도 이상해. y값이 30을 넘었어. [G에게] 넌 왜 단위를 10으로 했어?
23. G: 보기 좋으라고..[모두 웃음] 어, 잠깐..알았다. x가 0에서 10까지다. 10분 후에 학교에 도착했으니까.. 나 다시 그릴게..
24. S: 난 0일 때만 그리면 되겠다..[원점을 그려서 점 (1, 3)과 이은 후 모두에게 보여 준다.]
25. J: 그런데, 이렇게 그리면 더 간단하잖아..[원점과 (10, 30)의 두 점만 이어서, 역시 y=x의 기울기가 45˚ 인 형태로 그렸다.]

녹취록의 line 1부터 line 18에서는, 학생 E가 기울기의 개념을 3x라는 거리의 개념과 그래프 상에서 혼동하자, J가 E에게 적절한 발문과 설명을 하여 E가 바른 개념을 습득하는 것을 보여준다. 이 오개념의 변환 과정에서, E는 변수의 개념을 학습하였을 뿐만 아니라 그래프에서 속력의 의미가 기울기라는 것도 학습하였다. 또한, 학생들은 특정 관점에의 집착 오개념때문에 그래프를 정의역은 다르지만 모두 y=x의 기울기가 1인 증가 함수의 모양으로 그렸다. 그러나, 문제를 제대로 해석한 학생 J가 line 20과 21에서 x의 정의역이 0부터 10까지라는 것을 지적하자, '아하 효과'가 나타나 G와 S는 스스로 그래프를 옳게 교정하였다. 이것은 학생 스스로 지식을 바르게 구성할 수 있다는 것을 보여주는 예라 할 수 있다.

F2의 그래프적 환경에서 학생들의 개념적 변환을 보여주는 예는 끓인 물의 온도 변화에 대한 그래프를 고르는 문제를 푸는 활동의 녹취록이다. 학생들은 먼저, 전자 렌지 속에 팝콘용 옥수수를 넣었을 때, 냄비 속의 부풀지 않은 팝콘의 양과 시간사이의 관계를 표현하는 가장 적합한 그래프를 고르는 문제를 풀었다. 그런 다음, 커피포트에 물을 끓인 후 한참 뒤

전원을 껐을 때, 시간과 물의 온도와의 관계에 대한 그래프를 고르는 문제를 풀었다. 녹취록에 등장하는 그래프는 <그림2>의 그래프와 동일하다.

1. S: 온도를 y라고 했지? 그러면 물이 끓어야 되니까 y가 점점 증가하겠다..
2. G: 아니야..물을 끓인 후야, 문제에서는. 그러니까 최대에서 시작해야돼. 물의 끓는 점은 100도에서 어느 정도 일정하잖아..
3. J: G의 말이 맞아. 문제는 물을 끓인 후 전원을 뽑으면 어떻게 되느냐니까..처음에 최대에서 시작해서 일정 시간 100도를 유지하다가 감소해야돼.
4. G: 끓인 후니까 끓이기 전은 상관없어.
5. E: 처음에 100도에서 시작하는 건 맞는 것 같은데.. 전원을 빼면 온도는 아주 작지만 조금씩 내려가지 어떻게 유지돼? 끓는 상태에서만 끓는점이 유지되지 않나?
6. J: 그런 그래프는 없잖아..
7. E: 4번 있잖아..
8. J: 아니야. 4번은 처음부터 급격히 온도가 떨어진 상태야.. 그러니까 아니야. 봐봐. 이렇게 [그래프를 같은 간격으로 쪼개면서 y 축에 대응하는 점들을 찾아 감소량을 보여준다.] 구간으로 잡으면 갑자기 식었다는 얘기인데 그러냐?
9. E: 그래. 하지만 감소하는 건 4번 그래프야.
10. S: 온도가 떨어지는 것에 초점을 두면 4번이야. 전원을 빼면 100도를 계속 유지한다고 보기 어렵잖아.. 이 문제는 팝콘 문제에서 일정한 온도로 올라야 팝콘이 만들어졌던 거랑 비슷한 것 같은데...
11. G: 그러니까 8번이 맞아. 8번 그래프를 보면 일정 온도를 유지하는 시간이 무척 짧다고 볼 수도 있어..어쨌든 시간이 조금 흐른 뒤에 온도가 떨어져..
12. J: 물이 끓으면 온도가 지속되다가 내려가는 것 맞아.. E야, 문제 다시 읽어 봐..
13. E: 그러면, 팝콘 문제랑 같은 거야?
14. J: 갑자기 식진 않잖아. 게다가 한참 후에 전원을 뽑았다고 문제에 되어 있으니까, 물이 금방 식진 않잖아.
15. E: 음..[잠깐 생각한 후] 그렇다고 보는 게 제일 낫겠다...답을 8번으로 하지 뭐.

팝콘 문제와 끓인 물 문제 모두에서, 학생들은 일정 시간이 지나야 팝콘이 부풀기 시작하기 때문에 처음 일정 시간동안은 부풀지 않은 팝콘의 양에 변화가 없다가 팝콘이 부풀기 시작하면 부풀지 않은 양이 감소하며, 물을 끓인 후 한참 뒤에 전원을 껐기 때문에 일정 시간이 지나야 물의 온도가 떨어진다고 토론하면서 <그림2>의 8번 그래프를 답으로 선택하였다. 이 경우 학생들은 그래프를 고르면서 두 문제 상황의 구조가 같다는 것을 파악하였다. 또한, 온도가 계속 감소하기 때문에 4번 그래프가 옳다고 주장한 E와 처음에는 물을 끓이기 때문에 온도가 증가하는 그래프를 선택하려고 했던 S의 잘못된 그래프 해석은 동료와의 상호 작용을 통해 문제 상황에 옳은 그래프를 스스로 구성한 것으로 분석될 수 있다. E와 J의 개념적 변환 과정이 명료하지는 않지만, 이 두 학생들은 팝콘 문제와 끓인 물의 온도 변화 문제가 같은 구조의 문제로 그래프 형태가 같다는 것을 파악하였다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 중학교 2학년 학생들의 일차 함수에 대한 오개념을 탐구하여 범주화하고, 일차 함수의 개념 학습과정에서 학생들의 오개념을 교정하고자 설명식 교수 · 학습 방법과 동료간의 상호 작용을 통한 협동 학습 방법을 각각 실시했을 때의 효과를 비교 · 분석하였다. 그리고, 학생들이 동료간의 협동적 상호 작용을 하면서 개별적으로 구성한 개개인의 오개념

이 어떻게 변화, 발전하는 지를 탐색하였다.

연구 결과를 요약하면 다음과 같다. 연구 문제 1에서 주어진 문제에 대한 사전 검사를 분석하여, 학생들의 일차 함수에 대한 오개념을 <표1>과 <표2>와 같이 유형별로 범주화하였다. 대수적 환경에서 학생들의 오개념은 크게 3가지, 수 개념에 의한 장애, 변수 개념 부족에 의한 장애, 특정관점에의 집착으로 분류되며, 그래프적 환경에서 학생들의 오개념은 그래프의 해석과 판단에서의 장애, 변수 개념에 대한 장애로 나눌 수 있었다. 일차 함수에 대한 수 개념의 장애는 함수가 산술적 조작이라는 개념 이미지가 강하여 오개념을 가진다는 Vinner와 Tall(1981)의 주장을 뒷받침한다. 즉, 함수가 식일 뿐이라면 함수값을 계산하는 활동은 문자에 수를 대입하는 연산으로 제한되어 버리는 것이다. 선행 연구에서 살펴본 바와 같이, 변수 개념에 대한 장애를 가진 학생들은 대수식과 그래프에 나타나는 독립변수와 종속변수 사이의 관계를 이해하지 못하였고, 특정 관점에의 집착 오개념은 대수적 표현에 대한 집착으로 관계식을 구할 뿐만 아니라 관계식의 각 요소를 그래프 상에서 번역할 때 발생하였다.

연구 문제 2에 대한 연구 결과를 <표3>과 <표4>로 비교하면, 설명식 수업과 동료간의 상호 작용을 강조한 수업 후 학생들의 오개념 교정비율이 범주에 따라 달랐다. 특정 관점에의 집착의 경우, 학생들의 오개념은 수정되기 어려웠고, 특히 방정식 형태로 함수를 풀려는 경향이 강한 학생들이 많았다. 이 경우, 학생들 전체를 대상으로 설명식 수업 처치를 행한 학급보다 소그룹형태로 동료간의 협동 수업의 처치를 행한 학급의 오개념 교정율이 더 높았다. 따라서, 특정 관점에의 집착으로 발생한 오개념의 교정은 학생들 전체에 대한 설명식 수업보다 학생 개개인의 오개념을 상세히 탐색하고 교정할 수 있는 동료간의 협동 학습 방식이 더 효과적이라고 할 수 있다. 그 외에, 함수의 그래프를 그리는 문제에서 전반적으로 그래프를 $y=x$형태로 그리려는 특정 경향이 강하였다. 그래프적 환경 검사지에서 상황을 해석하여 알맞은 그래프를 선택할 때, 학생들은 그래프의 특징을 정교하게 살피기보다는 전반적인 특징으로 인식하는 경향이 나타났다. 이와 같이, 그래프를 전반적인 특징으로 해석하고 판단하는 오개념도 교정이 잘 안되었으나, 대수적 환경에서 함수를 방정식으로 인식하는 특정 관점에의 집착 오개념과는 달리, 설명식 수업 처치 집단이 동료간의 협동 학습식 수업 처치 집단보다 교정율이 높았다. 이는 대부분의 학생들이 오개념을 갖고 있을 때는 설명식 수업이 더 효과적임을 의미한다.

교수학적 처방을 통한 교정율의 관점에서, 본 연구의 결과로 얻어진 오개념을 크게 실행상의 오류(executive error)와 구조적인 오류(structural errors)로 분류할 수 있을 것 같다. 실행상의 오류는 Orton(1980)에 의해서 구분된 개념으로, 교수 후 오개념의 교정율이 높아서 학생들에게 오개념을 지적했을 때, 스스로 쉽게 교정할 수 있는 것을 말한다(Tall, 1991, 재인용). 대수적 환경에서 수 개념의 장애와 변수 개념의 장애, 그래프 환경에서 변수 개념의 장애를 실행상의 오류에 포함시킬 수 있다. 구조적 오류를 범하는 학생들은 오류를 발견하고 교정하는 일이 교사의 도움이 없이는 불가능하다. Orton(1980)은 이 경우, 오개념은 일시적이지 않고, 각 오개념들은 문제 맥락에 따라 특정 관점에 집착함으로써 올바른 개념 형성과는 거리가 있다고 하였다(Tall, 1991, 재인용). 그래프를 전반적인 특징으로 해석하는 그래프 해석과 판단에의 장애가 구조적 오류에 속한다.

연구 문제 3에 대하여, 일차 함수에 대한 학

생들의 기존의 인지 구조에 동화되어 있는 오개념이 올바른 개념으로 변환하는 과정을 살필 수 있었다. 특히, 대수적 환경의 사후검사 중 문제 3번에 대한 문제해결 과정에서 한 학생은 기울기와 거리 개념의 혼동을 다른 학생과의 상호작용을 통하여 수정하였다. 또한 이 과정에서 변수 개념도 함께 학습하는 것을 볼 때, 수학적 오개념의 교정뿐만 아니라, 교수학적 측면에서 예상하지 못했던 효과를 얻을 수 있을 것으로 생각된다.

이상의 연구 결과를 종합하면, 일차 함수에 대한 정규 과정의 학습 후에도 학생들은 여전히 오개념을 가지고 본 연구에 임할 뿐 아니라, 교정 학습 후에도 기존의 인지 구조에 강하게 각인된 오개념은 계속해서 남아 있었다. 또한, 각 오개념의 유형에 따라 설명식 수업과 동료간의 협동식 수업을 통한 교정 효과가 서로 다르다는 것을 알 수 있었다. 그리고, 동료간의 협동 학습을 할 때, 학생들의 오개념 중 일부는 단순히 잘못된 것이 아니라, 이를 발판삼아 올바른 개념으로 변화되는 것을 발견하였다. 뿐만 아니라, 그래프적 환경에서 학생들은 주어진 문제 상황은 다르지만 구조가 같다는 것을 파악할 수 있었다. 그 상황을 묘사하는 가장 적합한 그래프를 선택하기 위해 미묘한 해석 차이를 토론하는 과정에서, 학생들은 수학적 탐구의 기회를 가질 수 있었다.

오개념에 대한 후속 연구에 대한 제언으로 끝맺고자 한다. 첫째, 수학적 오개념이 개념의 변환 과정에서 도약대 역할을 할 수 있도록, 적합한 교재 개발과 꾸준한 관찰을 통한 연구가 요구된다. 둘째, 수학적 오개념을 처치하기 위해 다양한 교수학적 방안을 모색해야 할 것이다. 셋째, 함수 개념에 대한 학생들의 상호작용을 강조한 학습을 통하여 사회 수학적 규범이 형성되었을 때, 새롭게 나타날 수 있는 오개념을 밝히는 후속 연구가 필요하다.

참고문헌

강행고 외 (2001). **중학교 수학 8-가**. 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

박교식 (1992). **함수 개념 지도의 교수현상학적 접근**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

오정현 (1996). **중학교 함수 영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구**. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

우정호 (1998). **학교 수학의 교육적 기초**. 서울대학교 출판부.

이종희 (1999). 함수 개념의 역사적 발달과 인식론적 장애에 대한 연구. **수학교육학연구**, **4**(2), 133-150.

정영옥 (1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Billing, E. M. & Klanderman, D. (2000). Graphical representations of speed: Obstacles perspective K-8 teacher experience. *School Science and Mathematics, 100*(8), 440-450.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(2), 77-87.

Confrey, J.(1987). 'Misconceptions' across subject matters: Science, mathematics and programming. Proceedings of the Second International Seminar Misconceptions and

Educational Strategies in Science and Mathematics, 1, 81-106.

Cornu, B.(1991). Limit. In D. Tall(Ed.). Advanced mathematical thinking(pp.153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Driver, R. & Easley, J. (1978). Pupils and paradigms: A review of Literature related to concept development in adolescent science students. *Studies in Science Education, 5.* 61-84.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall, D.(Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1983). *Didatical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gilbert, J., Osborne, J., & Fersham, P. (1982). Children's Science and its consequences for teaching. *Science Education, 66*(4), 623-633.

Herscovics, N.(1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran(Eds.). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4. (pp. 60-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60,* 1-64.

Mevarech, Z. R. & Karamarsky, B. (1997). From verbal descriptions to graphic representations: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics, 32,* 229-263.

Moschkovich, J. N. (1992). *Making sense of linear equations and graphs: An analysis of students' conceptions and language use.* Unpublished doctorial dissertation, University of California, Berkeley.

_________(1999). Students' use of the x-intercept: An instance of a transitional conception. *Educational Studies in Mathematics, 37,* 169-197.

Rich, B. S. (1990). *The effect of the use of graphing calculators on the learning of function concepts in precalculus mathematics.* Unpublished doctorial dissertation, University of Iowa.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Journal for Research in Mathematics Education, 18,* 26-50.

Tall, D. (1989). Different cognitive obstacles in a technological paradigm. In S. Wagner & C. Kieran(Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4.(pp. 87-92) National Reston, VA: Council of Teacher of Mathematics.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 31-54.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Image and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. International Journal of Mathematics *Education in Science and Technology, 14* (3), 293-305.

Analysis of the Error-Remedial Effect and Change of the Students' Misconception on the Learning of Linear Function

Lee, Chong Hee (Ewha Womans University)
Kim, Bu Mi (Guwol Girls' Middle School)

Investigation of the students' mathematical misconceptions is very important for improvement in the school mathematics teaching and basis of curriculum. In this study, we categorize second-grade middle school students' misconceptions on the learning of linear function and make a comparative study of the error-remedial effect of students' collaborative learning vs explanatory teaching. We also investigate how to change and advance students' self-diagnosis and treatment of the misconceptions through the collaborative learning about linear function.

The result of the study shows that there are three main kinds of students' misconceptions in algebraic setting like this: (1) linear function misconception in relation with number concept, (2) misconception of the variables, (3) tenacity of specific perspective. Types of misconception in graphical setting are classified into misconception of graph interpretation and prediction and that of variables as the objects of function. Two different remedies have a distinctive effect on treatment of the students' misconception under the each category. We also find that a misconception can develop into a correct conception as a result of interaction with other students.

* **key words:** 일차 함수, 수학적 오개념, 인지적 장애, 개념적 변환, 그래프 해석