대한수학교육학회지 <학교수학> 제 5 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.5, No.1, 59-76. Mar 2003

기호학 관점에서의 문자와 식 분석

김 선 희* · 이 종 희**

학교수학에서 학생들이 수학을 학습하고 문제해결을 하는 데에는 기호가 중요한 역할을 한다. 본 연구는 기호학의 분야인 구문론, 의미론, 화용론의 관점에서 수학 7-가 문자와 식 영역의 교과서 내용을 분석하고, 교수학적으로 대수 기호가 도입되고 전개하는 과정을 살펴보았다. 또한 기호학 관점에서 교과서의 대수 기호를 분류하고 문제 구성 분포에 대해서도 조사하였다. 그 결과 교과서의 대수 개념 설명과 문제들은 주로 구문론과 의미론의 관점이 많았으며, 화용론적 관점의 언급은 거의 없었다. 마지막으로, 대수 기호에 의한 학습을 통해 학생들의 문제해결을 예측하기 위하여 회귀 분석을 실시한 결과, 구문론과 화용론의 점수가 대수적 문제해결 점수의 예측 변수였다.

Ⅰ. 서론

대수는 수사적 대수, 생략적 대수, 상징적 대수의 시기를 거쳐 발전하였다. 이것은 계산법과 방정식의 표현 방법에 따른 구분으로, 대수는 처음에 미지수나 계산의 전체적인 과정이 일상언어로 기술되다가, 자주 반복되어 사용되는 개념이나 계산이 축약된 용어나 머리글자로 나타내어지고, 결국 모든 식이나 연산이 일상언어로부터 독립된 상징으로 표현되는 시기로 발전된 것이다(Stalling, 2000). 이러한 역사적 변천 과정을 본다면, 대수학이라는 학문은 대수를 표현하는 수단이 일상언어에서 상징의 기호로 발전하면서 대수적 구조에도 점진적인 형식화가 이루어져 현대적 대수가 탄생하게 되었다고 볼 수 있다.

수학 교육과정에서도 대수 영역은 역사적 발전과 마찬가지로 일상언어 중심의 기호를 사용한 산술에서 상징[1]을 사용하는 대수로 점차 형식화되는 것으로 기술되고 있다. 그러나, 간략하고 압축된 의미를 갖는 상징을 이해하고 그것을 사용하여 수학을 학습하는 것은 학생들에게 어려움을 준다. 또한 산술에서 대수로의 전이 동안 수학적 상징의 의미 변화는 학생들이 대수 언어의 습득에서 장애를 겪게 한다 (Rojano, 2002). 일상언어가 아닌 상징을 사용하여 수학을 학습하는 것은 외국어의 학습처럼 학생들에게 인지적 부담이 될 수 있는 것이다.

그러나 상징의 사용 없이 수학을 논하는 것

* 광장중학교(ilovemath@empal.com)
** 이화여자대학교(jonghee@ewha.ac.kr)

1) 기호의 질료적 형태가 그것이 보증하는 어떤 것과 유사성을 보여주는 기호를 Hegel과 Saussure는 상징, Peirce는 도상이라 하였으며, 반대로 임의적 기호를 Hegel과 Saussure는 기호, Peircms 상징이라 불렀다 (Trabant, 2001). Peirce의 용어를 따라 본 연구에서 상징은 규약에 의해 정해진 수학에서만 사용되는 기호로 한정한다.

은 불가능하다. 학생들은 중등 수학을 접하면서 문자를 사용하여 임의의 수와 미지수를 나타내고, 수학 문제를 일반적이고 형식적으로 해결하고, 연역적 추론에 의해 원리와 방법의 타당성을 깨달아야 한다. 이것은 학생들이 일상언어로 일련의 산술 조작을 차례로 수행하면서 답을 얻는 것에만 초점이 맞추어진 산술적 사고에서 벗어나 대수적 사고를 할 것을 요구한다. 사고와 언어가 밀접한 관련을 지니고 상호 발전을 유도한다고 할 때(Vygotsky, 1985), 대수적 사고를 위해서도 대수에서의 상징에 관심을 가져야 하는 것은 당연한 일이다.

Freudenthal(1978)의 주장을 빌어 대수 학습에는 일상언어보다 더 상승된 언어 수준인 상징언어의 학습이 포함되며, 타학문보다 표현의 정교함과 엄밀성이 중요하게 여겨진다. 본 연구는 일상언어와 상징을 포함한 대수의 기호를 기호학 관점에서 분석하고자 한다. 이를 위해 중학교 수학 7-가 교과서 문자와 식 영역의 내용과 학생들의 대수 학습 정도를 기호학의 관점에서 고찰한다.

먼저, 기호학의 관점에서 교과서의 대수 기호를 조사하고 대수 기호의 도입과 전개 과정을 알아본다. 그리고 이러한 관점에서 교과서의 기호를 분류하고 문제 구성의 분포도 알아볼 것이다.

현재 우리나라 7차 교육과정은 학생들이 수학의 기초 개념과 원리, 법칙을 학습하여 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기를 수 있게 하는 것을 목표로 하고 있다(서울시교육청, 2000). 대수에서 교육과정의 목표인 문제해결을 성공적으로 하기 위해, 본 연구는 중학교 1학년 학생들의 대수 학습 정도를 기호학의 관점에 근거하여 문제로 평가하고 이것으로 대수 문제해결의 성공을 예측해 볼 것이다.

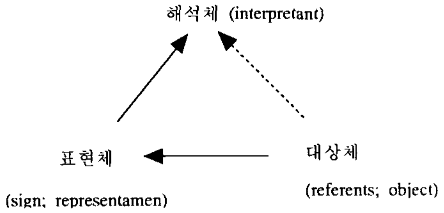
먼저, 기호학의 관점에서 대수를 고찰하기로 한다.

Ⅱ. 대수와 기호

수학이 언어적 체계를 갖고 인간의 사상과 생각을 표현하고 의사소통하게 한다면 수학은 언어라 할 수 있다(Mellin-Olsen, 1987; Zepp, 1989). 언어는 임의성을 가장 큰 특징으로 하는 기호이며, 수학의 하위 분야인 대수 또한 임의성이 부여된 형식적인 언어라 할 수 있다. 일반적으로 기호는 무엇인가를 대신하는 것이며 수학적 의미를 가진 일상언어와 상징은 모두 기호이다. 본 연구에서 일상언어는 수학 용어를 포함한 한글 표기이며 상징은 객관적 의미가 수학자들 사이에서 정해진, 수학에서만 사용되는 기호를 말한다. 상징과 기호가 혼동되어 수학의 상징이 기호로 불려지기도 하지만, 본 연구는 일상언어를 포함한 대수의 기호를 다루기 위해 상징을 기호에 포함시키기로 한다. 본 장에서는 대수에서 사용되는 용어와 상징의 기호들을 기호학의 관점에서 고찰한다.

1. 기호학의 분야

Peirce에 의하면 기호는 <그림 1>과 같이 대상체, 표현체, 해석체의 삼원적인 요소를 가진 것으로 표현체와 대상체의 지시 관계가 어떤 해석체에 의해 해석될 때 존재한다(Trabant, 2001, 재인용). Peirce는 기호의 특성을 강조하면서 표현체, 대상체, 해석체의 공조를 포괄한 기호 작용인 세미오시스를 언급하고 기호는 해석자의 역동적인 해석이 이루어져야 하는 것으로 보았다.



<그림 1> Peirce의 기호 모델(Trabant, 2001)

Peirce가 기호의 구성요소를 세 가지로 구분한데 반하여 Morris는 기호의 기능과정을 인간 행위의 하나로 삼았다. 행동주의 심리학의 성과를 기호학에 도입한 Morris(1946)는 기호를 정의함에 있어 Peirce의 기호 요소를 토대로 세 가지 분야가 구성될 수 있다고 제안한 바 있으며 기호학계에서는 이 방법이 널리 활용되고 있다(Eco, 2000, 재인용). 즉 표현체, 대상체, 해석체의 상호 관계에 따라 세 가지 분야가 만들어질 수 있는데 구문론, 의미론, 화용론이 바로 그것이다. 이 세 가지 하위 분야를 포괄하는 일반과학이 바로 Morris가 구상한 기호학이며, 기호의 완전한 분석은 3가지 구성요소의 차원에서 관계가 모두 명확해질 때에만 가능하다(김치수 외, 1998). 대수에서 기호의 학습은 기호의 조작과 의미, 맥락에 따른 해석과 기호 사용을 학습하는 것이며, 따라서 대수 기호도 이 세 분야에서 논의하는 것이 가치가 있다.

첫째, 구문론은 대상체와 해석체의 관계는 무시한 채 기호들 서로의 관계에 대한 연구, 그리고 가능한 기호조합의 연구로 규정된다(Trabant, 2001). 여기서 기호는 기호가 전달하는 기의(記意, signified)와 무관하게, 그리고 경우에 따라서는 어떠한 기의도 전달하지 않는 기호까지를 포함하여 기표(記表, signifier) 부분의 내적 구조에 대한 연구를 가리키기도 한다(Eco, 2000). 구문론은 가능한 기표조합들과 관련한 연구분야이며, 기표의 조합에 토대가 되는 규칙들이 중요하다. 기호학에서 구문론은 음성학, 음운론, 음소론이라는 명칭 하에서 연구가 이루어졌으며, 대수에서 구문론은 기호가 구성하고 있는 체계, 기호의 사용 틀(형판, template), 기호의 연산, 조작 규칙과 관련될 것이다.

Freudenthal(1983)은, 전통적으로 학교 수학이 학생들이 형식적인 대수 언어를 잘 다룰 수 있도록 훈련시키는 것에만 치중해 왔으며 의미 있는 문제를 해결하기 위해 대수 언어가 어떻게 사용될 수 있는지를 이해시키는 것에는 소홀했음을 지적하였다. 학생들은 이해의 부족을 메우기 위하여 규칙과 절차를 암기하게 되고 이런 학습을 통해 결국에는, 수학은 규칙을 바탕으로 하는 것이고 수학을 학습하는 것은 규칙을 암기하는 것이며 이러한 활동이 수학의 본질을 나타낸다고 믿게 된다(우정호, 1998). 대수 교육에서 항상 문제가 되는 것은 대수적 원리의 이해와 기능 숙달의 대립이라 할 수 있으며, 기능의 숙달에 치중한 관점은 기호의 의미를 배제하고 원리에 대한 고찰이 부족한 구문론을 강조한 결과라고 할 수 있다.

둘째, 의미론은 기호[2]와 기호가 지시하거나 지시할 수 있는 대상체와의 관계를 다루는 분야이다(Morris, 1938, Trabant, 2001, 재인용). 기호는 그것이 의미하는 대상과의 관계를 통해 정의될 수 있으며, 대수에서 의미론은 기호와 수학용어의 정의, 개념적 의미와 관련되어 고찰된다.

그러나 기호의 정의가 주어졌다고 해서 학생들이 그 기호의 의미를 풍부히 알고 있는 것

2) Peirce는 기호를 광의의 의미와 협의의 의미로 나누어, 광의의 의미에서 기호는 표현뿐 아니라 그 의미와 해석까지도 포함한 삼원적 관계로 이루어진 구조를, 협의의 의미에서는 표현만을 언급하는데 사용하였다(김성도, 1998). 여기서는 협의의 의미의 기호에 해당하며 Saussurre의 용어로 기표라고 볼 수 있다.

은 아니다. Dörfler(2000)는, 개념의 의미는 정확한 수학적 정의가 아니라 오히려 담화 활동에 참여할 때 발달한다고 하였다. 기호가 여러 맥락에서 사용되는 것을 보고 다른 기호들 사이의 관계를 통해 해석이 이루어질 때 기호의 의미를 논할 수 있는 것이다. Sierpinska(1994)도 의미가 체계로서의 언어와 사회적 실행으로서의 언어에 존재한다고 하였으며, 대수 기호의 의미를 충분히 파악하기 위해서는 실행으로서의 기호를 맥락 내에서 살펴보는 것이 필요하다. 이는 화용론 분야의 중요성을 의미한다고 할 수 있다.

셋째, 화용론은 기호 사용자인 해석자의 고려, 다시 말하면 어떤 것을 그 어떤 것이 보증하는 의식의 고려에 의해 뒷받침된 학문 분야라 할 수 있다. Morris는 화용론을 기호와 기호 해석자와의 관계에 대한 학문이며 행동에서 기호의 기원, 사용 그리고 작용을 다루는 기호학의 분과로 언급하였다(Trabant, 2001). 대수에서 화용론은 동일한 기호를 다른 맥락에서 사용하는 경우 고려될 수 있다. 예를 들어, 다항식의 x와 방정식에서의 x는 동일한 기호이지만 임의의 수의 자리지기와 미지수로 그 의미가 다르게 해석되어야 하는 화용론 분야의 연구 대상이다. 문자가 사용되는 전후 관계와 이를 적용하는 상황에 따라 문자의 의미는 다르게 나타날 수 있으며, 학생들이 변수[3] 학습에서 경험하는 많은 어려움은 상황에 따른 문자의 역할 변화와 의미의 변화를 이해하지 못하는 데서 비롯된다고 할 수도 있다.

지금까지 기호로 이루어진 대수를 기호학의 세 분야에 의해 고찰하였다. 기호 해석자와 기호의 관계에 대한 적합한 토론은 기호들 간의 관계와 기호가 기호 사용자에게 환기시키는 사물들과의 관계에 대한 인식을 요구하기 때문에 화용론은 의미론과 구문론을 전제로 하며, 구문론과 의미론은 화용론을 전제로 한다(Morris, 1938, Trabant, 2001, 재인용). 본 연구에서는 대수의 문자와 식 영역의 기호를 구문론, 의미론, 화용론의 분야에서 고찰하여 교과서 분석의 틀로 삼는다.

2. 대수에서 기호의 역할

대수 학습의 목표에는 대수적 사고의 신장이 무엇보다 중요한 것인데, 대수적 사고를 가능하게 하는데 큰 역할을 하는 것이 대수의 기호이다.

일반적으로 대수적 사고를 정의하기는 어려운 일이지만(우정호, 1998), Bell(1996)은 주어진 자료에서 미지의 것으로 나아가는 단계적 방법이나 산술적 관계의 사용과 전반적 지각을 통한 복잡한 산술 문제해결, 여러 유형의 문제에 대해 체계적이고 일반적인 방법을 사용하는 것, (수나 기하의) 일반화를 찾아 증명하는 것, 수 체계의 일반적인 성질에 대한 인식과 사용 및 그 조작, 함수에 대한 인식과 이름 붙이고 사용하기 등에 대수적이란 라벨이 붙을 수 있다고 하였다. 그리고 무엇보다 이러한 것들을 수행하도록 돕는 조작 가능한 상징의 사용이 꼭 존재해야 대수적이라 할 수 있다고 하였다. 즉, 대수를 언급하기 위해서는 대수적 상징의 사용이 필수적인 것이다. 대수에서 상징이 중요하게 생각되는 이유는 여러 가지이다.

첫째, 일상언어의 진부한 복잡성으로부터 벗어나 있기 때문에 표현을 절약시켜 사고의 경

3) 변수는 임의의 기호인데 그것의 의미가 아직 결정되어 있지 않은 기호로서 그 의미가 정해지면 그것이 변수의 값이 된다. 변수의 값은 상황에 따라서 참조물, 명제, 함수, 집합, 관계들로 이루어진 임의의 집합 안의 원소이다(Schoenfeld & Arcavi, 1988; 김남희, 1997, 재인용)..

제성을 도모한다. 둘째, 변형력에 의해 계산을 가능케 하여 연역적 추론의 엄밀성을 보장해준다. 셋째, 여러 조합을 구성하는데 용이하기 때문에 직관만으로 예견할 수 없었던 논리적 관계들을 발견할 수 있게 한다. 넷째, 일상 언어는 질적인 관계를 표현하기는 좋으나 양적인 관계에는 대수 상징이 더 적절하다. 다섯째, 상징은 말하고 있는 형식적인 것에 대한 의미를 기억하고 상황을 의미론적으로 통제하기 쉽게 해준다(Arzarello, 1998).

문자가 도입되고 식의 구조적인 면을 파악하게 되는 대수에서 수학 사회의 약속에 의한 상징을 사용하는 것은 위와 같은 장점을 갖고 있다. 하지만 중학교에서의 대수는 산술로부터의 전이 시기이기 때문에 고등학교 수학보다 일상언어가 함께 사용된 정의나 개념 설명이 많으며, 대수의 문장제는 일상언어로 구성되어 있다. 따라서 일상언어로 된 수학 용어에도 교육자들이 관심을 가질 필요가 있으며, 이는 대수 학습에서 상징 뿐 아니라 일상언어 또한 기호로서 고찰될 필요성이 있음을 의미한다. 본 연구에서 기호는 상징과 일상언어를 포함한 것을 말한다.

대수의 문제해결에서도 기호는 중요한 기능을 담당한다. Arzarello(1998)에 의하면 기호는 문제를 제안하고 해결하고 검토하는 과정에서 기능한다. 먼저, 문제를 제안할 때 기호는 학생들을 문제 상황으로 인도하는 의미론적 참조를 유지하는 도구이며, 마음 속으로 생각할 때 사용하는 내적 언어의 수준에서 유사한 문제와 해결 전략을 회상하게 하는 과정을 활성화시키는 도구가 된다. 둘째, 문제를 풀 때, 특히 내적 언어로 해결 전략을 구성하고 통제하는 도구이다. 문제해결자는 해결 전략을 지적 활동이 가능하게 하는 기호로 점진적인 번역을 하여 유지시키며, 기호를 통하여 문제의 외부에서 해결 과정을 검토하고, 다른 과정과 비교하고, 처음 문제 상황을 재설정할 수 있다. 셋째, 언어는 지식과 문제의 해를 의사소통하는 기능을 한다. 넷째, 수학 모델을 구성할 때 현상의 적절한 특징을 선택하는 도구로서, 질적인 관계를 맺게 하고 유사한 상황을 언급하고 알려진 모델을 새로운 상황에 적합하게 한다. 다섯째, 기호는 문제해결에 사용된 방법과 선택된 표현을 보여주면서 구성하는 지식을 반영한다. 즉, 특정한 지식의 투입과 산출을 돕는 기능을 한다.

대수를 구성하고 있는 일상언어와 상징을 포함한 기호는 대수적 사고와 문제해결에서 중요한 역할을 담당하고 있으며, 이를 토대로 다음 장에서는 중학교 1학년 수학에 해당하는 수학 7-가 교과서 문자와 식 영역에서 기호를 어떻게 도입하여 개념을 설명하고 있는지 알아보기로 한다. 그리고 기호학 분야에 따라 기호를 분류하고, 교과서의 문제 구성은 어떤 분야에 중점을 두고 있는지 분석할 것이다.

III. 수학 7-가 문자와 식 영역의 기호 분석

1. 문자와 식 영역에 대한 기호학적 분석

본 연구는 대수가 처음 도입되는 수학 7-가(강행고 등, 2001) 교과서의 대수 영역인 문자와 식을 대수 기호 분석의 대상으로 하였다. 문자와 식 영역에는 문자의 사용, 식의 값, 일차식의 계산, 등식, 일차방정식의 풀이와 활용과 관련된 내용이 포함된다.

기호가 정의되거나 사용될 때 대상체, 표현체, 해석체의 요소들은 함께 작용하지만 교과서의 대수 기호는 각각 강조되고 있는 요소가

있다. 강조되는 요소에 따라 구문론, 의미론, 화용론의 관점이 생겨나며 이 관점에서 대수적 개념을 설명하는 기호를 조사할 수 있다.

먼저, 구문론적으로 대수를 보았을 때는 대수 상징 사이의 조작 규칙이 가장 특징적이라고 할 수 있다. 교과서에서는 형식 불역의 원리가 유지될 수 있도록 수학 사회에서 약속한 기호 체계와 기호 사용의 규칙들이 등장하고 있으며, 의미론적 분야의 언급보다 '그렇게 사용하기로 한다'는 약속에 의해 규약을 설정하고 있다. 기호간의 조작 규칙과 관련된 내용들을 모아보면 <표 1>과 같다. 기호 사이에서 형식적인 추론에 의해 어떤 규칙이 상정되었다해도 그것을 하나의 규칙처럼 다루게 되는 내용은 구문론의 분류에 포함될 수 있다. 기호가 가리키는 대상과 해석에 대한 고찰 없이 기호간의 사용규칙만 고려하는 구문론은 존재하지 않을 터이지만, 이러한 구문론적 접근의 조사는 대수 교육에서 계산과 절차에 초점을 두고 형식적인 알고리즘을 지도해왔던 과거의 관행에 대해 시사해주는 바가 있을 것으로 여겨진다.

다음으로 의미론적으로 대수를 보았을 때, 새로 도입되는 용어나 상징에 대한 정의, 일상

<표 1> 기호학 관점에서 분석한 수학 7-가 문자와 식 영역의 기호

기호학 분야	구문론	의미론	화용론
세부 내용	· 기호의 조작 규칙	· 기호의 뜻 · 표현간의 번역 · 무언가를 대신하는 문자 · 기존 규칙에 근거한 새로운 기호 조작의 의미	· 동일 기호의 다른 사용
수학 7-가 문자와 식 영역에 해당하는 내용	· 곱셈기호 생략의 약속 · 1이나 -1과 문자의 곱에서는 1을 생략한다 · 0.1×a는 0.a로 쓰지 않고 0.1a로 쓴다 · 괄호가 있는 식과 수, 또는 괄호가 있는 식과 문자의 곱에서는 곱셈 기호 ×를 생략하고 수는 괄호 앞에 쓴다 · 나눗셈 기호 ÷를 생략하여 분수의 꼴로 나타낸다 · 식의 값 계산 · 상수항의 차수는 0으로 정한다 · 단항식과 수의 곱셈에서는 수끼리 곱하여 문자 앞에 쓴다 · 다항식에서 동류항이 있으면 동류항끼리 모아서 더하거나 뺄 수 있다 · 동류항끼리의 합 또는 차를 구할 때에는 분배법칙을 이용하여 각 항의 계수의 합 또는 차에 문자를 곱해 주면 된다 · 등식의 성질 · 이항하면 부호가 바뀐다 · 일차방정식을 풀 때는 등식의 성질을 이용하여 ax=b의 꼴로 고쳐서 푼다 · 괄호가 있는 방정식을 풀 때는 먼저 괄호를 풀고 해를 구한다 · 계수가 소수인 방정식을 풀 때에는 10, 100, 1000, ... 중에서 알맞은 수를 양변에 곱하여 계수를 정수로 고쳐서 풀면 편리하다 · 일차방정식의 활용 문제를 푸는 순서 · (거리)=(속력)×(시간) · 설탕물의 농도=(설탕의 양)×100/(설탕물의 양) · 설탕의 양=(설탕물의 농도)×(설탕물의 양)/100	· 달린 시간 대신에 문자 x를 사용 · $a \div 5 = a \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}a$ · 상수항은 모두 동류항 · 식의 값 대입 · 정의: 대입, 식의 값, 항, 상수항, 다항식, 단항식, 계수, 차수, 일차식, 동류항, 등식, 좌변, 우변, 양변, 방정식, 미지수, 해, 근, 방정식을 푼다, 항등식, ∴, 이항, 일차방정식, x에 관한 일차방정식, 농도 · 등식의 성질-저울 은유	· 문자와 수의 곱셈과 단항식과 수의 곱셈 · 상수를 나타내는 문자 a와 변수를 나타내는 문자 a · 일반적인 수를 대신하는 문자 x와 방정식의 문자 x · 등호의 의미

언어와 상징 사이의 번역, 문자의 의미, 기존 규칙에 근거하여 새로운 기호 조작 규칙을 설명하는 것 등에서 기호의 의미를 다룬 내용들을 살펴볼 수 있다. 기호의 대상은 기호가 가리키는 것이 무엇인지 교과서에서 정의하는 바를 따른다. 예를 들어, 변수 x가 처음 도입될 때 교과서에서는 예를 들면서 '달린 시간 대신 문자 x를 사용한다'고 한다.

기호의 대상을 규정하는 정의 뿐 아니라 일상언어로 쓰여진 문장을 상징의 식으로 번역할 때도 상징의 기표에 일상언어의 의미가 대응하는 의미론이 적용된다. 돌연히 등장한 a라는 문자가 상수를 나타내는데 사용된다는 해석을 할 때도, 그리고 하나의 식이 과정이 아니라 대상으로 인식되는, 예를 들어 나눗셈은 역수를 곱한다는 구문론적 규칙이 적용된다는 것을 설명할 때도 대수 기호에 의미론이 적용되고 있다.

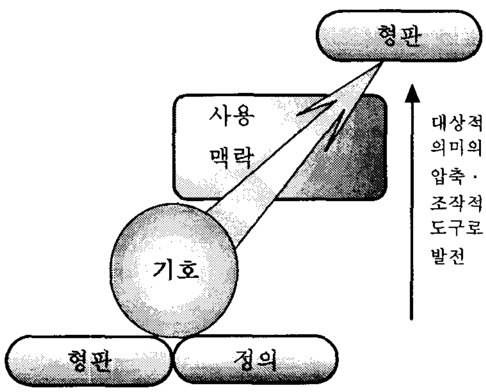
마지막으로 화용론에 의해 대수 교과서를 분석한다. 교과서에서 다루어지는 화용론은 동일한 기호를 맥락마다 다른 의미로 사용할 때 적용되는데, 예를 들어 일상언어에서 쓰이는 용어가 수학에서 다른 의미로 사용될 때 학생들은 맥락에 적합한 해석을 해야 한다. 또한 수학에 사용되는 문자의 해석에서도 화용론이 적용될 수 있다. 예를 들어, 다항식에서 사용되는 x와 방정식에서 사용되는 x는 다른 의미로 파악되어야 한다. 이것은 Usiskin(1988)이 변수 개념의 분석에서 일반화된 산술, 문제 풀이 과정, 양 사이의 관계, 추상적인 구조의 4가지 관점에서 변수가 갖는 의미를 다르게 본 것에서도 나타난다. 공식에서의 변수는 임의의 양에 대한 기호이며 한 변수의 변화가 다른 변수의 변화를 함의하며, 방정식에서 미지수는 해에 대한 자리지기, 항등식에서는 임의의 실수, 수의 성질을 나타낼 때는 산술 패턴을 일반화하는 임의의 수 등, 대수에서 사용되는 문자의 의미는 다양하다. 다항식을 학습하면서 자주 접하게 된 문자 x를 학생들이 방정식에서 다시 만나는 것은 그 문자의 의미를 맥락에 맞게 해석할 것을 요구하며 기호학적 관점에서 본다면 이것은 화용론에서 표명되어야 하는 내용이다. 즉 처음에 기호를 보고 학생들이 해석한 내용에 다른 의미가 추가되거나 변형될 때, 학생들은 해석의 차이를 알아야 한다. 본 연구에서 교과서를 분석해 보았을 때 이러한 내용들은 거의 없었다.

2. 교수학적 관점에서 본 대수 기호의 도입과 전개과정

기호의 표현과 의미를 따로 분리시키는 것은 아니지만, 기호의 표현과 의미 중에서 어느 것을 먼저 설명하는가에 따라 기호의 도입은 탐구적 접근과 표현적 접근을 취한다(김선희 · 이종희, 2002). 본 연구에서 고찰한 문자와 식 영역에는 많은 수학 용어와 상징이 등장하며 주로 표현적 접근을 취한 것이 많았다. 표현적 접근은 규약에 의해 정해진 기호를 일단 도입한 후 그 의미를 채우는 방식으로, Sfard(2000)는 상징을 도입할 때 상징의 의미를 풍부히 한 후 표현을 쓰는 것이 아니라 이전에 있던 상징을 형판(template)으로 하여 일단 표현이 등장하고 그 의미가 채워지는 펌프의 은유를 설명한 바 있다.

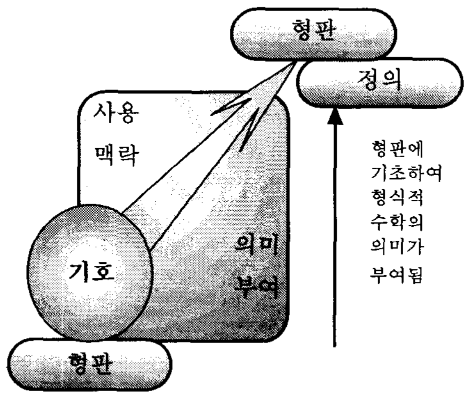
표현적 접근에 의하면 본 연구에서 분석한 교과서의 내용에서 기호는 일단 학생들이 이미 알고 있는 기호들을 형판으로 하여 도입이 된다. 이때 그 형판 위에서 기호를 정의하여 그 기호가 가리키고 있는 대상이 무엇인지 명확히 한다. 그 후 기호는 여러 맥락에서 사용되면서 알고리즘이나 계산에서 의미가 압축되고, 결국 새로운 기호의 형판 역할을 하게 된다. 즉, 기

호는 정의에 의해 대상으로 도입된 후 대상적 의미는 압축되고 조작적 의미를 가진 것으로 사용되다가 다른 기호의 도입을 위한 형판으로서 역할을 하게 되는 과정을 거치는 것이다. 이 과정은 <그림 2>와 같이 설명될 수 있다.



<그림 2> 표현적 접근에서 기호의 교수학적 전개 과정

일단 자연스러운 기호 표기를 사용하다가 규약을 협상하는 탐구적 접근에 의해서 도입되는 기호는 교과서에서 주로 개념적 의미가 심오한 것에 사용된다. 예를 들어, '등식의 성질'이라는 기호가 교과서에서 어떻게 전개되는지 그 과정을 조사해 보면 다음과 같다. 수학 7-가의 문자와 식에서 방정식은 등식의 성질을 통해 그 연산 절차가 성립된다. 따라서 학생들이 등식의 성질에 대한 원리를 깨달을 때 그에 의한 방정식의 해결을 의미 있게 할 수 있다. 등식의 성질이라는 기호에 의미가 부여되어 사용되는 전개 과정을 교과서에서 살펴보면, 처음에는 저울 은유에 의해 설명되면서 저울 은유가 기호의 형판이 된다. 저울에서 참인 성질이 등식에도 적용되면서 의미가 부여되어 채워지고, 그리고 나서 등식의 성질이 무엇인지 일목요연하게 표현된 정의가 내려진다. 여기에 '등식의 성질'이라는 기호를 발명하고 협상하는 과정이 포함된다. 그리고 등식의 성질을 이용하여 양변에 덧셈을 했을 때 어떻게 식이 변형되는지 문제를 통해 알아보면서 저울 은유에 근거한 의미는 압축되고 등식의 성질을 이용한 구문론적 조작이 이루어지게 된다. 그리고 이제 등식의 성질은 방정식 풀이의 형판으로 역할을 하게 된다. 표현적 접근과 유사하게 탐구적 접근에서 기호의 교수학적 전개 과정은 <그림 3>으로 설명될 수 있다.



<그림 3> 탐구적 접근에서 기호의 교수학적 전개 과정

교과서에 기호가 도입되고 의미가 부여되어 사용되는 교수학적 전개 과정은 개인의 인지적, 심리적 상황을 고려하기 위해서 학습자가 형성하는 내적 표상의 발달 과정과 유사해야 한다. Goldin과 Shteingold(2001)은 수학의 규약적 상징 체계에서 구조화된 학습 환경을 포함한 영역을 외적 표현이라 하고, 일상언어, 시각적 상징과 공간 표현, 문제해결 전략과 발견술, 수학과 관련한 학생들의 개인적 상징화 구조와 수학적 표기에 부여한 의미를 내적 표상이라 했다.

내적 표상의 발달은 여러 표현 체계에 적용할 수 있는 세 가지 단계로 구성되어 있는데, 첫째는 이전에 확립된 표현을 참조하여 새로운 내적 배열이 구성되고 처음 의미가 부여되는 Piaget 의미의 기호 창조 단계이고, 둘째는 이

전 체계를 형판으로 하여 상위 구조에 해당하는 새로운 체계가 구성되는 구조적 발달 단계, 셋째는 새로운 표현 체계가 이전 체계와 이전의 필수적인 관계로부터 부분적으로 또는 완전히 분리되어 새로운 맥락에서 더 일반적인 의미로 유연하고 강력하게 기능하는 자율적인 단계이다(Goldin & Shteingold, 2001). 표현적 접근과 탐구적 접근에서 초기에 기호를 정의하거나 다른 형판에 기초하여 의미가 부여되는 것은 학생들의 내적 표상의 첫 번째 발달 단계에, 기호가 사용 맥락에서 의미가 압축되고 구문론적 조작의 대상으로 구성되는 구조적 발달은 두 번째 단계에, 새로운 기호의 출현이나 구문론적 조작에 포함되어 형판 역할을 할 수 있게 되는 것은 세 번째 단계에 대응될 수 있을 것이다.

교과서에서 기호 표현의 도입과 전개 과정이나 학습자의 내적 표상의 발달에서, 기호는 최종적으로 형판의 역할을 하고 대상의 의미에서 벗어난 자율적 기능을 하면서 식의 변형과 연산 속에 포함된다. 이때는 구문론이 중요하게 작용하게 된다. 일반화와 공식, 알고리즘이 구성되어야 하는 대수에서 학생들은 방정식을 풀면서 등식의 성질을 계속 생각해내야 할 필요없이 일단 계산을 시작하면 기호의 대상적 의미와 관련된 사고는 계속 사용하지 않는다. 여기서 기호의 대상에 대한 해석인 의미는 사라지거나 증발되는 것이 아니라 계산 과정을 검토할 때 다시 등장할 수 있도록 기호 속에 압축되는 것이며, <그림 2>와 <그림 3>에서 기호가 새로운 기호의 형판으로 발전하는 것은 의미가 압축되어 있는 기호를 다룰 때 의미론보다 구문론적 관점이 더 부각될 수 있음을 보여준다. 즉, 대수에서 강조되어 온 구문론의 측면은 대수의 외적·내적 표현의 결과로 필요한 것이다.

하지만, 학생들이 상징을 정확히 사용한다고 해서 서술되고 있는 과정에 대해 개념적 이해를 한 것이라고 가정되어서는 안 된다(Miller, 1993). 대수 기호의 교수학적 전개 과정에 대한 충분한 고찰이 이루어지지 않는다면, 학생들은 의미가 없는 대수 기호에 대한 도구적 이해에 몰두하고 수학은 규칙을 적용하고 외우는 학문으로 인식될 수밖에 없을 것이다. 전통적인 대수 교육은 대수 기호를 구문론적 관점에 치중하여 고찰하였기 때문에 비판을 받았다. 대수에서 구문론이 중시되고는 있지만 기호의 전개 과정에서 압축된 의미에 대한 점검이 대수 학습 지도 과정에 포함되어야 할 것이다.

그리고 기호의 대상에 대한 의미를 풍부히 했다고 해서 구문론적으로 기호의 규칙을 잘 알고 행할 수 있는 것은 아니다. 문자를 포함한 식을 조작한다 해도, 식을 간단히 하라는 것인지 방정식을 통해 미지수의 값을 구하라는 것인지 기호가 사용되는 맥락에 따라 학습자의 판단이 필요하다. 기호의 구문론이나 의미론을 강조하기보다는 구문론과 의미론을 전제로 한 화용론적 관점에서 대수 기호를 고찰하는 것이 의미가 있다고 할 수 있다. 뿐만 아니라 화용론은 기호의 도입과 전개에서 교과서나 교사가 각각의 기호에 표현적, 탐구적 관점 중 어느 것이 학생에게 적합한지 선정하는데 도움을 줄 수 있다. 기호의 해석자와 사용자인 학생의 관점을 가장 잘 받아들이는 것이 화용론이기 때문이다.

3. 교과서에 도입된 대수 기호의 분류

본 절에서는 수학 7-가 문자와 식 영역에서 구문론, 의미론, 화용론에 의해 분석된 대수 기호들을 분류해 보고자 한다.

수학 7-가 문자와 식 영역의 교과서 분석 결

과, 기호 사이의 관계와 규칙과 관련된 구문론 관점에서 교과서에 도입된 대수 기호는 크게 세 가지로 분류될 수 있었다. 첫째, 수학사회의 약속에 의해 규칙이 정해진 것으로 예를 들어, '곱셈기호는 생략하기로 한다'와 같이 기호 사용의 편의를 위해 수학자들이 일방적으로 설정한 규칙이다. 대수의 역사적 발전과정이나 대수의 전체적인 구조를 파악할 수 없는 학생들은 이런 기호를 약속으로만 받아들일 수밖에 없다. 둘째, 기존의 다른 기호를 조작하여 파생된 기호 사이의 관계로 '이항하면 부호가 바뀐다'는 등식의 성질에 의해 파생된 구문론이며, '$\frac{a}{b}$'는 나눗셈 기호가 생략되어 나온 구문론 기호라 할 수 있다. 셋째, 기호의 대상에 의해 생겨난 규칙으로 3(a+b)=3a+3b인 것은 a+b가 가로의 길이이고 세로의 길이가 3인 직사각형의 넓이를 구하는 것을 이 기호의 대상으로 하여 해석할 수 있으며, 이러한 분배법칙은 알고리즘화되어 구문론으로 고착되었다고 할 수 있다.

의미론은 기호가 가리키는 대상에 대한 해석에 의해 고찰되는 것으로 교과서의 대수 기호는 다음의 것들로 분류될 수 있었다. 첫째, 참조 대상이 존재하는 기호로 기호의 대상을 보여줌으로써 외연적으로 정의되는 경우에 해당한다. 주로 개념의 이름을 나타내는 기호이며 예를 들어, '동류항'이나 '상수항'은 다항식 내에서 어떤 것인지 그 대상을 보여줌으로써 정의되고 있다. 둘째, 참조적 대상 없이 연산을 수행하는데 사용되는 기호로 '+'와 '-', 절대값 | |, 역수 -1의 예가 있으며, 하나 이상의 숫자나 문자와 결합되어야 하는 기호이다. 산술에서는 연산이었던 것이 대수에서는 관계의 설명으로 역할을 하기도 한다. 예를 들어 등호는 산술에서 연산 수행 명령으로 보여질 수 있지만, 대수에서는 방정식에서 동치의 의미를 갖는 관계적 설명을 한다. 셋째, 일상 언어나 단위의 약어로서 존재하는 기호이다. 예를 들어, '∴, °, %' 등이 있다. 넷째, 기호의 조작이 대상으로 변형된 기호로 $2 \times 2 = 2^2$에서 지수 2가 여기에 해당한다고 할 수 있다.

교과서에서 도입된 대수 기호들은 화용론적인 언급은 거의 없었으며, 구문론과 의미론에 의해서 대수 기호들을 <표 2>와 같이 분류할 수 있었다. 기호를 구문론과 의미론의 분야에서 분류하기는 하였으나 두 가지 분야가 완전히 상반된 기호는 존재하지 않으며 구문론과 의미론의 두 가지 분야 모두를 고려할 때 기호의 사용, 의미, 해석이 잘 이루어질 수 있다. 그래서 대수 기호의 분류는 구문론과 의미론의 조합에 의해 더 정교하게 분류될 수 있으며 <표 2>는 그 예를 포함한다.

<표 2> 대수 기호의 분류

<table>
<tr><th>구문론</th><th>의미론</th><th>기호 분류의 예</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1. 수학사회의 약속에 의한</td><td>a. 참조 대상이 존재하는 기호</td><td>1a. 동류항, 상수항</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b. 조작적으로 사용되는 기호</td><td>1c. ∴</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2. 다른 기호들의 조작에 의해 파생된</td><td>2c. 이항</td></tr>
<tr><td>c. 단위나 일상 언어의 약어</td><td rowspan="2">1d. 나눗셈이 생략된 분수</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3. 기호의 의미에 따른</td><td rowspan="2">d. 조작이 대상으로 변형되는 기호</td></tr>
<tr><td>2d. 지수</td></tr>
</table>

예를 들어, 동류항은 외연적 정의가 가능한 기호로 수학 사회에서 규정한 이름과 사용규칙이 정해진 것이다. 지수는 조작이 대상으로 변형된 기호로 다른 기호들의 조작에 의해 파생된 규칙을 따른다.

교과서에서 화용론적인 분야의 언급은 거의 없으나 동음이의어에 의한 해석을 고찰할 필요

가 있다. 예를 들어 항과 단항식, 숫자와 상수항의 구별이나 앞서 고찰한 변수 개념, 상수와 변수, 매개변수와 변수, 연산 수행의 명령과 동치 관계로서의 등호의 의미는 학생들에게 오류를 낳고 혼동하기 쉬운 기호들이며, 학생들이 알고 있는 기호의 의미와 다르게 해석되는 맥락이 도입될 때 교사는 적절한 설명과 문제를 통해 기호의 이해를 도모해야 할 것이다.

4. 교과서 대수 문제에서의 기호

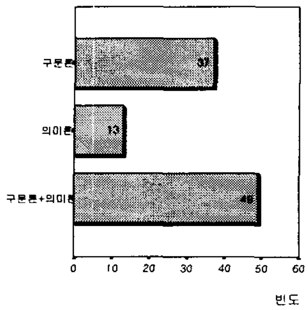
교과서에서 '문자와 식' 영역은 개념을 설명하는 부분과 예제와 문제들로 구성되어 있다. 개념의 설명 부분에서는 대개 구문론과 의미론에 치중한 기호들이 대부분이었다. 이 절에서는 수학 7-가 교과서(강행고 등, 2001) 문자와 식 영역의 문제들을 기호적 관점에서 다루어보기로 한다. 기호적 관점에서 대수 교과서의 문제들은 기호의 정의와 더불어 도입된 후 의미가 압축된 후에 구문론에 입각하여 구성된 문제, 의미론과 관련된 문제, 구문론과 의미론이 조합되어 구성된 문제들로 <표 3>과 같이 분류될 수 있다.

문자와 식 영역의 문제들도 주로 구문론, 의미론과 관련되어 있으며 예제와 문제, 기본·보충학습, 연습문제, 종합문제에 총 99개의 문제가 있었다. 그 분포를 알아본 결과는 <그림 4>와 같다. 구문론적 문제가 37개로 전체의 37% 정도를 차지하고 있었으며 의미론적 관점의 문제는 13개로 13%가 있었다. 의미론적 문제는 주로 기호에 대한 단편적인 정의와 뜻을 묻는 것이다. 기호 사용의 규칙과 조합된 구문론+의미론 문제들은 전체의 50%로 더 많은 비중을 차지하고 있었다.

<표 3> 기호학 분야에 의해 분류된 문자와 식 영역의 문제 유형의 예

	문 제 유 형
구문론	·다음 식을 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략하여 나타내어라. ·다음을 계산하여라. ·다음을 간단히 하여라. ·다음 일차방정식을 풀어라.
의미론	·다음 다항식에서 문자가 들어있는 항의 계수를 말하여라. ·다음 중에서 일차식을 찾아라. ·다음에서 동류항을 찾아라. ·다음 중에서 등식을 찾아라. 또, 그 등식의 좌변과 우변을 말하여라. ·x가 집합 {1, 2, 3}의 원소일 때, 방정식 $2x+1=5$의 해를 구하여라. ·다음 등식 중에서 x에 관한 항등식을 찾아라. ·다음 중에서 일차방정식을 모두 찾아라.
구문론 + 의미론	·다음 수량을 문자를 사용하여 식으로 나타내어라. ·다음 식의 값을 구하여라. ·$(6x-9)\div 3$을 계산하는 과정이다. □안에 알맞은 것을 써넣어라. ·다음 사각형의 넓이를 문자를 사용한 식으로 나타내어라. ·다음을 등식으로 나타내어라.

교과서의 문제 구성은 학습 내용과 관련하여 분포가 다르게 나타났는데 예를 들어, 등식과 관련된 부분에서는 등식의 성질의 의미를 파악해 가는 의미론적 문제가 많이 있었고, 중단원인 문자와 식에서는 기호 사이의 연산과 조작을 요구하는 구문론적 문제가 많이 있었으며, 연습문제와 종합문제의 총괄평가 부분에서는 구문론+의미론의 문제들이 많았다.



<그림 4> 수학 7-가 문자와 식 영역의 문제 분포

본 장에서는 문자와 식 영역의 대수 기호를 기호학 분야에 따라 살펴보고 교과서의 기호 도입과정을 고찰하고 기호를 분류하고 문제 분포를 알아보았다. 다음 장에서는 학생들의 대수 기호 학습이 기호의 관점에서 어떻게 이루어졌는지 평가해보고 문제해결의 학습목표와 관련시켜 본다.

Ⅳ. 중학생의 대수 문제해결

본 장에서는 구문론, 의미론, 화용론적 관점에서 구성된 문제의 풀이를 통해 학생들의 대수적 문제해결을 예측해 보려 한다. 문제해결은 대수에서 문자를 이용하여 식을 만들고 일반화하고 실생활의 문제를 방정식을 이용하여 푸는 것으로 평가될 수 있다.

연구 대상 학생들은 대수 내용을 학습한지 6개월 정도가 지난 중학교 1학년 학생들로 서울 시내 G중학교 89명과 S중학교 54명이었다. 대수 학습 직후에는 구문론과 의미론에 치우친 교과서 내용과 문제해결에 영향을 받을 것으로 여겨져, 대수 학습이 끝난 후 오랜 시기가 지난 학생들을 대상으로 하였다. 문항은 문자와 식에서 다루는 내용 범위에서 출제되었으며, <표 3>과 같이 교과서에서 대표적인 유형에 속하는 구문론 20문항, 의미론 8문항, 구문론+의미론의 9문항과 교과서에 제시되어 있지는 않지만 화용론적 관점에서 다루어볼 수 있는 5문항과 대수적 문제해결에 속하는 4문항이었다. 대수적 문제해결은 대수적 개념을 이용하여 해결할 수 있는 문장제로 논리적 사고와 언어적 기능, 산술적 처리 기능을 동시에 요구하는 문항으로 구성되었다. 화용론과 문제해결 문항은 <부록>에 제시되어 있다. 2002년 12월에 학생들은 45분씩 두 시간에 걸쳐서 각각의 관점에서 만들어진 문제들이 조합된 것을 24문항, 22문항씩 풀었다.

문제해결 문항은 Washington의 수행평가 프로젝트의 총괄적 채점 기준(최연희 등, 1998)에 따라 채점하였다. 평가 기준은 <표 4>와 같다. 구문론, 의미론, 구문론+의미론, 화용론의 나머지 문항들은 항목별 채점 방법[4]에 따라 문제에서 요구하는 항목들에 점수를 부여하여 채점하였다.

<표 4> 문제해결의 총괄적 채점 기준

4점	모범적인 답안
3점	완전한 답안
2점	최소의 답안
1점	부적절한 답안
0점	시도도 하지 않은 답안

4) 수학 수행평가나 문제해결을 평가할 수 있는 채점 기준은 총괄적 채점, 분석적 채점, 항목별 채점이 있으며(Taylor & Bidlingmaier, 1998), 문제의 단순한 진술이나 여러 답을 열거하기를 요구하는 문제는 항목별 채점이 유용하다.

학생들의 점수를 조사한 결과 <표 5>와 같이 총점을 100점으로 환산하였을 때의 평균을 비교해 보면, 교과서에서 많이 접해 보았던 구문론, 의미론, 구문론+의미론의 문제들은 평균이 높으나 화용론과 문제해결에서는 성취가 낮은 것을 알 수 있다. 이 문제들은 주로 설명하는 글을 쓰는 문항들로 되어 있어 학생들이 답을 하는데 더 어려움이 많았을 것으로 예상된다.

화용론의 문제는 학생들의 개념 오류를 파악하는데 있어서도 의미가 있는 것이라 할 수 있는데, 예를 들어 화용론의 3번 문항에서 몇몇의 학생들은 '10/2는 5로 계산될 수는 있으나 분수이기 때문에 자연수가 될 수 없다'는 대답을 하였다. 학생들이 대수에서 갖고 있는 오개념과 오류에 관련하여 교사가 관심을 갖고 처방하려는 노력을 한다면 이러한 화용론 분야의 문제를 통해 학생들의 생각을 알아보려는 시도가 필요할 것이다.

<표 5> 중 1 학생들의 대수 평가 결과

	평균	표준편차	최대값	최소값	만점	100점 환산평균
구문론	9.78	5.32	19	0	20	48.88
의미론	4.39	2.67	10	0	10	43.91
구문+의미	5.08	2.67	12	0	12	56.49
화용론	2.76	2.51	9	0	9	23.02
문제해결	2.64	2.65	12	0	15	17.58

대수의 학습목표 중 하나를 문제해결로 보고, 대수 학습 과정에서 경험한 대수 기호의 구문론, 의미론, 구문론+의미론, 화용론의 분야의 문제 풀이가 대수 문제해결을 얼마나 예측할 수 있는지 조사해 볼 수 있다. 이를 위해 독립변수가 종속변수의 변화량을 얼마나 예측하는지 알아볼 수 있는 회귀분석을 실시하였다. 문제해결을 종속변수로, 구문론, 의미론, 구문+의미, 화용론의 점수를 독립변수로 입력하여 회귀분석을 실시하였다. 단계선택에 의해 구문론과 화용론이 F의 확률에 근거하여 입력되었고 의미론과 구문론+의미론의 변수는 제거되었다. 구문론과 화용론이 독립변수로 선택되었을 때 문제해결의 변화량은 결정계수 R^2에 의해 35.8% 설명할 수 있는 것으로 나타났다.

<표 6>에 의하면, 구문론의 회귀계수는 .210이고 t값은 4.908, 유의확률은 .000으로 유의수준 .01내에서 구문론이 문제해결에 유의한 영향을 미치는 것으로 나타났다. 한편, 화용론은 회귀계수가 .261이고 t값은 2.883, 유의확률이 .005로 유의수준 .01 내에서 문제해결에 영향을 미치는 것으로 나타났다.

<표 6> 구문론과 화용론이 대수 문제해결에 미치는 영향

모형	B	표준오차	β	t	p	R^2
(상수)	-.138	.373		-.370	.712	.358
구문론	.210	.043	.421	4.908	.000	
화용론	.261	.091	.247	2.883	.005	

화용론은 구문론과 의미론이 전제가 된 것으로 기호의 사용 규칙과 의미가 배제되어 있지 않다. 교과서에서 직접 접하지 않은 화용론이 문제해결의 변화에 영향을 미치는 것은 대수의 문제해결이 구문론과 의미론, 화용론을 두루 학습해야 설명될 수 있는 것임을 말해준다. 회귀 모형에 의미론이 빠진 것은, 의미론의 문제가 기호의 단편적인 대상적 의미를 묻고 있지만 문제해결에서 기호의 의미는 다면적으로 해석되어야 하기 때문인 것으로 보인다.

그리고 <표 6>에서 구문론 변수의 표준화된 회귀계수가 .421로 화용론의 표준화된 회귀계수보다 높은 것은 대수 문제해결을 구문론이

가장 잘 예측할 수 있음을 말해준다. <그림 2>나 <그림 3>과 같이 교수학적 관점에서 기호의 도입과 전개 과정은 대상적 의미가 압축되고 구문론적 조작의 도구로 다루어져 구문론이 강조될 수밖에 없었는데, 이러한 대수 기호의 전개 과정을 학생들의 평가에서도 뒷받침하는 것으로 보인다.

V. 결론 및 제언

대수적 사고의 신장과 대수적 기호 사용을 분리하여 생각할 수 없듯이 대수 학습에서 기호의 역할은 중대하다. 기호는 수학적으로 객관적인 실재를 가리키는 대상, 그것의 표현, 그리고 기호의 대상과 해석자 사이의 관계에 대한 역동적 해석으로 구성되어 있으며, 대수 학습에서 대수 기호 또한 이러한 역동적인 해석이 요구되고 있다.

본 연구는 기호학에서 분류된 연구분야인 구문론, 의미론, 화용론에서 대수 영역의 교과서를 분석하고 학생들의 대수 문제해결을 평가하였다. 문자와 식 영역에서 도입된 대수 기호는 교과서에서 주로 표현적 접근을 취했으나 대수적 개념이 심오하게 포함된 기호에 대해서는 탐구적 접근을 했다. 두 가지 접근 방법 모두 대수 기호의 대상적 의미가 압축되고 조작적 측면이 강조되는 구문론적 결과를 낳지만, 대수의 공식과 알고리즘에 숨겨진 원리의 파악을 위해서는 의미론이 필요하다. 그리고 대수 개념의 확립과 문제해결을 위해서는 학습자의 입장에서 기호가 사용되는 맥락에 따른 해석이 필요하며, 이것은 화용론의 입장에서 고찰될 수 있다.

교과서의 대수 영역에서는 화용론 분야에서 다루어지는 기호에 대한 설명이나 문제를 찾아보기 어려웠다. 교과서는 단지 기호의 정의가 무엇이고 그것이 어떠한 규칙에 근거하여 사용될 수 있다는 것만을 강조하여, 맥락에 따른 해석과 사용에 대해서는 학생들에게 암묵적으로 인식하게 하고 있었다. 대수 기호의 의미와 사용 규칙은 화용론에서 잘 드러나며, 실제로 교사나 학생 사이의 의사소통이 일어나는 것은 화용론 분야에서이다. 교과서에서 화용론 분야의 내용이 거의 없는 것은 학습자가 함축(implicature) 추론[5]을 하도록 제안한다. 다른 학문보다 정확하고 명시적인 문장과 식을 통해 연역적 추론을 추구하는 것이 수학이지만, 학생들을 이해시키려는 목적으로 만들어진 수학 교과서는 함축 등을 통해 수학 외의 일반적인 발화를 하고 있는 것이다. 교과서의 화용론적 언급의 미비는 대수 학습지도에서 교사가 학생의 기호 해석에 대해 적절하게 언급하고 지도할 필요성을 남긴다.

본 연구는 대수 학습이 기호에 의해 이루어진다고 보고 수학 7-가 교과서와 중학교 1학년 학생들의 문제해결을 조사하였다. 단 하나의 교과서로 모든 교과서의 대수 내용 구성과 문제를 일반화시키기에는 한계가 있으며, 143명의 학생들이 우리나라 전체 학생을 대표했다고 할 수는 없을 것이다. 더 많은 교과서와 학생을 대상으로 기호의 관점에서 학교수학을 분석해 보는 연구가 필요하다.

그리고 본 연구에서는 기호학 관점에서 대수적 문제해결을 논하였으나, 학습자의 개인적인 대수적 개념의 발전 과정도 살펴보아야 할 것이다. 일반적으로 대수의 개념은 과정과 절차적 의미가 요약(encapsulation)된 구조적 대상으

5) 발화에 직접 나타나 있지는 않지만 합리적인 추론을 할 수 있는 사람이라면 그 발화로부터 생각해 낼 수 있는 의미 내용을 말한다(이성범, 2001).

로 발전한다. 본 연구에서는 대수 기호가 처음 도입되어 다른 기호의 형판 역할을 하는 순간까지만 고찰하였으므로, 대수적 개념의 발달상에서 논의되는 기호에 대해서는 언급할 수 없었다. 중학교 1학년의 한 단원보다 더 넓은 범위 내에서 대수 개념의 발달 중 기호의 전개 과정을 포괄적으로 다룰 수 있는 연구가 후속적으로 진행되어야 할 것으로 보인다.

수학을 언어라고 감히 말할 수 있는 것은 수학을 구성하고 있는 기호 언어 속에 수학적 개념과 문제해결, 알고리즘, 추론의 측면이 모두 들어있고 기호의 해석화와 상징화를 통해 이러한 측면들의 학습이 이루어질 수 있기 때문이다. 본 연구는 기호의 측면에서만 대수 교과서를 분석하고 학습을 평가했지만, 이것이 수학이나 학습의 측면에서 일어나는 것 모두를 설명하기에 충분하지 않을 것이다. 대수 기호의 교과서 분석 뿐 아니라 학생들이 대수 학습 과정에서 경험하는 기호화와 해석화 과정을 대수 개념의 발달과 더불어 고찰할 필요도 있다. 그리고 대수 뿐 아니라 기하와 함수 등에서도 기호적 관점에서 교과서를 분석하고 학생들의 학습 과정을 관찰하고, 학습을 평가할 수 있는 연구가 지속되어야 할 것이다.

참고문헌

강행고 등(2001). **수학 7-가**. 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

김남희(1997). **변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

김선희 · 이종희(2002). 수학기호와 그 의미에 대한 고찰 및 도입방법. **학교수학, 4**(4), 539-554.

김성도(1998). **현대기호학 강의**. 서울: 민음사.

김치수 · 김성도 · 박인철 · 박일우(1998). **현대 기호학의 발전**. **서울대학교출판부**.

이성범(2001). **추론의 화용론 -언어와 추론**. 서울: 한국문화사.

서울시교육청(2000). **중학교 교사 연수를 위한 제 7차 교육과정 편성과 운영**. 저자.

우정호(1998). **학교 수학의 교육적 기초**. 서울대학교 출판부.

최연희 · 권오남 · 성태제(1998). **중학교 영어 · 수학 교과에서의 열린 교육을 위한 수행평가 적용 및 효과 분석**. 이화여자대학교 사범 대학.

Arzarello, F. (1998). The role of natural language in prealgebraic and algebraic thinking. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi & A. Sierpinska(eds.), *Language and communication in the mathematics classroom*(pp.249-261). Reston, VA: NCTM.

Bell, A. (1996). Algebraic thought and the role of a manipulable symbolic language. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee(eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*(pp.151-154). Dordrecht: Kluwer academic publishers.

Dörfler, W. (2000). Means for Meaning. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain(eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*(pp. 99-131). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Eco, U. (2000). **기호: 개념과 역사**. (김광현 역). 서울: 열린 책들. (불어 원작은 1972년 출판).

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing :*

Preface to a science of mathematics education. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio(eds.), *The roles of representation in school mathematics, 2001 yearbook*(pp.1-23). Reston, VA: NCTM.

Mellin-Olsen, S. (1987). *The politics of mathematics education.* Dordrecht: D. Reidel Publishing company.

Miller, L. D. (1993). Making the connection with language. *The Arithmetic Teacher, 40*(6), 311-316.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: students' access to significant mathematical idea. In L.D. English(ed.), *Handbook of international research in mathematics education.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being- or How mathematical discourse and mathematical Objects Create Each other. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain(eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*(pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics.* The Falmer Press.

Stallings, L. (2000). A brief history of algebraic notation. *School Science and Mathematics, 100*(5), 230-235.

Taylor, C. S. & Bidlingmaier, B. (1998). Using Scoring Criteria to Communicate about the Discipline of Mathematics. *Mathematics Teacher, 91*(5), 416-425.

Trabant, J. (2001). **기호학의 전통과 경향**. (안정오 역). 서울: 인간사랑. (독어 원작은 1996년 출판).

Vygotsky, L. S.(1985). **사고와 언어**. (신현정 역). 서울: 성원사. (영어 원작은 1962년 출판).

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra K-12, 1988 yearbook* (pp.8-19). Reston, VA: NCTM.

Zepp, R. (1989). *Language and Mathematics Education.* Hong Kong: UEA Press Ltd.

Letters and Expressions in View of Semiotic

Kim, Sun Hee (Gwangjang Middle School)
Lee, Chong Hee (Ewha Womans University)

Algebraic signs are important on learning and problem solving of algebra. This study investigated the contents of letters and expressions in textbooks by syntactics, semantics and pragmatics, and considered the introduction and extension processes of algebraic signs didactically. We also categorized the signs, and looked into textbook problems in view of semiotic. The result is that textbook is constructed in syntactics and semantics. Finally, the assessment of 7th grade students' competence in syntactics, semantics, syntactics+-semantics, pragmatics, and problem solving shows that students' ability in syntactics and pragmatics is a predictive variable for algebraic problem solving.

* **key words: sign, syntactics, semantics, pragmatics, problem solving.**

〈부록〉

※ 화용론

1. 원과 부채꼴에서 $l=2\pi r$의 공식과 $S=\pi lr$에서 공통으로 사용되는 l이 같은 것인지, 다른 것인지 말하고 그 이유를 설명하라(3점).

2. 다음 식들의 좌변에는 모두 3+2가 있다. 각각의 식이 어떤 경우에 사용된 것인지 설명하라. 예시를 만들어 말해도 좋다(3점).

㉠ 3+2=5, ㉡ 3+2=4+1, ㉢ 3+2=2+3

3. 10/2=5이다. 그렇다면, 10/2는 자연수인가? 옳은지 그른지 말하고, 그 이유를 설명하라(1점).

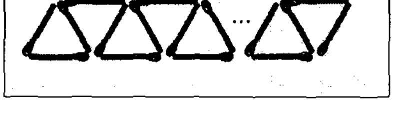
4. 다음의 두 식에 모두 x가 사용되었다. x의 쓰임에 차이가 있는지 없는지 말하고, 그 이유를 설명하라(4점).

$$2x,\quad 2x-5=-9,\quad 1-2x=-2x+1$$

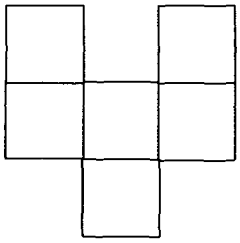
5. $\frac{a}{3}$와 $\frac{1}{3}a$ 중 누가 더 큰지, 같은지 말하고, 그 이유를 설명하라(2점).

※ 문제해결

1. 성냥개비를 사용하여 정삼각형 여러 개를 만들려고 한다. n개의 정삼각형을 만들 때, 필요한 성냥개비의 개수를 구하여라(4점).



2. 그림과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 타일 6개가 붙어 있다. 같은 모양의 정사각형 타일을 변이 겹치도록 한 개 더 붙일 때, 나올 수 있는 둘레의 길이를 모두 구하여라(4점).



3. 광장중학교의 금년 남학생과 여학생 수는 작년에 비하여 남학생은 8%가 증가하고 여학생은 6%가 감소했다. 작년에 전체 학생수가 850명인데 비하여 금년에는 작년보다 19명이 늘었다. 금년의 남학생 수는 얼마인가?(4점)

4. 똘똘이와 그 친구가 생일 맞추기 게임을 하고 있다.

똘똘이 : 내가 너 생일을 맞춰볼게.
친 구 : 정말?
똘똘이 : 먼저 네가 태어난 날의 수에 10을 더해.
친 구 : 응.
똘똘이 : 나온 수를 두 배 해 봐.
친 구 : 알았어.
똘똘이 : 네가 태어난 달의 100배를 또 더해.
친 구 : 어..... 했어.
똘똘이 : 그 수에서 20을 빼 볼래? 그리고 네가 태어난 날의 수도 다시 빼 봐. 얼마야?
친 구 : 316
똘똘이 : 아, 그럼 넌 3월 16일에 태어났구나.
친 구 : 응, 맞아. 어떻게 알았어?

똘똘이가 친구의 생일을 어떻게 알아냈는지 설명해 보세요(4점).