

비대칭 로터-자기베어링 시스템의 LMI에 기초한 H_∞ 강건제어

LMI-based H_∞ Robust Control of Asymmetric Rotor-magnetic Bearing System

강 호 식† · 송 오 섭*

Ho-Shik Kang and Ohseop Song

(2002년 9월 4일 접수 ; 2003년 2월 15일 심사완료)

Key Words : Robust Control(강건제어), Magnetic Bearing(자기베어링), H_∞ Control(H_∞ 제어), Rotor Dynamics(회전체 동력학), Linear Matrix Inequality(선형행렬부등식)

ABSTRACT

Linear matrix inequality based H_∞ robust controller is designed to control the motion of a 4-axis unbalanced rigid asymmetric rotor supported and controlled by two active magnetic bearings in this paper. To this end, the equations of motion of the system are derived via Hamilton's variational principle and transformed to a state-space form for the standard H_∞ control problem. LMI-based controller, which does not require additional assumptions beyond the usual stabilizability and detectability assumptions, is designed based upon the pole place weighting function and loopshaping technique. The obtained results are compared with those reported in the available literature and the efficiency of the proposed LMI-based H_∞ control is revealed.

기호설명

- a, b : 타원형 단면의 장축 및 단축의 반경
 I_u, I_v : 회전체의 u, v 축에 관한 질량 관성모멘트
 I_p : 회전체의 질량 극관성모멘트
 K_d : 전자석의 위치 강성계수
 K_i : 전자석의 전류 강성계수
 K_o : DC 게인
 L : 두 베어링 사이의 거리
 Ω : 회전체의 회전속도
 ϵ, ζ : u, v 축 방향의 질량편심(eccentricity)
 τ_o : 시정수

1. 서 론

자기베어링은 전자기력을 이용하여 회전체를 비접촉식으로 지지하므로 윤활유를 사용할 필요가 없어 청결성이 보장되고 윤활유의 작동허용온도와 관계없이 광범위한 작동온도에서 사용될 수 있으며 진공 중에서의 작동도 가능하다. 또한 자기베어링은 기계적 마찰에 의한 회전에너지의 손실이 거의 없으므로 고속회전운동을 효과적으로 지지, 전달할 수 있으며 회전체 시스템의 수명을 크게 연장시킬 수 있는 장점을 가지고 있다. 또한 자기베어링은 센서와 연계하여 작동기(actuator)의 역할을 수행할 수 있으므로 회전체의 진동을 능동적으로 제어할 수 있는 장점도 가지고 있다.^(1~4)

본 논문에서, 선형행렬부등식(LMI)에 기초한 H_∞ 강건 제어를 설계하여 질량 편심에 의한 타원형 단면 회전체의 진동을 자기베어링을 작동기로 사용하여 제어하기 위한 연구를 수행하였다. LMI 방법에 의한

† 책임저자, 정회원, 충남대학교 기계공학과 대학원

E-mail : yahoya@cnu.ac.kr

Tel : (042) 821-7620, Fax : (042) 822-5642

* 정회원, 충남대학교 기계공학과

H_∞ 제어는 제어대상에 무한 또는 순 허수축 상의 불변 영점의 제한조건이 불필요하고 Riccati 방정식에 기초한 H_∞ 제어의 가해조건이 단순 명료하게 도출되며, 자유매개변수와 페루프 Lyapunov 함수간의 명확한 관계로 주어지는 모든 H_∞ 제어기의 유한차원 매개변수화가 가능하다는 특성을 가지고 있다. 그리고 H_∞ 제어의 표준문제에 있어서의 4 가지 전제조건 중 두 가지의 조건을 만족시키지 않아도 되므로 효율적으로 제어기를 설계할 수 있다.⁽⁵⁾

Hamilton 원리를 이용하여 4자유도의 회전체-자기베어링 시스템의 운동방정식을 유도하여 이를 상태공간식으로 변환하고, 선형행렬부등식(LMI)에 기초한 H_∞ 제어기를 설계하여 외란(질량 편심)에 의한 진동을 효과적으로 제어할 수 있음을 보였다. 이때, 혼합감도 최소화화 국소 극점 배치에 의한 루프쉐이핑을 통하여 성능개선을 도모하였다.

2. 운동방정식 및 상태공간 방정식

2.1 운동방정식

(1) 변위장

회전체의 기하학적 중심 O에 위치하는 관성좌표계 (inertial coordinates) O-xyz를 설정하여 O점의 x, y 방향의 변위를 각각 x와 y로 나타내고 x, y 축 중심의 회전 각변위를 각각 θ_x 와 θ_y 로 나타낸다. 또한 단면의 주축에 고정된 좌표계(principal axes) O-uvw를 설정한다. (Fig. 1 참조)

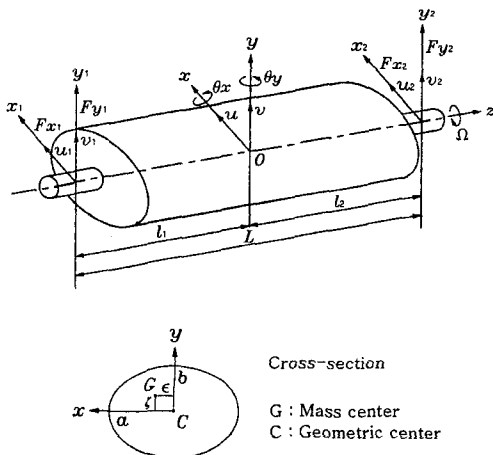


Fig. 1 Configuration of an asymmetric rotor

운동중인 회전체 내부의 한 점 P의 변위 벡터와 속도 벡터는 각각 다음과 같다.

$$\vec{R}_d = x\vec{I} + y\vec{J} + z\vec{K} + u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \vec{R}_d &= x\vec{I} + y\vec{J} + z\vec{K} + u\vec{i} + u\vec{i} + v\vec{j} + v\vec{j} + w\vec{k} + w\vec{k} \\ &= x\vec{I} + y\vec{J} + u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \end{aligned} \quad (1b)$$

여기서 $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ 와 $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ 는 (x, y, z) 와 (u, v, w) 좌표계의 단위 벡터이며 축방향 변위는 무시하였다.

운동방정식을 구하기 위하여 사용된 해밀턴 변분 원리는 다음 식과 같다.⁽⁶⁾

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta U - \delta T - \delta W_g - \delta W_i - \delta W_e) dt = 0 \quad (2)$$

회전체의 회전 운동에너지 구하기 위하여 회전체의 회전각속도($\vec{\omega}$)를 유도한다. $\vec{\omega}$ 는 (x, y, z)와 (u, v, w) 두 좌표계사이의 오일러 각(Euler's angles) ϕ, θ, ψ 을 고려하면 (Fig. 2 참조) 다음 식 (3)과 같이 유도되며⁽⁷⁾ 식 (1b)에서 $\vec{i} = \vec{\omega} \times \vec{i}$, $\vec{j} = \vec{\omega} \times \vec{j}$, $\vec{k} = \vec{\omega} \times \vec{k}$ 로 나타내어진다.

$$\begin{bmatrix} \omega_u \\ \omega_v \\ \omega_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3)$$

회전체의 운동에너지의 변분 δT 를 시간에 대하여 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt &= \int_{t_0}^{t_1} [-m \dot{x} \delta x - m \dot{y} \delta y + I_p \Omega (\dot{\theta}_x \delta \theta_y - \dot{\theta}_y \delta \theta_x) \\ &\quad - K (\dot{\theta}_x \delta \theta_x + \dot{\theta}_y \delta \theta_y) - \Delta \dot{\theta}_x \sin 2\Phi \delta \theta_y - 2\Delta \dot{\theta}_x \Phi \cos 2\Phi \delta \theta_y \\ &\quad - \Delta \dot{\theta}_y \sin 2\Phi \delta \theta_x - 2\Delta \dot{\theta}_y \Phi \cos 2\Phi \delta \theta_x - \Delta \dot{\theta}_x \cos 2\Phi \delta \theta_x \\ &\quad + 2\Delta \dot{\theta}_x \Phi \sin 2\Phi \delta \theta_x + \Delta \dot{\theta}_y \cos 2\Phi \delta \theta_y - 2\Delta \dot{\theta}_y \Phi \sin 2\Phi \delta \theta_y] dt \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $\theta_x = \theta \cos \phi$, $\theta_y = \theta \sin \phi$, $\Omega = \dot{\psi}$, $\Phi = \psi + \phi$, $\theta \approx 0$, $I = 1/2 (I_u + I_v)$, $\Delta = 1/2 (I_u - I_v)$ 이다.

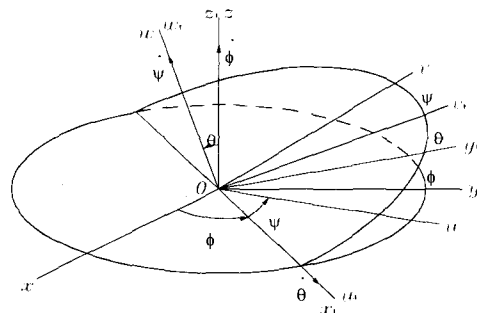


Fig. 2 Euler angles of the rotor

회전체의 중력 위치에너지 U , 질량 편심 하중에 의한 일 W_e , 공극 변화에 의한 전자기력이 한 일 W_g , 입력전류의 변화에 의한 일 W_i 에 변분을 취하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta U &= mg\delta y \\ \delta W_e &= m(\epsilon\Omega^2 \cos \Phi - \zeta\Omega^2 \sin \Phi)\delta x \\ &\quad + m(\epsilon\Omega^2 \sin \Phi + \zeta\Omega^2 \cos \Phi)\delta y \\ \delta W_g &= K_{x1}(x\delta x - l_1\theta_y\delta x - l_1x\delta\theta_y + l_1^2\theta_y\delta\theta_y) \\ &\quad + K_{x2}(x\delta x + l_2\theta_y\delta x + l_2x\delta\theta_y + l_2^2\theta_y\delta\theta_y) \\ &\quad + K_{y1}(y\delta y + l_1\theta_x\delta y + l_1y\delta\theta_x + l_1^2\theta_x\delta\theta_x) \\ &\quad + K_{y2}(y\delta y - l_2\theta_x\delta y - l_2y\delta\theta_x + l_2^2\theta_x\delta\theta_x) \\ \delta W_i &= (K_{i11}i_{x1} + K_{i22}i_{x2})\delta x + (K_{i12}i_{y1} + K_{i21}i_{y2})\delta y \\ &\quad - (K_{i11}l_1i_{x1} - K_{i22}l_2i_{x2})\delta\theta_y \\ &\quad + (K_{i12}l_1i_{y1} - K_{i21}l_2i_{y2})\delta\theta_x \end{aligned} \quad (5)$$

(2) 운동방정식

식 (4),(5)를 식 (2)에 대입하면 시스템의 운동방정식을 얻을 수 있다. 자기베어링의 각 방향 위치강성이 동일하다고 가정하고 ($K_{x1} = K_{x2} = K_{y1} = K_{y2} = K_d$), 각 방향의 전류 강성도 같다고 가정하며 ($K_{i11} = K_{i22} = K_{i12} = K_{i21} = K_i$), $l_1 = l_2 = L/2$ 일 때 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - 2K_d\dot{x} &= m(\epsilon\Omega^2 \cos \Omega t - \zeta\Omega^2 \sin \Omega t) \\ &\quad + K_i(i_{x1} + i_{x2}), \\ m\ddot{y} - 2K_d\dot{y} &= m(\epsilon\Omega^2 \sin \Omega t + \zeta\Omega^2 \cos \Omega t) \\ &\quad + K_i(i_{y1} + i_{y2}) - mg, \\ (I - \Delta \cos 2\Omega t)\ddot{\theta}_y + \Delta \sin 2\Omega t\ddot{\theta}_x + 2\Omega \Delta \sin 2\Omega t\dot{\theta}_y \\ &\quad - \Omega(I_p - 2\Delta \cos 2\Omega t)\dot{\theta}_x - \frac{L^2}{2}K_d\theta_y \\ &= \frac{LK_i}{2}(i_{x2} - i_{x1}), \\ (I + \Delta \cos 2\Omega t)\ddot{\theta}_x + \Delta \sin 2\Omega t\ddot{\theta}_y - 2\Omega \Delta \sin 2\Omega t\dot{\theta}_x \\ &\quad + \Omega(I_p + 2\Delta \cos 2\Omega t)\dot{\theta}_y - \frac{L^2}{2}K_d\theta_x \\ &= \frac{LK_i}{2}(i_{y1} - i_{y2}) \end{aligned} \quad (6)$$

위의 운동방정식은 관성좌표계에 관하여 유도되었으며 시변 시스템(time variable system)인 것을 알 수 있으며 이는 회전체가 비축대칭(asymmetric) 단면을 가지고 있는데 기인한다. 이를 시불변 시스템으로 변환시키고 자기베어링이 위치한 회전체 양 끝단에서의 변위로 표현된 운동방정식을 얻기 위하여 다음 식을 이용한다.

$$\begin{aligned} x &= u \cos \Omega t - v \sin \Omega t, \quad y = u \sin \Omega t + v \cos \Omega t \\ \theta_x &= \theta_u \cos \Omega t - \theta_v \sin \Omega t, \quad \theta_y = \theta_u \sin \Omega t + \theta_v \cos \Omega t \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= u - l_1\theta_y, \quad u_2 = u + l_2\theta_y, \\ v_1 &= v + l_1\theta_x, \quad v_2 = v - l_2\theta_x \end{aligned} \quad (8)$$

이러한 과정을 통하여 최종적으로 유도된 회전체-자기베어링 시스템의 운동방정식(시불변 시스템)은 다음과 같다.

$$M\dot{s} + Gs + Ks = DI_c + F_c W \quad (9)$$

여기서,

$$\begin{aligned} s &= [u_1, u_2, v_1, v_2]^T, \quad I_c = [i_{u1}, i_{u2}, i_{v1}, i_{v2}]^T, \\ M &= \begin{bmatrix} \frac{m}{2} + \frac{2}{L^2}(I - \Delta) & \frac{m}{2} - \frac{2}{L^2}(I - \Delta) & 0 & 0 \\ \frac{m}{2} - \frac{2}{L^2}(I - \Delta) & \frac{m}{2} + \frac{2}{L^2}(I - \Delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} + \frac{2}{L^2}(I + \Delta) & \frac{m}{2} - \frac{2}{L^2}(I + \Delta) \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} - \frac{2}{L^2}(I + \Delta) & \frac{m}{2} + \frac{2}{L^2}(I + \Delta) \end{bmatrix}, \\ G &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m\Omega - \frac{2\Omega}{L^2}(2I - I_p) & -m\Omega + \frac{2\Omega}{L^2}(2I - I_p) \\ 0 & 0 & -m\Omega + \frac{2\Omega}{L^2}(2I - I_p) & -m\Omega - \frac{2\Omega}{L^2}(2I - I_p) \\ m\Omega + \frac{2\Omega}{L^2}(2I - I_p) & m\Omega - \frac{2\Omega}{L^2}(2I - I_p) & 0 & 0 \\ m\Omega - \frac{2\Omega}{L^2}(2I - I_p) & m\Omega + \frac{2\Omega}{L^2}(2I - I_p) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ K &= \begin{bmatrix} K_{c11} & K_{c12} & 0 & 0 \\ K_{c21} & K_{c22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{c33} & K_{c34} \\ 0 & 0 & K_{c43} & K_{c44} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2K_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2K_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2K_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2K_i \end{bmatrix}, \\ F_c &= m \begin{bmatrix} \epsilon - g & 0 \\ \epsilon - g & 0 \\ \zeta & 0 & -g \\ \zeta & 0 & -g \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} i_{u1} \\ i_{u2} \\ i_{v1} \\ i_{v2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \Omega t & 0 & \sin \Omega t & 0 \\ 0 & \cos \Omega t & 0 & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & 0 & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & -\sin \Omega t & 0 & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{x1} \\ i_{x2} \\ i_{y1} \\ i_{y2} \end{bmatrix}, \\ K_{c11} &= -\frac{m}{2}\Omega^2 + \frac{2}{L^2}\Omega^2(I_p - \Delta - I) - 2K_d = K_{c22} \\ K_{c12} &= -\frac{m}{2}\Omega^2 - \frac{2}{L^2}\Omega^2(I_p - \Delta - I) = K_{c21} \\ K_{c33} &= -\frac{m}{2}\Omega^2 + \frac{2}{L^2}\Omega^2(I_p + \Delta - I) - 2K_d = K_{c44} \\ K_{c34} &= -\frac{m}{2}\Omega^2 - \frac{2}{L^2}\Omega^2(I_p + \Delta - I) = K_{c43} \end{aligned}$$

(3) 전력증폭기 및 전자석의 동특성

전력증폭기에서는 제어신호를 제어전류로 증폭시키고, 이 제어전류는 전자석의 흡인력을 제어함으로써 회전체를 안정한 위치에 부상시켜 베어링의 역할을 수행한다. 전력증폭기와 전자석으로 이루어진 전류계환계에서 제어전압과 구동전류의 관계는 다음과 같이 시정수와 DC 계인으로 구성된 1차 시스템으로 모형

화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{I}_c &= -T_a I_c + T_b u \\ &= \begin{bmatrix} 1/\tau_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tau_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tau_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\tau_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{u1} \\ i_{u2} \\ i_{v1} \\ i_{v2} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} K_o/\tau_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_o/\tau_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_o/\tau_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_o/\tau_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{u1} \\ u_{u2} \\ u_{v1} \\ u_{v2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

2.2 상태공간 방정식

다변수 입출력 제어시스템을 시간영역에서 해석하고 설계하기 위해서는 시스템의 상태 개념을 이용하여야 한다. 회전체의 운동방정식을 상태공간 방정식으로 나타내면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \\ I_c \\ \dot{I}_c \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} d \\ \underline{n} \end{bmatrix}, \\ A &= \begin{bmatrix} O_4 & I_4 & O_4 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C & M^{-1}D \\ O_4 & O_4 & -T_a \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} O_4 \\ O_4 \\ T_b \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} -I_4 & O_4 & O_4 \\ I_4 & O_4 & O_4 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [-I_4 \quad O_4 \quad O_4], \\ D_{11} &= \begin{bmatrix} I_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} O_4 \\ O_4 \end{bmatrix}, \\ D_{21} &= [O_4 \quad I_4], \quad D_{22} = O_4 \\ d &: \text{Disturbance vector} \\ \underline{n} &: \text{Sensor noise vector} \end{aligned}$$

3. 선형행렬부등식에 기초한 H_∞ 제어

3.1 H_∞ 제어

(1) 표준 H_∞ 제어

표준 H_∞ 제어 알고리즘은 다음 식 (12)와 같이 간략하게 나타낼 수 있다. 여기에서 w 는 외란, 잡음,

기준신호(reference signal) 등을 포함하는 외부입력항이며, z 는 제어량, u 는 제어기에서 계산되어져 나오는 제어입력, y 는 출력 측정값(measurement)이다.⁽⁸⁾

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (12)$$

H_∞ 제어는 w 에서 z 로의 페루프 전달함수행렬 (transfer function matrix : TFM) T_{zw} 의 H_∞ norm (H_∞ norm) $\|T_{zw}\|_\infty$ 을 다음과 같이 최소화하는 안정된 제어기 $K(s)$ 를 설계하는 것이다.⁽⁹⁾

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (\gamma > 0) \quad (13)$$

이러한 제어기를 설계하기 위하여 식 (11)에서 다음 조건이 만족되어야 한다.

- ① (A, B_1) 이 제어가능, (C_1, A) 이 관측가능
- ② (A, B_2) 이 안정가능, (C_2, A) 이 검출가능
- ③ $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [O \ I]$
- ④ $\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} D_{12}^T = \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix}$ (14)

여기에서 식 (13)이 만족되려면 두 개의 리카티 (Riccati) 방정식과 $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ 이 만족되어야만 한다. 이상의 조건 식들을 이용해 두 리카티 방정식의 유일해인 X_∞, Y_∞ 를 구하여 제어기를 설계할 수 있다.

(2) 선형행렬부등식에 기초한 H_∞ 제어

선형행렬부등식에 의한 방법은 리카티 방정식의 해를 구하지 않고, 다음의 부등식을 만족하는 R, S 행렬을 통해 성능지수 γ 를 달성하는 준 최적제어기를 얻는 것으로, 조건 (14)의 ③, ④에 의해서 제한되지 않는다.⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_{12} & O \\ O & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{12} & O \\ O & I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} N_{21} & O \\ O & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{21} & O \\ O & I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

성능 개선을 위한 혼합감도 최소화와 국소 극점 배치에 의한 루프 셰이핑(loopshaping)의 관계식은 다

음과 같다.⁽¹¹⁾

① 요구성능과 외란 억제 구속조건식

$$\|W_s(s) S(s)\|_\infty < 1 \quad (16a)$$

② 불확실성에 대한 견실안정성 구속조건식

$$\|W_f(s) T(s)\|_\infty < 1 \quad (16b)$$

여기에서 $S(s) = [I + G_0K(s)]^{-1}$ 는 감도함수이며, $T(s) = G_0K(s) [I + G_0K(s)]^{-1}$ 는 보조감도함수이다. 또한, W_s, W_f 는 요구성능과 강인 안정성을 위한 하중함수이다. W_s 는 일반적으로 저주파 영역에서 에너지를 갖는 명령입력과 외란에 대한 성능 향상을 위해서 이 영역의 감도함수를 최소화하며 W_f 는 고주파 영역에서 중요한 문제로 작용하는 모델 불확실성과 센서 잡음에 대해 강건한 시스템을 위해서 보조감도함수를 최소화한다. 이 두 하중함수는 다음과 같이 선정하였다.

$$w_s = \left(\frac{s/\sqrt{k\sqrt{M_s} + \omega_{bs}}}{s + \omega_{bs}/k\sqrt{\epsilon_s}} \right)^k, \quad W_s = \begin{bmatrix} w_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_s \end{bmatrix}$$

$$w_t = \left(\frac{s + \omega_{bu}/k\sqrt{M_t}}{k\sqrt{\epsilon_t}s + \omega_{bu}} \right)^k, \quad W_t = \begin{bmatrix} w_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_t \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$M_s = 60, \quad \omega_{bs} = 5000(\text{rad/s}), \quad \epsilon_s = 1/10^4, \quad k = 1$$

$$M_t = 10^4, \quad \omega_{bu} = 9000(\text{rad/s}), \quad \epsilon_t = 1/10^6, \quad k = 1$$

이러한 하중함수 선정 방법은, 기본 형태의 하중함수에서 시작하여 주파수 응답 및 변위 출력과 제어입

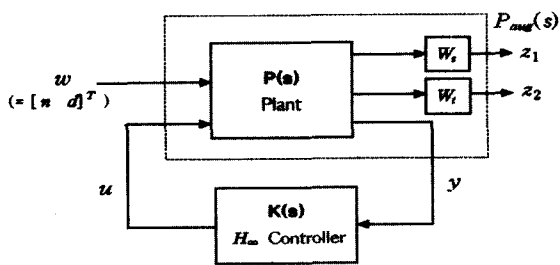


Fig. 3 Augmented plant $P_{aug}(s)$

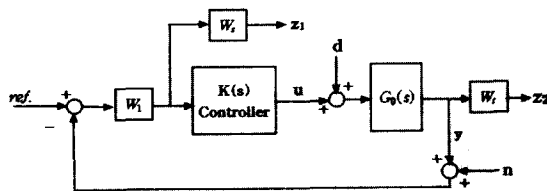


Fig. 4 Control structure

력에 대한 시간응답에서 설계사양을 만족할 수 있는 제어기를 조정하여 설계하였다. 선택된 하중함수를 포함하는 확장 플랜트 $P_{aug}(s)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_s(s) & W_s(s)G_0(s) - W_s(s)G_0(s) \\ 0 & 0 & W_f(s) \\ I & G_0(s) & -G_0(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix}$$

$$G_0(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad W_s(s) = \begin{bmatrix} A_{w_s} & B_{w_s} \\ C_{w_s} & D_{w_s} \end{bmatrix},$$

$$W_f(s) = \begin{bmatrix} A_{w_f} & B_{w_f} \\ C_{w_f} & D_{w_f} \end{bmatrix}$$

$$P_{aug}(s) = \begin{bmatrix} A_{w_s} & 0 & -B_{w_s}C & B_{w_s} & 0 & 0 \\ 0 & A_{w_s} & 0 & 0 & B_{w_s} & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & B & B \\ \hline C_{w_s} & 0 & -D_{w_s}C & D_{w_s} & 0 & 0 \\ 0 & C_{w_s} & 0 & 0 & 0 & D_{w_s} \\ \hline 0 & 0 & -C & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

플랜트 $G_0(s)$ 의 극점이 제어기 플랜트 $K(s)$ 의 영점에 의해 상쇄되는 것을 방지해 발진응답을 막는 극소 극점 배치를 위한 하중함수는 다음과 같다.

$$w_1 = \frac{3000}{s+6000}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

선정된 하중함수를 포함하는 플랜트는 Fig. 3과 같이 표현될 수 있으며, 시스템의 전체적인 제어구조는 Fig. 4와 같이 표현된다.

3.2 수치해석 및 고찰

본 연구에 사용된 시스템 변수는 Table 1 과 같다.

Table 1 Parameters of rotor-magnetic bearing system

Parameters	Value
Density of the rotor material (ρ)	7750 (Kg/m ³)
Length of the rotor (L)	0.6 (m)
Radius of the ellipse (a)	0.003 (m)
Radius of the ellipse (b)	0.0028 (m)
Mass eccentricity (ϵ, ζ)	0.0003 (m)
Position stiffness (K_d)	1.12×10^6 (N/m)
Current stiffness (K_i)	500 (N/A)
DC gain (K_o)	0.5 (A/V)
Time constant	1.60×10^{-3} (Sec)

Fig. 5는 원래 플랜트인 $G_0(s)$ 의 개루프 특이치 선도이다. 저주파와 고주파 영역에서 명령추종 성능이 만족되지 않으며 강인성도 보장되지 않고 있다.

극점 배치를 위한 하중함수 W_t 과 이에 의해 변형된 플랜트인 $G_s(s)$ 의 페루프 특이치 선도는 Fig. 6과 같다.

Fig. 7(a)는 감도함수 $S(s)$ 와 보조 감도함수 $T(s)$ 를 각각의 관련 영역에서 최소화함으로써 저주파 영

역에서의 성능과 고주파 영역에서의 견실 안정성을 보장하기 위해 선정된 가중함수 $W_s(s)$ 와 $W_t(s)$ 를 나타내며, Fig.7(b)는 이들을 고려하여 확장된 플랜트 $P_{aug}(s)$ 에 대한 페루프 특이치 선도이다. Fig. 7(b)에서 특이치 선도는 외란벽과 불확실성벽 사이의 대역폭을 통과하는 적절한 형태를 보여주고 있다.

이와 같이 설계한 H_∞ 제어기의 성능을 검증하기 위해 LQR 제어를 사용한 Ref. 12의 결과와 비교하였다. Ref. 12에서는 LQR 제어기 설계를 위한 상태 가중행렬 Q 와 제어입력 가중행렬 R 를 다음과 같이 가정하였다.

$$Q = \text{diag}[\rho_1 \ \rho_1 \ \rho_1 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \rho_2 \ \rho_2 \ \rho_3 \ \rho_3 \ \rho_3 \ \rho_3]$$

$$R = \text{diag}[\rho_4 \ \rho_4 \ \rho_4 \ \rho_4]$$
(20)

여기서 가중행렬의 변수는 최적의 시간응답을 나타내는 $\rho_1 = 10^3$, $\rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 1$ 로 선택하였다.

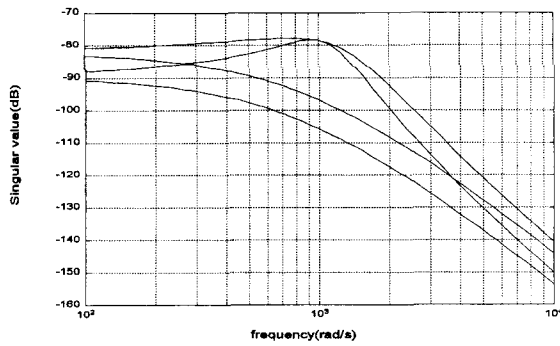
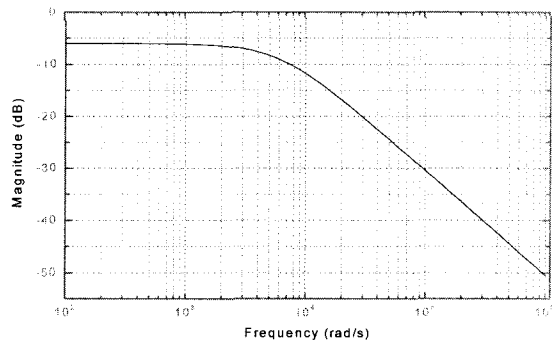
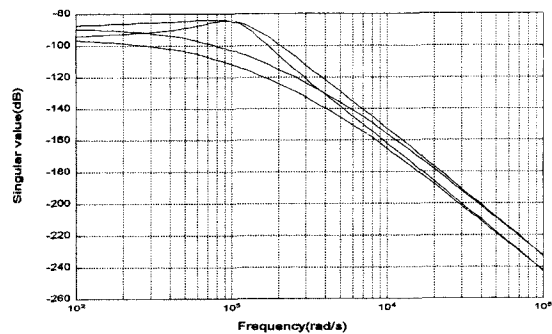


Fig. 5 Singular values of original plant

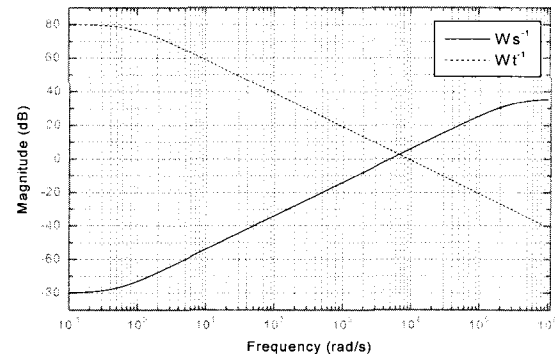


(a)

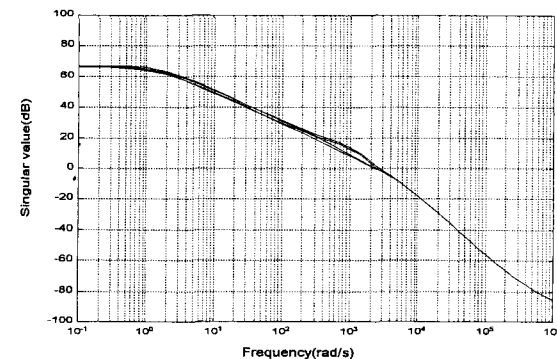


(b)

Fig. 6 (a) Pole placement weight
(b) Singular values of shaped plant

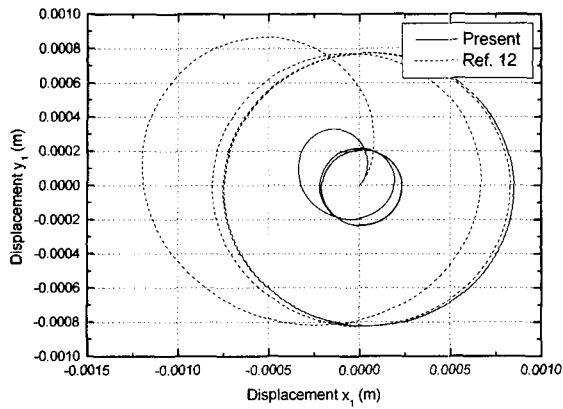


(a)

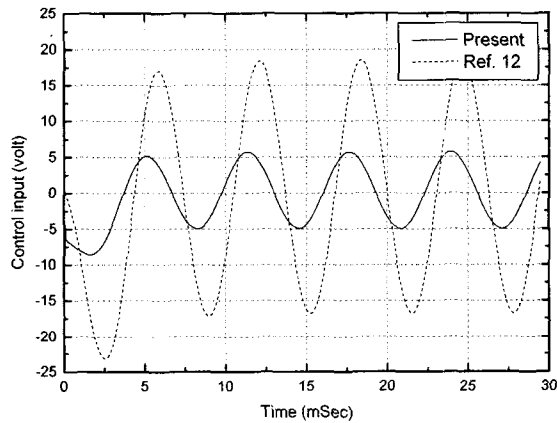


(b)

Fig. 7 (a) Performance & control weights
(b) Singular values of closed-loop TFM



(a)

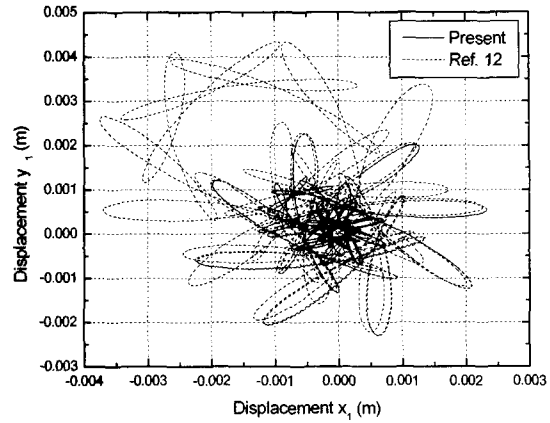


(b)

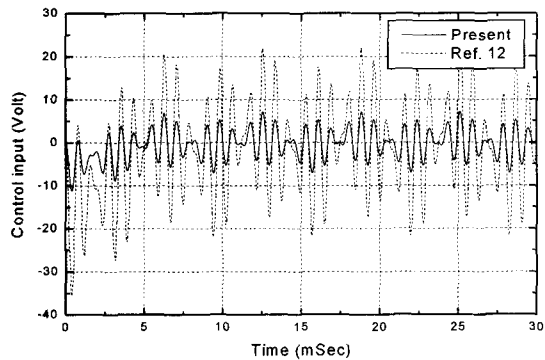
Fig. 8 (a) Orbits of rotor's left end
(b) Control inputs of y_1 direction

Fig. 8은 회전체가 $\Omega=1000$ (rad/s)으로 회전할 때 회전체 왼쪽 끝단에서의 회전체의 운동 궤적과 y 방향의 제어입력을 나타낸다. H_∞ 제어가 LQR 제어의 경우보다 정상상태 오차는 75% 정도 감소하며, 제어입력도 약 70% 정도 감소하였다.

Fig. 9는 센서 잡음 제거 성능을 검증하기 위하여 센서 잡음을 인가하였을 경우 회전체 왼쪽 끝단에서의 회전체의 운동 궤적과 y 방향의 제어입력을 나타내며, 인가된 센서 잡음은 $0.0001 \times \sin[8000t]$ 이다. 이 경우에도 정상상태 오차 및 제어입력에 있어서, H_∞ 제어기의 성능이 LQR 제어기보다 탁월함을 확인할 수 있다.



(a)



(b)

Fig. 9 (a) Orbits of rotor's left end
(b) Control inputs of y_1 direction

4. 결 론

질량 편심을 가진 비 축대칭 단면의 회전체-자기베어링 시스템에 대하여 에너지 방법을 이용하여 운동 방정식을 유도하고, 견실 안정성을 보장하는 H_∞ 제어기를 LMI에 기초하여 설계하였다. 질량 편심 하중에 의한 외란 및 센서 잡음에 대한 주파수 응답 및 시간 응답을 고찰하여, LMI에 기초한 H_∞ 제어기의 설계의 편이성과 LQR 제어기와 비교하여 뛰어난 성능을 나타냄을 보였다.

후 기

본 연구는 2001년도 한국학술진흥재단의 선도연구자 지원사업(과제번호: KRF-99-041-E00066 E1107)의 지원을 받아 수행되었으며 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Kenzo, N. and Takayuki, I., 1996, " μ Synthesis of Flexible Rotor-magnetic Bearing Systems," IEEE Transactions on Control Systems technology, Vol. 4, No. 5, pp. 503~512.
- (2) Chen, H. M. and Darlow, M. S., 1988, "Magnetic Bearing with Rotating Force Control," Transactions of the ASME, J. of Tribology, Vol. 110, Jan., pp. 100~105.
- (3) Ha, Y. H. and Lee, C. W., 1998, "Unbalance Response Control in Active Magnetic Bearing System by Optimal Control with Frequency-shaped Cost Functional," Trans. KSME, Vol. A 22, No. 8, pp. 1431~1441.
- (4) 장인배 등, 1995, "자기 베어링의 성능한계를 고려한 작동특성 연구," 한국소음진동공학회논문집, 제 5 권, 제 1 호, pp. 59~65.
- (5) Sanchez-Pena, R. S. and Szaiaier, M., 1998, Robust Systems, Theory and Applications, John Wiley & Sons.
- (6) Meirovitch, L., 1970, Methods of analytical dynamics, McGraw-Hill.
- 1998, "Bending Vibration of Gyroelastic Thin-walled Beams Incorporating Adaptive Capabilities," AIAA-98-2041.
- (8) Kemin, Z. and Doyle, J. C., 1998, Essentials of Robust Control, Prentice-Hall.
- (9) Doyle, J. C. and Glover, K., 1988, "State-space Formula for All Stabilizing Controllers That Satisfy an H_∞ Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity," Syst. & Contr. Lett., Vol. 11, pp. 167~172.
- (10) Gahinet, P. and Apkarian, P., 1993, "A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control," Int. J. Robust Nonlinear Control, Vol. 4, pp. 421~448.
- (11) 이재명 외, 1996, "모델 불확실성과 해파 외란을 고려한 물수체의 H_∞ 제어기 설계," 한국전자공학회논문집, 제 33 권, B 편, 제 4 호, pp. 17~26.
- (12) Fan, Y. H., Chen, S. T. and Lee, A. C., 1992, "Active Control of an Asymmetrical Rigid Rotor Supported by Magnetic Bearings," J. of Franklin Ins., Vol. 329, No. 6, pp. 1153~1178.
- (7) Song, O. S., Kwon, H. D. and Librescu, L.,