

# 평행 Poiseuille, 평행 Couette, Blasius Flow의 준안정 해석

최 상 규\*·정 명 균\*

(2002년 7월 20일 접수, 2003년 1월 18일 심사완료)

## Pseudospectral Analysis of Plane Poiseuille, Plane Couette and Blasius Flow

Sangkyu Choi and Myung Kyoon Chung

**Key Words:** Stability(안정성), Pseudospectra(준안정), Plane Poiseuille, Plane Couette Flow, Blasius Flow

### Abstract

We investigate the spectra and the pseudospectra in plane Poiseuille flow, plane Couette flow and Blasius flow. At subcritical Reynolds number, the spectra are lied strictly inside the stable complex half-plane, but the pseudospectra are lied in the unstable half-plane, reflecting the large linear transient growth that certain perturbations may excite. It means that the smooth flows may become to turbulent even though all the eigenmodes decay monotonically. We found that pseudospectra is one reason that causes subcritical transition in plane Poiseuille flow and plane Couette flow and bypass transition in Blasius flow.

ε : 교란

### 기호설명

- α : 유동방향 파동수
- β : 스펙방향 파동수
- ω : 복소 진동수(= αC)
- C : 위상 속도
- κ :  $\kappa^2 = \alpha^2 + \beta^2$
- u<sub>i</sub> : 속도
- p : 압력
- x<sub>i</sub> : 좌표값
- η : 범선 와도
- Re : 레이놀즈 수

### 1. 서론

천이란 규칙적인 흐름인 층류로부터 혼돈적인 난류로의 변화를 말한다. 천이의 연구는 1883년 Reynolds<sup>(1)</sup>의 실험에 의해 층류가 난류로 되기 전에 천이과정이 있음을 보여 준 이후 시작되었다. 유동의 속도가 느릴때는 유동하는 유체입자들이 서로 거의 섞임 없이 흐르나 속도가 빨라지면 유동이 서로 섞이게 된다. 또한 Reynolds는 이러한 천이과정은 Reynolds 수라 하는 무차원 수가 일 정값 이상이 되어야만 일어난다는 사실도 보여 주었다.<sup>(1)</sup>

유동 제어의 측면에서 볼때 이러한 천이 현상을 이해하는 것은 매우 중요하다. 예를 들어 비행기 주변의 유동이 층류인 것이 바람직하나, 연소나 화학적 혼합, 혹은 유동의 박리를 방지하기

\* 한국과학기술원 기계공학과  
 E-mail : skchoi@kaist.ac.kr  
 TEL : (042)869-3054 FAX : (042)869-3095  
 † 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과

위해서는 유동이 난류인 것이 바람직하다. 이러한 유동의 제어를 위해서는 유동의 불안정성 및 천이의 정확한 이해가 필수적이다. 특히 최근에는 경계층 유동장에서의 불안정성과 천이현상에 대한 국제적인 관심이 매우 증폭되고 있다. 그 이유는 가스 터빈 엔진의 베인의 설계와 자동차, 비행기, 잠수함 등과 같은 수송기관의 외형 설계, 아음속과 초음속의 항공기 등의 설계와 밀접하게 연관되어 있기 때문이다. 예를 들면 터빈 날개의 경우 천이 길이와 코드의 약 80% 정도를 차지하고 있다. 이 천이영역동안에 마찰계수와 열전달 계수가 몇배로 증가하기 때문에, 열전달이나 압력손실 같은 물리량을 정확하게 구하기 위해서는 반드시 천이현상을 고려해야만 한다. 특히 외부유동장의 경우 천이 현상을 이해해야만 공기역학적 부하(양력, 항력 및 모멘트들)와 가열 조건을 정확히 예측할 수 있다. 예를 들면 천이 현상이 정확히 파악되면 유동 조작등의 방법을 통해서 천이를 지연시킴으로써 낮은 표면마찰저항을 얻게 되고, 이로 인해 수송기계의 에너지 변환 효율을 향상시킬 수 있다.

Reynolds(1883)의 실험 이후 지금까지 100여년이 넘도록 많은 사람들에 의하여 천이에 관한 연구가 이루어져왔다. 초기 Rayleigh(1880)<sup>(2)</sup>에 의해 비점성에 관한 이론이 개발되었다. 그러나 이러한 비점성에 관한 이론은 실제 유동인 점성유동에 관한 근사적으로써는 의미가 있으나 점성유동의 복잡한 현상은 설명할 수 없었다. Orr(1907)와 Sommerfeld(1908)에 의해서 점성유동에서의 선형 안정방정식이 정립되었다.<sup>(2)</sup> 이방정식은 4차의 상미분방정식으로 그해를 구하기가 매우 어려워 오랫동안 풀지 못하다가 Tollmien(1929)과 Schlichting(1930)에 의해서 독자적으로 그해가 구해졌다.<sup>(2)</sup> 이를 기념하여 이해를 Tollmien-Schlichting wave 또는 TS wave라 한다. 그러나 당시의 실험에 의하면 천이의 시작은 TS wave처럼 2차원적이지 않고 3차원적인 현상을 보였다. 대부분의 인위적 조작을 가하지 않는 실험에서는 유선방향의 streak이 형성된다. 이와 같은 실험에서 유선방향 속도의 크기만을 살펴보면 경사파동(oblique wave) 형상을 나타낸다. 따라서 실험을 중시하던 영미계열에서는 TS wave를 방정식의 해일뿐 실제 현상과는 관련이 없다고 생각했었다. 그러나 1940년 미국 표준국의 Dryden에 의해서 자유

유동난류강도가 0.02% 정도인 풍동이 고안되었고 이 풍동에서 Schubauer와 Skramstad (1948)가 진동하는 띠(vibrating ribbon)를 이용하여 TS wave에 의한 천이를 보여 주었다.<sup>(3)</sup> 이후 선형 안정성 이론은 천이를 연구하는데 중요한 도구가 되었다. 이 이론은 Lin(1945)<sup>(2)</sup> 등에 의해 보다 발전하게 되었다. 그러나 이러한 이론을 너무 믿었던 관계로 자유유동난류강도가 1% 이상인 경우의 3차원적인 천이현상이 무시되어오다가 Morkovin(1969)은 TS wave를 건너뛰는 'bypass' 천이가 있다고 제안하였다. 또한 Klebanoff는 천이에서 3차원 교란이 매우 중요함을 보여 주었다.<sup>(1)</sup>

천이는 크게 두 가지로 자연천이(natural transition)와 바이패스천이(bypass transition)로 나눌 수 있다. 나누는 기준은 자유유동난류강도가 1% 이하일 때는 자연천이이고 1% 초과일 때는 바이패스천이라 한다.

자연천이는 다음과 같은 단계를 거쳐 천이가 일어난다. 처음 전면(leading edge) 근처의 안정한 층류가 불안정한 2차원의 Tollmien-Schlichting wave를 발생하고 이것이 3차원의 불안정한 파동과 머리핀 와류(hairpin eddy)로 발전하고 국부적인 고도로 전단응력 영역에서 와류파괴(vortex breakdown)가 일어나고 이러한 와류파괴가 3차원 요동으로 계속적으로 발전하고 난류 spot이 국부적으로 강한 요동에서 발생하고 이러한 spot가 합쳐져 난류유동이 된다. 바이패스천이는 처음부터 3차원의 불안정한 파동이 발생하여 천이가 일어난다.

1950년대 이후 계산에 컴퓨터를 이용함으로써 천이에 관한 이론적 연구의 결과가 많이 나오게 되었다. 이러한 계산은 Jordinson(1970)<sup>(4)</sup> 등에 의해서 상당히 정립되었다. Orszag(1971)<sup>(5)</sup>는 Chebyshev 다항식을 이용한 정밀한 계산을 통하여 평면 Poiseuille인 경우 임계 Reynolds 수가 5772 임을 밝혀 내었다. 그러나 이러한 연구는 천이가 TS waves 즉 2차원적 현상에 의해서 시작된다고 가정한 것이다. 그러나 바이패스천이 등에서 보듯이 일반적인 천이는 3차원적인 현상이다. 천이가 2차원적 현상에 의해서 시작된다는 이론적 근거는 Squire(1933)<sup>(2)</sup>의 정리이다. 그러나 이는 2차원적 교란에 의해서 천이가 일어날 수 있음을 말할 뿐이지, 3차원적 교란에 의해서 천이가 일어날 수 없음을 말하는 것은 아니다. 실

제 일정 시간 안에 최대의 에너지를 얻을 수 있는 것은 3차원적 교란이며, 이러한 교란에 의한 천이가 2차원적 교란에 의한 천이보다 천이에 도달하는데 에너지가 적게 든다.

이러한 3차원적 교란에 의해 천이가 일어날 수 있음을 밝힌 이론은 처음 Ellingsen과 Palm (1975)<sup>(6)</sup>이 비점성유동에서 유동방향의 3차원 교란이 시간에 따라 선형적으로 증가함을 밝힌 논문이다. 이후 Landahl(1980)<sup>(7)</sup>은 유동방향의 적분 운동에너지는 벽면의 직각 방향의 운동량이 0이 아니라면 시간에 따라 선형적으로 증가함을 밝혔다. 또한 Hultgren과 Gustavsson(1981)<sup>(8)</sup>은 점성경계층유동에서 초기의 늘어진 구조 (elongated structure)의 대수적 성장은 Orr-Sommerfeld식의 연속 스펙트럼과 관련이 있음을 밝혔다.

한편 실험에서는 Carlson(1982)<sup>(9)</sup> 등은 plane Poiseuille flow의 임계 Reynolds 수는 1000 근방임을 보였다. 이는 선형 안정성 이론에 의한 5772와 큰 차이가 있다. 실험과 이론이 불일치하는 대표적 예에는 plane Couette flow와 pipe flow (Hagen-Poiseuille flow)가 있다. 이들은 선형안정성 이론에 따르면 항상 안정하다. 그러나 실험에 의하면 임계 Reynolds 수는 각각 350, 2000 부근이다.

위에서 보듯이 전통적인 선형안정성이론과 실험은 잘 일치하지 않는다. 그러나 선형의 효과는 천이에서 중심적인 역할을 하게 된다. 이러한 모순은 "pseudospectra"의 개념을 이용하여 Trefethen(1993)<sup>(10)</sup>

등이 해결하였다. Pseudospectra의 개념은 고유치 문제에 일종의 민감도 문제를 고려하는 것이다. 예를 들면  $Aq = \lambda q$ 에서 행렬  $A$ 에 임의의 작은 교란  $\epsilon$ 이 들어 갔을 때 고유치  $\lambda$ 가 어떻게 변화하는지를 살펴보는 것이다. 유체의 안정성에서 고유치만을 고려하게 되면 유체의 과도상태(transient)를 보지 못하게 된다. 그러나 고유벡터가 서로 비직교한(nonnormal) 경우 과도상태에서 큰 성장을 보일 수 있다. Fig. 1을 보면 비직교한 두 벡터가 모두 시간에 따라 감소해도 그 합 벡터는 증가할 수 있음을 보여준다. Navier-Stokes식 또한 직교하지 않기 때문에 과도상태의 성장 여부를 살펴보아야 하고, 이를 위해서는 pseudospectra 해석이 필요하게 된다.

위에서 말한 것과 같이 pseudospectra의 개념을 유체의 안정성 해석에 처음 적용한 사람은 Trefethen et al.(1993)<sup>(10)</sup>이다. 그들은 평행 Poiseuille와 평행 Couette 유동의 안정성 해석에 pseudospectra 해석이 필요함을 말했다. 그리고 Reddy et al.(1993)<sup>(11)</sup> 등은 평행 Poiseuille 유동의 고유치가 교란에 매우 민감함을 보였다. 또한 Trefethen et al.(1999)<sup>(12)</sup> 등은 pipe Poiseuille에 대해서도 pseudospectra 해석을 하였다.

이에 우리는 pseudospectra 개념을 이용하여 천이 연구의 대표적인 유동 유형인, 평행 Poiseuille, 평행 Couette, Blasius 유동의 안정성 해석에 적용해 보고자 한다.

## 2. 연구방법

### 2.1 점성선형안정식

비압축성 유동에서 Navier-Stokes 식과 연속방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

여기서  $u_i$ 는 속도 성분,  $p$ 는 압력,  $x_i$ 는 공간 좌표계이다. 유동방향을  $x_1$  또는  $x$ , 그리고 그 속도 성분을  $u_1$  또는  $u$ 라 표시하고, 벽면에 직각 방향을  $x_2$  또는  $y$ , 그 속도 성분을  $u_2$  또는  $v$ 로 표시하고, 스핀 방향을  $x_3$  또는  $z$ , 그 속도 성분을  $u_3$  또는  $w$ 로 표시하도록 하자.

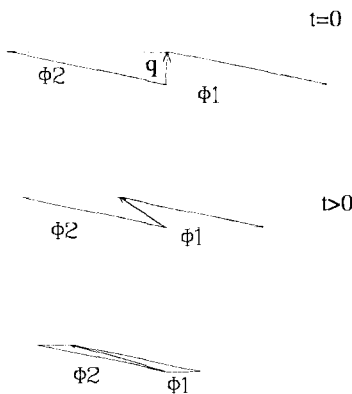


Fig. 1 Example of the transient growth for the non-normal vectors

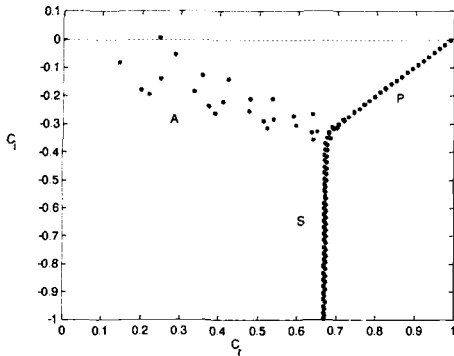


Fig. 2 Orr-Sommerfeld spectrum of plane Poiseuille flow at  $Re=10000$ ,  $\alpha=1$  and  $\beta=0$

교란 방정식은 기본상태  $(U_i, P)$ 와 가진 상태  $(U_i + u'_i, P + p')$ 의 둘 모두 Navier-Stokes 식을 만족시키는 식을 고려함으로써 구할 수 있다. 교란 상태의 식에서 기본상태의 식을 빼고 편의상 교란량을 표시하던 '(prime)을 생략하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_i - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

우리는 평행유동에서 미소교란을 위한 식을 고려할 것이다. 따라서 평균 유동장을 다음과 같이  $U_i = U(y) \delta_{1i}$ 로 잡자.

$v$ 의 교란 식은 다음과 같다.

$$\left[ \left( -\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 - U' \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{Re} \nabla^4 \right] v = 0 \quad (5)$$

3차원 유동장을 기술하기 위해서는 두번째 식으로 벽면에 직각인 와도를 구하는 것이 편리하다.

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (6)$$

여기서  $\eta$ 는 다음을 만족시킨다.

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \right] \eta = -U \frac{\partial v}{\partial z} \quad (7)$$

경계조건은 다음과 같다.

$$v = v' = \eta = 0 \text{ (벽, far field)}$$

여기서 교란을 다음과 같이 가정하자.

$$v(x, y, z, t) = \tilde{v}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad (8)$$

$$\eta(x, y, z, t) = \tilde{\eta}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad (9)$$

$\alpha, \beta$ 는 각각 유동방향과 횡방향(spanwise)의 파동수(wave number)이고  $\omega$ 는 주파수를 나타낸다. (8)과 (9) 식을 (5)과 (7)에 대입하면 (이는 수평방향으로 Fourier 변환을 취하는 것과 같다)  $\tilde{v}$ 와  $\tilde{\eta}$ 에 대하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\left[ (-i\omega + i\alpha U)(D^2 - k^2) - i\alpha U' - \frac{1}{Re}(D^2 - k^2)^2 \right] \tilde{v} = 0 \quad (10)$$

$$\left[ (-i\omega + i\alpha U) - \frac{1}{Re}(D^2 - k^2) \right] \tilde{\eta} = -i\beta U \tilde{v} \quad (11)$$

여기서  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ 이다. 또한  $D = \frac{d}{dy}$ 이다. 식 (10)은 Orr-Sommerfeld식이라 하며 식 (11)은 Squire 식이라 한다.

다음과 같은 벡터량을 도입하자.

$$\begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix}$$

이를 이용하여 Orr-Sommerfeld 식과 Squire 식을 행렬식으로 만들면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} -i\omega \begin{bmatrix} k^2 - D^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} L_{OS} & 0 \\ i\beta U & L_{SQ} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = 0 \quad (12)$$

여기서  $L_{OS}$ 와  $L_{SQ}$ 는 다음과 같다.

$$L_{OS} = i\alpha U(k^2 - D^2) + i\alpha U' + \frac{1}{Re}(k^2 - D^2)^2 \quad (13)$$

$$L_{SQ} = i\alpha U + \frac{1}{Re}(k^2 - D^2) \quad (14)$$

고유치 식 (12)는 다음과 같이 될 수 있다.

$$\tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$L\tilde{q} = i\omega M\tilde{q} \quad (16)$$

$$L_1\tilde{q} = M^{-1}L\tilde{q} = i\omega\tilde{q} \quad (17)$$

여기서  $M, L$ 은 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} k^2 - D^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

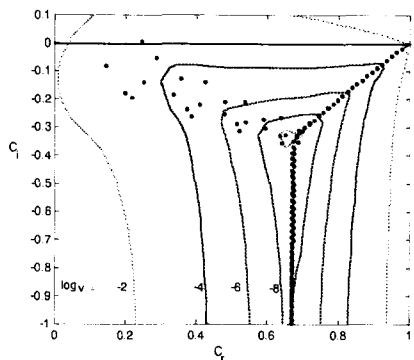


Fig. 3 Resolvent norm contours and spectrum of plane Poiseuille flow at Re=10000,  $\alpha=1$  and  $\beta=0$

$$L = \begin{bmatrix} L_{OS} & 0 \\ i\beta U & L_{SQ} \end{bmatrix} \quad (19)$$

2.2 Pseudospectra 정의

Orr-Sommerfeld식과 Squire 식의 고유값을 수치적으로 구할 때, 안정방정식에서 작은 교란에 대한 그들의 민감도 문제를 고려할 필요가 있다. 이러한 교란의 대표적 두 가지 원인은 연속적인 방정식을 차분화 함으로써 생기는 것과 컴퓨터 계산의 유한성 때문에 생기는 것이다.

이전의 연구에 의하면 Orr-Sommerfeld spectrum은 작은 교란에 매우 민감함이 밝혀졌다. 이러한 민감성은 비직교한 eigenfunction 때문이다. 비직교한 eigenfunction을 가지고 있는 계의 특성은 모든 고유값이 안정하더라도 과도상태(transient)에서 큰 성장을 할 수 있다. 이러한 가능성을 살펴볼 수 있는 방법이 pseudospectra 해석이다.

Pseudospectra의 정의는 다음과 같다.

정의 1. 만약  $z$ 가  $\tilde{A} = A + E$ 의 고유치라면  $z$ 는  $A$ 의  $\epsilon$ -pseudo-eigenvalue라 한다. 여기서  $\|E\| \leq \epsilon$ 이다.

정의 2. 만약  $z$ 가  $\|(zI - A)^{-1}\| \geq \epsilon^{-1}$ 을 만족한다면,  $z$ 는  $A$ 의  $\epsilon$ -pseudo-eigenvalue이다

정의 1과 정의 2는 같은 것이다. (Reddy et al. (1993))

본 논문에서 우리는 유동의 pseudospectra를 살펴보기 위하여 resolvent norm의 등고선 분포(contour)을 구하였다. resolvent norm이란 pseudospectra 정의2와 같은 것으로 일종의 변환으

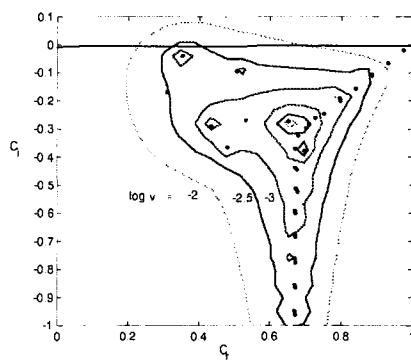


Fig. 4 Resolvent norm contours and spectrum of plane Poiseuille flow at Re=1000,  $\alpha=1$  and  $\beta=0$

로써 어떠한 입력에 대하여 출력이 어떻게 되는지를 살펴보는 방법이다. 즉 우리의 연구에서 유동에 임의의 작은 교란이 있을 때 그 결과가 어떻게 나타나는지를 살펴볼 수 있다.

3. 계산결과

Fig. 2는 Re=10000,  $\alpha=1$ ,  $\beta=0$  일 때의 plane Poiseuille flow의 Orr-Sommerfeld Spectrum을 보여주는 그림이다. 좌표축으로 위상속도(phase velocity)를 사용하였다. 우리는 교란을 식 (8)과 같이 가정하였었다.

$$v(x, y, z, t) = \hat{v}(y) e^{i(ax + \beta z - \omega t)} \quad (8)$$

여기서  $\omega = aC$ .  $C$ 는 위상속도이다. 따라서 시간에 따른 안정성을 살펴보는 경우  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 실수이고,  $\omega$ 는 복소수 즉  $C$ 는 복소수이다.

$$C = C_r + iC_i \quad (20)$$

식 (25)를 식 (13)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$v(x, y, z, t) = \hat{v}(y) e^{i(ax + \beta z - a(C_r + iC_i)t)} = \hat{v}(y) e^{i(ax + \beta z - aC_r t)} e^{-aC_i t} \quad (21)$$

따라서  $\alpha > 0$ 인 경우  $C_i > 0$  이면 시간에 따라 교란이 계속 성장함으로 불안정하게 된다. Fig. 2에서도 한점이  $C_i > 0$  인 것을 볼 수 있다. 이는 Re=10000이 임계 Reynolds 수를 넘었기 때문이다. 그리고 Fig. 3을 살펴보면 위상속도가 전체적으로 Y형으로 분포되어 있다. 여기서 그림에 표시되어 있는 각 가지를 A, P, S라고 부른다. (Craick 1978)<sup>(13)</sup> A 가지는 벽면 근처에서 큰

변화를 가지는 spectrum이고 P는 유동의 중앙부근에서 최대값을 가지는 spectrum이다. 또한 S는  $C_r$ 의 절대값이 다른 가지보다 큼으로 시간에 따라 보다 빨리 감소한다. Fig. 3은 Fig. 2의 계산 조건과 같은 경우에 pseudospectra 정의 2를 이용하여 resolvent norm contours를 그린 것이다. 이는 얼마만큼의 작은 가진(加振)을 주었을 때 spectrum이 변할 수 있는 범위를 나타내는 것이다. 각 contour의 값은 resolvent norm의 상용 log 값이다. 여기서 살펴보면 A, P, S 가지가 만나는 곳이 교란에 가장 민감하여, 작은 교란의 경우에도 쉽게 변하게 됨을 볼 수 있다. 이는 앞서의 다른 사람들의 계산과 일치한다. A 가지가 pseudospectra 해석에서도 다른 가지에 비해 일찍 불안정해 짐을 볼 수 있다.

Fig. 4는  $Re=1000$ ,  $\alpha=1$ ,  $\beta=0$ 인 경우의 resolvent norm contour이다. 그림에서 볼 수 있듯이 모든 spectrum은 안정된 영역에 있다. 그러나 pseudospectra 즉 resolvent norm의 contour를 살펴보면 resolvent norm의 log값이 -2, -2.5인 두 경우 contour가  $C_r > 0$ 의 영역까지 침투하고 있으며, 이것으로부터  $Re=1000$ 의 경우에도 유동이 불안정해 질 수 있음을 볼 수 있다. 이는 실험 (Carlson 1982)<sup>(9)</sup>에 의한 임계 Reynolds 수 1000이기 때문이다.

Fig. 5는  $Re=1000$ ,  $\alpha=1$ ,  $\beta=1$ 인 경우 plane Couette flow의 Orr-Sommerfeld spectrum과 resolvent norm contour이다. spectrum의 전체적인 모양은 plane Poiseuille flow와 비슷하다. 모든 spectrum은 안정된 영역에 위치하고 있다. 그러나

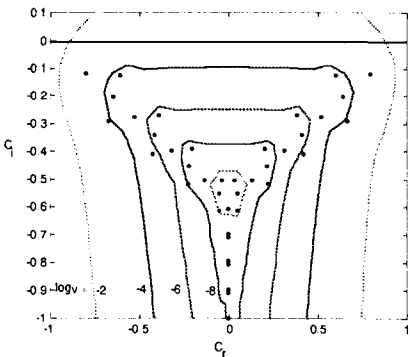


Fig. 5 Resolvent norm contours and spectrum of plane Couette flow at  $Re=1000$ ,  $\alpha=1$  and  $\beta=1$

같은 계산 조건의 pseudospectra인 resolvent norm의 교란이 클 경우를 살펴보면 불안정해 질 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 6은  $Re=350$ ,  $\alpha=1$ ,  $\beta=0$ 인 plane Couette flow의 resolvent norm contour이다. 모든 spectrum은 안정된 영역에 위치하고 있다. 그러나 pseudospectra 해석 그림을 보면 약하나마 불안정화 될 수 있음을 알 수 있다. 이는 Tillmark (1992)<sup>(14)</sup>의 실험에 의한 plane Couette flow의 임계 Reynolds 수가 350인 것과 일치한다.

Fig. 7는  $Re=316$ ,  $\alpha=0.52$ ,  $\beta=0$ 인 Blasius flow의 spectrum과 resolvent norm contour이다. 이를 보면 앞서의 두 경우 plane Poiseuille flow와 plane Couette flow와 달리  $C_r=1$ 인 continuous spectrum을 볼 수 있다. 이는 Grosch와 Salwen(1978)<sup>(15)</sup>이 제안한 것과 일치한다. 모든 spectrum은 안정된 영역에 존재한다. 그러나

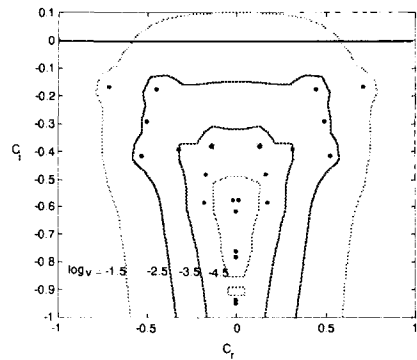


Fig. 6 Resolvent norm contours and spectrum of plane Couette flow at  $Re=350$ ,  $\alpha=1$  and  $\beta=0$

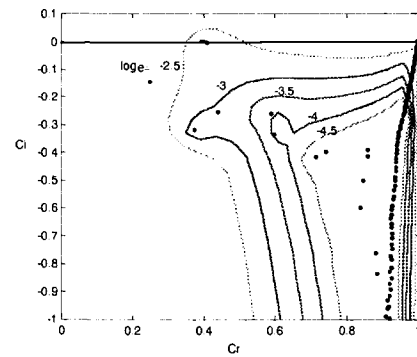


Fig. 7 Resolvent norm contours and spectrum of Blasius flow at  $Re=316$ ,  $\alpha=0.52$  and  $\beta=0$

pseudospectra 해석에서는  $Re=316$  정도의 낮은 Reynolds 수에서도 유동이 불안정해질 가능성을 볼 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구를 통하여 기존의 연구자들이 제안한 방법을 저임계레이놀즈수(subcritical Reynolds number. 이론적 천이가 일어난다고 예상하는 레이놀즈수보다 낮은 수)에 적용하여, spectra 해석으로는 안정된 조건이라 하더라도 pseudospectra 해석(Trefethen et al. 1993)으로 살펴보면 불안정해질 수 있음을 볼 수 있었다. 이는 기존의 실험에서 천이가 일어나는 레이놀즈수가 이론적으로 예측했던 레이놀즈수 보다 낮았던 모순을 해결해 주었다. Navier-Stokes식 자체가 교란에 매우 민감하고(Reddy et al. 1993) 이러한 교란에 민감한 반응이 초기의 과도 상태에서 교란을 크게 증폭시키고 이렇게 증폭된 교란이 지속적으로 유지되어 천이가 일어나게 된 것이다(Trefethen et al. 1993). 또한 pseudospectra 해석을 Blasius flow에도 처음으로 적용하여 바이패스 천이의 한 원인이 pseudospectra임을 알았다.

#### 후 기

본 연구는 국가지정연구실(NC21531)의 지원을 받아 수행되었습니다.

#### 참고문헌

- (1) White, F. M., 1991. "Viscous Fluid Flow." McGraw-Hill, 2nd ed.
- (2) Drazin, P. G. and Reid, W. H., 1981. "Hydrodynamic Stability." Cambridge university press.
- (3) Schubauer, G. B. and Skramstad, H. K., 1948. "Laminar-Boundary-Layer Oscillations and Transition on a Flat Plate." NACA Rep.
- (4) Jordinson, R., 1970. "The Flat Plate Boundary Layer. Part 1. Numerical Integration of the Orr-Sommerfeld Equation." *J. Fluid Mech.*, Vol. 43. part. 4, pp. 801~811.
- (5) Orszag, S. A., 1971. "Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld Stability Equation." *J. Fluid Mech.*, Vol. 50. part 4, pp. 689~703.
- (6) Ellingsen, T., and Palm, E., 1975. "Stability of Linear Flow." *The Physics of Fluids*, Vol. 18, No. 4, 487~488.
- (7) Landahl, M. T., 1980. "A Note on an Algebraic Instability of Inviscid Parallel Shear Flow." *J. Fluid Mech.*, Vol. 98. part 2, pp. 243~251.
- (8) Hultgren, L. S., and Gustavsson, L. H., 1981. "Algebraic Growth of Disturbances in a Laminar Boundary Layer." *Phys. Fluids*, 24(6), 1000~1004.
- (9) Carlson, D., Widnall, S. E., and Pecters, M. F., 1982. "A Flow-Visualization Study of Transition in Plane Poiseuille Flow." *J. Fluid Mech.*, Vol. 121, 487~505.
- (10) Trefethen, M. F., Trefethen, A. E., Reddy, S. C., and Driscoll, T. A., 1993. "Hydrodynamic Stability Without Eigenvalues." *Science*, Vol. 261, 578~584.
- (11) Reddy, S. C., Schmid, P. J., and Henningson, D. S., 1993 "Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld Operator." *SIAM J. APPL. MATH.*, Vol. 53, No. 1, 15~47.
- (12) Trefethen, A. E., Trefethen, L. N., and Schmid, P. J., 1999. "Spectra and Pseudospectra for Pipe Poiseuille Flow." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1926, 413~420.
- (13) Schmid, P. J. and Henningson, D. S., 2001, "Stability and Transition in Shear Flows." Springer.
- (14) Tillmark, N., and Alfredsson, P. H., 1992. "Experiments on Transition in Plane Couette Flow" *J. Fluid Mech.*, Vol. 235, 89~102.
- (15) Grosch, C. E., and Salwen, H., 1978, "The Continuous Spectrum of the Orr-Sommerfeld Equation. Part 1. The Spectrum and the Eigenfunctions." *J. Fluid Mech.*, Vol. 87, part 1, pp. 33~54.