

초청논문

## 곡면의 tessellation과 regular maps

곽진호

요약. 본 요약논문에서는 단순연결된 리만곡면들의 isometry군, 그군의 이산부분군을 이용한 리만곡면들의 tessellation 그리고 regular map에 대해 소개하고 그 응용과 상호연관성들에 대해 살펴본다. 그리고, 여러가지 관점에서의 regular map의 분류에 대해 소개하고, 최근까지 연구되어진 바에 대해 정리해 보고자 한다.

### 제 1 절 대칭성: Symmetry

자연현상에서 수없이 나타나는 대칭성의 성질은 수학에서 다양한 방법으로 표현된다. 군론에서는 대칭군을 이용하여, 기하학적인 다양체에서는 diffeomorphism 군이나, homeomorphism 군에 의하여 대칭성을 조사할 수 있다. 그래프 등 수학적 구조가 주어진 공간에서는 그 주어진 구조를 유지하는 automorphism 군이 얼마나 커지는가에 따라서 그의 대칭성이 나타난다. 예를들면, 정사면체 보다는 2차원 구가 대칭성이 좋다고 말할 수 있고, 이때, 이들의 automorphism 군은 각각 교대군  $A_4$ 와  $SO(3)$ 가 되어 전자는 유한군이지만 후자는 무한군임을 알 수 있다. 대칭성을 표현하는 다른 방법으로 (regular) covering을 들 수 있으며 본 논문에서는 다루지 않기로 한다.

우선 대칭성을 보이는 몇가지 예를 들어 보자.

보기 1.1. (1) **Platonic solids:** 정다면체에는 정4면체(tetrahedron), 정6면체(cube), 정8면체(octahedron), 정12면체(dodecahedron), 정20면체(icosahedron)가 있으며 이외의 정다면체는 존재하지 않는다는 것은 Euler-Poincaré의 정리 “꼭지점의 수 - 변의 수 + 영역의 수 =  $2 - 2g$ ,

---

Received November 25, 2002.

2000 Mathematics Subject Classification: 05B45, 05C10, 05C30, 51M20.

Key words and phrases: Riemann surfaces, tessellation, isometry group, regular map.

Supported by Com<sup>2</sup>MaC-KOSEF in Korea.

$g =$  곡면의 genus"에 의해서 밝혀질 수 있다. 각 정다면체의 대칭군은 정4면체는 교대군  $A_4$ , 정6면체와 정8면체는 대칭군  $S_4$ , 정12면체와 정20면체는 교대군  $A_5$ 이다.

(2) **Methane  $CH_4$ 와 정4면체:** 일반적으로 분자의 구조들은 좋은 대칭성을 가진 형태로 나타난다. 예를 들어, Paraffin series  $C_kH_{2k+2}$ 의 초기 분자인 Methane  $CH_4$ 는 정4면체의 중심에 carbon C, 4개의 각 꼭지점에 hydrogen이 걸쳐 있는 형태로 나타난다. 그림 1 참조.

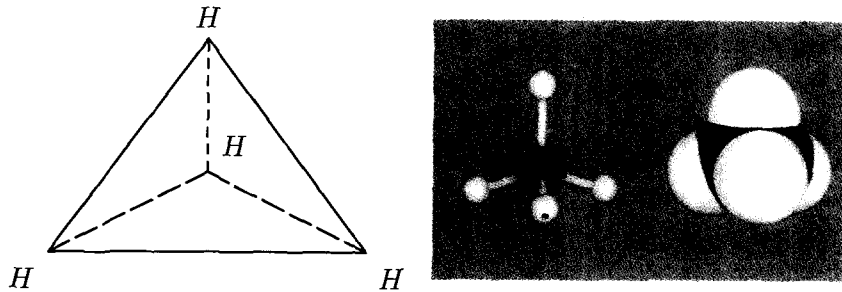


그림 1. Methane  $CH_4$ 와 정4면체

(3) **Diamond와 정6면체:** Diamond는 정사면체 모양의 구조에서 꼭지점에 대응되는 각각의 탄소원자는 또 다른 4개의 탄소 원자와 인접되어 있으며, 정6면체내에서의 결합구조는 그림 2와 같다. 여기에서는 탄소 원자의 배열이나 결합 양식이 정규적이라고 할 수는 없다. 이와 유사하게, 흑연은 탄소가 육각형의 그물 모양으로 배열한 탄소 원자의 평면이 겹친 거대 분자이다.

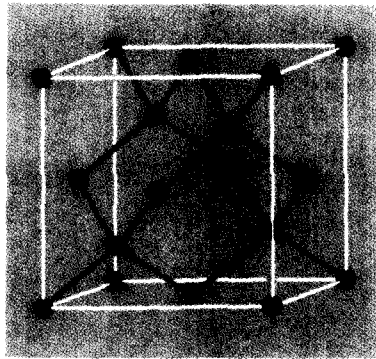


그림 2. Diamond와 정6면체

(4) **Fullerene  $C_{60}$ 와 truncated icosahedron (soccer ball):** 1985년, 영국의 Harold Kroto 박사와 미국의 Richard E. Smalley 박사는 헬륨 가스 안에서 흑연에 레이저광을 쬐이는 실험을 하였다. 이때 발생 하는 탄소 클러스터의 질량을 측정하였는데, 질량수 720에 해당하는 부분에서 현저한 피크가 나타났다. 질량수 720이란, 탄소의 원자량은 약 12이므로, 탄소 원자가 60개 모여 생긴 분자일 가능성이 높다. 이것이 바로  $C_{60}$ 이었다.  $C_{60}$ 을 발견한 후에도,  $C_{60}$ 의 형태를 밝히는 데는 시간이 걸렸다.

그들은 미국의 건축가 Buckminster Fuller(1895-1983)가 고안한 축구공 모양의 돔에 착안하여 1991년에  $C_{60}$ 의 모델을 실험으로 확인하였다. (그림 3(왼쪽)참조) 이리하여,  $C_{60}$ 을 비롯한 일련의 탄소 분자를 Fullerene, 특히  $C_{60}$ 은 Buckyball이라고 부른다. 이의 연구를 통하여, 1996년, Harold Kroto 박사와 Richard E. Smalley 박사, 그리고 Robert F. Curl Jr.는 노벨 화학상을 받았다.

그후에,  $C_{60}$  이외에도  $C_{70}$ 이나  $C_{76}$ ,  $C_{82}$ ,  $C_{84}$  등 커다란 크기를 가진 Fullerene이 발견되었으며, 이들의 구조 연구는 아직도 많은 관심의 대상이다.

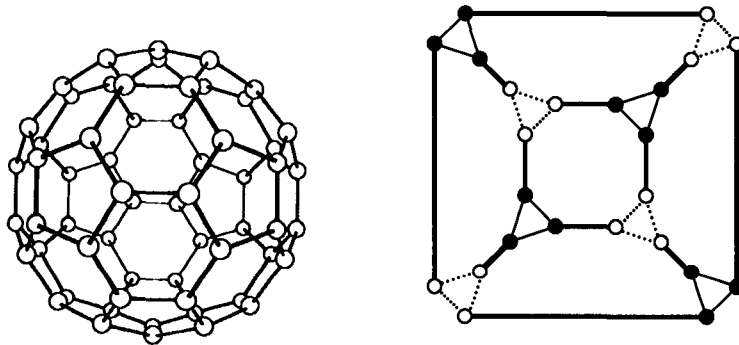


그림 3.  $C_{60}$ 와 truncated icosahedron; cube-connected cycle  $CCC_3$

(5) **Cube-connected cycle  $CCC_3$ 와 truncated cube:** Parallel computing을 위한 network design인 interconnection network에는 hypercube, butterfly, wrapped butterfly, cube-connected cycle, shuffle-exchange, de Bruijn 등과 Cayley 그래프로 나타나는 다양한 model이 있다. 이들은 대체로 좋은 대칭성을 가지고 있어서 다양한 수학적 표현이 가능하다. 여기서는 3차원 cube-connected cycle  $CCC_3$ 만 예시해 보기로 하자. 그림 3(오른쪽) 참조.

## 제 2 절 Riemann 곡면

**Riemann 곡면**이란 국소적으로 복소 좌표계를 가지는 위상곡면으로서 공통부분을 가지는 두 국소 좌표계에서의 좌표변환함수가 conformal이 되는 경우를 말한다. 이러한 Riemann 곡면의 예로는 (1) 복소 평면, 즉, Euclid 평면  $\mathbb{C}$ , (2) Riemann 구면 (혹은, Spherical 평면, complex projective line이라고도 함)  $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , (3) Hyperbolic 평면  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}$ 가 있다. 사실 이들은 simply connected인 Riemann 곡면들이다.

우선 이들 Riemann 곡면  $S$ 의 orientation-preserving isometry 들이 이루는 group  $\text{Isom}^+(S)$ 를 살펴보자.

- (1) **Euclid 평면에서:**  $\text{Isom}^+(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \rtimes S^1$ , translation 군  $\mathbb{C}$ 와 rotation 군  $S^1$ 의 semi-direct product 이다(direct product가 아님에 주의하라). 여기서 임의의 원소  $(\mathbf{v}, \theta) \in \mathbb{C} \rtimes S^1$ 에 대하여,

$$(\mathbf{v}, \theta)(z) = e^{i\theta}z + \mathbf{v},$$

$$(\mathbf{v}_1, \theta_1)(\mathbf{v}_2, \theta_2) = (\mathbf{v}_1 + e^{i\theta_1}\mathbf{v}_2, \theta_1 + \theta_2).$$

$\text{Isom}^+(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \rtimes S^1$ 는 Lie군이며, translation과 rotation에 의하여 생성되는 군이다(기본적인 isometry는 rotation, translation, reflection, glide reflection이 있다). 또한, Lie군  $\text{Isom}^+(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \rtimes S^1$ 의 universal covering은  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^1$ 이다. 이때,  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^1$ 의 군 구조는  $(\mathbf{v}, \theta) \cdot (\mathbf{w}, \vartheta) = (\mathbf{v} + e^{i\theta}\mathbf{w}, \theta + \vartheta)$ 로 주어진다.

- (2) **Spherical 평면에서:**  $\text{Isom}^+(P^1(\mathbb{C})) = \text{SO}(3) = \text{Special orthogonal group}$ ; 실수계  $\mathbb{R}$ 에서 determinants가 1인  $3 \times 3$  orthogonal matrices들의 군이다.  $\text{Isom}^+(P^1(\mathbb{C})) = \text{SO}(3)$ 의 universal covering은  $\text{SU}(2) = \text{Sp}(1) = \mathbb{S}^3$ 이다.
- (3) **Hyperbolic 평면에서:**  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{Projective special linear group}$ ; 실수계  $\mathbb{R}$ 에서 계수를 가지는 linear fractional transformations (또는, Möbius transformation이라고 함)의 군이다. 즉,  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  with  $ad - bc = 1$ 들의 군이다.

Lie 군  $\text{SO}(3)$ 과 사형공간  $\text{RP}(3)$ 는 위상적으로 동형이고,  $\text{SU}(2) = \text{Sp}(1) = \mathbb{S}^3$ 가  $\text{SO}(3)$ 의 canonical double covering이 된다. 또한,  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 은  $\text{SU}(1, 1)/\pm 1$ 과 위상동형이고 이는 solid torus의 interior와 같다.

## 제 3 절 Tessellations (또는 tilings)

앞절에서 다룬 Riemann 곡면인 Euclid 평면, Spherical 평면, Hyperbolic 평면에서의 isometry군들은 자연스럽게 해당되는 각 평면에 길이를 보

존하는 작용을 하게 된다. 이때, isometry군  $\text{Isom}(\cdot)$ 의 부분군  $\Gamma$ 가 다음을 만족할 때 이를 **이산부분군(discrete subgroup)**이라고 한다.

- (i)  $\Gamma$ 는 properly discontinuously 해당평면에 작용한다. (그래서 각 점의 orbit은 discrete하다) (Not necessarily freely)
- (ii) orbit 공간, 즉, quotient공간은 compact이다.

그리고,  $\mathbb{C}$ 의 (혹은,  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{P}^2$ 의) 부분집합  $T$ 에 대하여 이의 대칭군이 이산부분군이 될 때, 집합  $T$ 를 해당 평면의 **tessellation**(혹은, **tiling**)이라고 부른다. 일반적으로 같은 대칭군을 가지는 tessellation은 여러가지가 존재한다. Riemann 평면상의 다양한 tessellation을 찾는 것은 아주 흥미로운 일이다.

**(1) Euclid 평면에서:** Euclid 평면  $\mathbb{C}$ 의 (orientation-preserving or not) isometry 들이 이루는 이산부분군을 **일반화 된 crystallographic** 군이라고 부르고, orientation-preserving isometry 들이 이루는 이산부분군을 **crystallographic** 군이라고 부른다.

정리 3.1. *Euclid 평면에서는 17개의 일반화 된 crystallographic 군이 존재한다. 이들 중 단지 5개가 orientation-preserving하는 crystallographic 군이다.*

PROOF. (Sketch;상세한 내용은 [1]참조) 임의의 crystallographic 군  $\Gamma$ 에 대하여, 원점  $O$ 의 stabilizer는 rotation  $\theta = 0, \pi, \pi/2, \pi/3, 2\pi/3$ 와 (대응되는 군의 order는 1,2,4,6,3임), orientation-reserving인 reflection을 가질수 있다. 그리고 원점  $O$ 의 orbit  $\Gamma(O)$ (lattice 라 부름)는  $p$ =primitive,  $c$ =central,  $m$ =mirror,  $g$ =glide의 4가지 모양이 있다. 이들의 가능성을 도식화 하면 그림 4와 같다. ( $m$ =mirror와  $g$ =glide는 orientation-reserving이다.) 그림 4에서 기호  $\circ, \blacktriangle, \square, \bullet$ 는 표시된 점의 point stabilizer가 order 2,3,4,6인 순환군이 됨을 표시한다. 그리고 mirror=reflection은 실선, glide는 점선으로 표시되어 있다. □

보기 3.2. (1) Euclid 평면에서의 정다각형에 의한 tessellation (regular tessellation이라고 부름): Euclid 평면을 tessellate 할 수 있는 정다각형은 단지 세가지, 3각형, 4각형, 6각형이 있다. 이들이 이루는 tessellation은 다음과 같다. (그림 5, 6, 7 참조)

(2) 일반적인 tessellation (irregular tessellation): 아래의 그림 8 외에도 보다 많은 예제들을 참고문헌 [1]이나 <http://www.coolmath.com/tesspag2.htm>에서 찾을 수 있다.

**(2) Spherical 평면에서:**  $\text{Isom}^+(P^1(\mathbb{C})) = \text{SO}(3)$ 의 유한 부분군은 cyclic  $\mathbb{Z}_n$ , dihedral  $D_n = \Delta(n22)$  of order  $2n$ , tetrahedral  $\Delta(332) \simeq A_4$ , octahedral  $\Delta(432) \simeq S_4$ , icosahedral  $\Delta(532) \simeq A_5$ 가 있다. 이들에 대응되

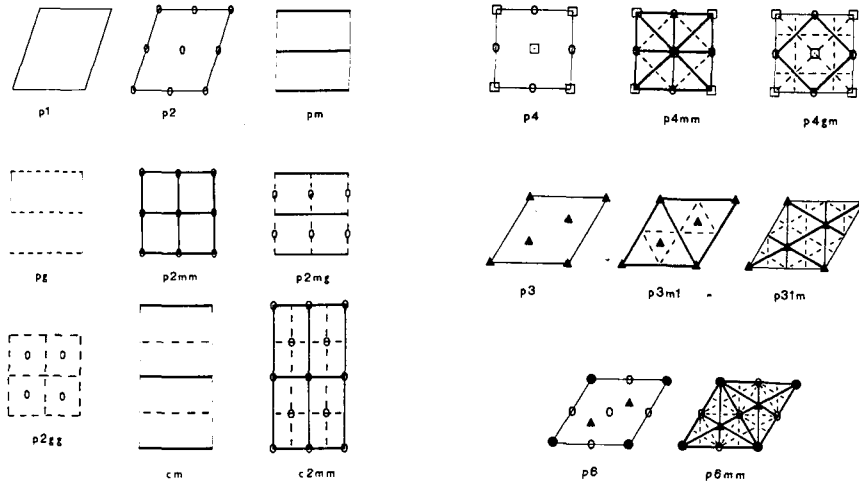


그림 4. (일반화 된) crystallographic 군

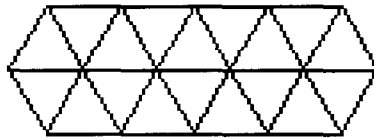


그림 5. 3각형에 의한 tessellation

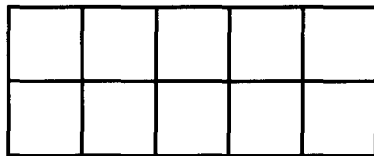


그림 6. 4각형에 의한 tessellation

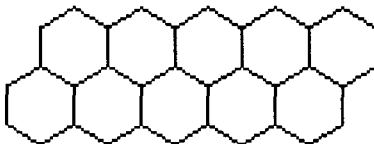


그림 7. 6각형에 의한 tessellation

는 tessellation은 각각  $n$ -pyramid,  $n$ -bipyramid, tetrahedron, cube 또

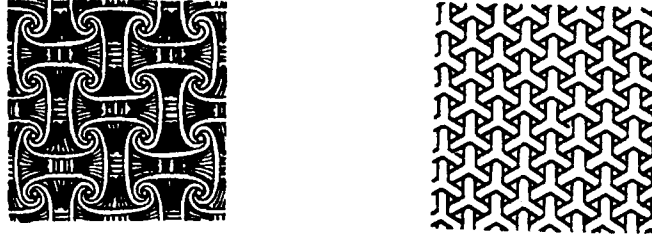


그림 8. Euclid 평면에서 irregular tessellation

는 octahedron, dodecahedron 또는 icosahedron이 있다. 여기서,

$$\Delta(lmn) = \langle R, S, T \mid R^n = S^m = T^\ell = RST = 1 \rangle.$$

참고:  $p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ 는 2-fold universal covering을 이루며  $\mathbb{S}^3 = \text{Sp}(1)$ (quaternion군)의 유한 부분군은  $p^{-1}(\text{SO}(3)$ 의 유한 부분군)으로 나타난다. 일반적으로,  $p^{-1}(\Delta(lmn))$ 를 binary군이라고 부르고, 이는

$$p^{-1}(\Delta(lmn)) = \langle R, S, T \mid R^n = S^m = T^\ell = RST \rangle$$

로 표현된다.

보기 3.3. (1) Spherical 평면의 정다각형에 의한 tessellation (regular tessellation): Platonic solid들이다.

(2) 일반적인 tessellation (irregular tessellation): 그림 9 참조

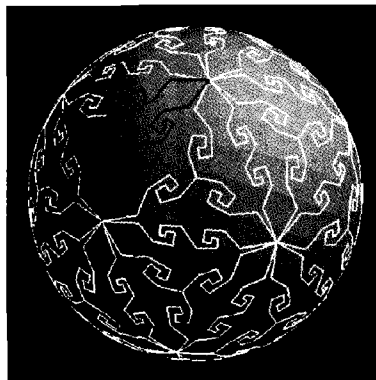


그림 9. Icosahedral 대칭성을 가지는 Spherical 평면의 tessellation (60 tiles로 구성)

(3) **Hyperbolic 평면에서:**  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Hyperbolic 평면에서의 이산 부분군의 구조나, 이에 따른 Hyperbolic 평면의 tessellation은 앞의 두 경우보다 훨씬 다양하고 복잡하다. 이의 분류는 아직도 미해결인 흥미로운 문제이며 많은 타 수학 분야와 관련하여 연구되고 있다. 또한, Hyperbolic 평면에서의 대칭군  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ 는 3차원 사영공간  $\text{RP}(3)$ 에 faithfully 그리고 추이적으로 (transitively) 작용한다.

$\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ 의 이산 부분군  $\Gamma$  (**Fuchsian group**이라고 부름)에 대하여, 이의 orbit 공간  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ 는 유향(orientable) 곡면인  $S_g$  ( $g \geq 2$ , genus)가 되고 이때,  $p : \mathbb{H}^2 \rightarrow S_g$ 는 branched covering이 된다. 이때, branch point에서의 isotropy 부분군은 순환군이 되고 이들의 order를  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 이라 하면, 부분군  $\Gamma$ 는

$$\langle A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, Q_1, \dots, Q_n : [A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] Q_1 \cdots Q_n = Q_1^{\alpha_1} = \cdots = Q_n^{\alpha_n} = 1 \rangle$$

로 표현된다.

보기 3.4. (1) 정다각형에 의한 tessellation (regular tessellation): 그림 10 참조

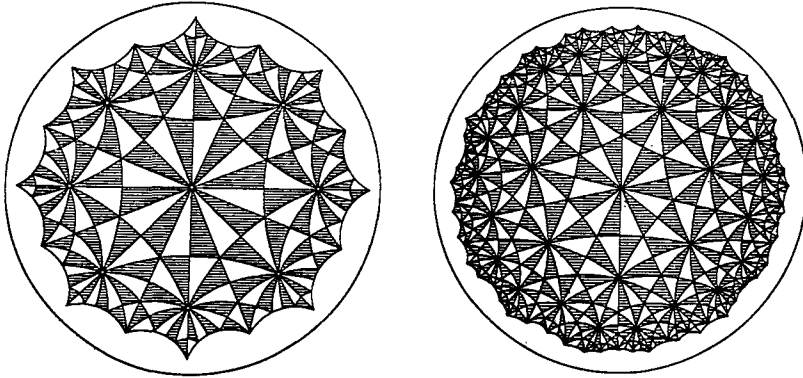


그림 10. Hyperbolic 평면에서 regular tessellation S642와 S732

(2) 일반적인 tessellation (irregular tessellation): 그림 11 참조

정리 3.5. Riemann 곡면인 Euclid 평면, Spherical 평면, Hyperbolic 평면에서의 모든 regular map(혹은, regular tessellation)  $\mathcal{M}$ 에 대하여, 이들의 자기동형군  $\text{Aut}(\mathcal{M})$ 은 triangle group

$$\Delta(m, n) = \langle \rho, \lambda \mid \rho^m = \lambda^n = (\rho\lambda)^2 = 1 \rangle$$

의 quotient group으로 나타난다.



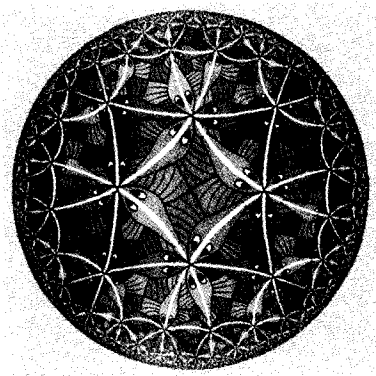


그림 11. Hyperbolic 평면에서 irregular tessellation

이때,  $1/2 - 1/m - 1/n$ 이 음수, 0, 양수인가에 따라서 triangle group  $\Delta(m, n)$ 을 elliptic, parabolic, 혹은 hyperbolic이라고 한다. 따라서, tessellation이나 뒤에 소개될 regular map은 군론에서의 triangle group의 연구와 밀접한 관계를 가지게 된다.

이제까지 tessellation의 구조를 살펴 보았다. 그렇다면, 주어진 곡면에 대한 tessellation은 얼마나 많이 있는가? 이들 tessellation 집합의 구조는 복잡한 3차원 다양체의 연구에 속한다. 여기서는 몇가지 예를 들어 보기로 한다.

보기 3.6. Euclidean 평면에서 가로, 세로 길이가 1인 정사각형으로 이루어진 바둑판과 같은 모양의 tessellation을 표준형의 square-tiling이라고 하자. 예를들면,  $T_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ 와  $T_{\mathbb{Z}}$ 를 평행이동 시킨 후  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  만큼 회전한 모양은 모두 표준형 square-tiling이다. 그러면 Euclidean 평면내에 얼마나 많은 표준형의 square-tiling이 가능한가? 가능한 모든 표준형 square-tiling의 집합은 자연스럽게 위상공간이 된다. 실은 이 위상공간은  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (3차원 Torus)와 위상동형이다. 왜냐하면, Euclidean 평면내의 모든 표준형 square-tiling은 주어진 tiling  $T_{\mathbb{Z}}$ 를  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ 만큼 평행이동 시킨 후  $\theta \in \mathbb{R}$ 만큼 회전시켜서 얻을 수 있고, 이때,  $T_{\mathbb{Z}}$ 의 isotropy subgroup은  $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}$ 이기 때문이다. 수학적으로 표현하면,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 = \{(\mathbf{v}, \theta) : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \theta \in \mathbb{R}\}$ 은 모든 표준형 square-tiling의 위상공간에 추이적으로, 그리고 properly-discontinuously 작용하고  $T_{\mathbb{Z}}$ 의 isotropy subgroup은  $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}$ 이다. 한편, 3차원 Torus  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 는 3차원 구  $\mathbb{S}^3$ 와 더불어 가장 간단한 구조를 가진 3차원 (compact, no boundary) 다양체들이다. compact이고 울타리가 없는(no boundary) 3차원 다양체들의 분류는 중요한 수학계의 미해결 문제 중 하나이다.

보기 3.7. 구면  $S^2$ 에 얼마나 많은 방법으로 정12면체를 내접하도록 넣을 수 있는가? 이들의 모든 가능한 방법이 이루는 위상공간은  $\Sigma = SO(3)/A_5$ 와 위상동형이다. (증명의 idea는 위의 예와 동일하다.) 실은, 이는 Poincaré homology sphere로 알려진 3차원 orientable closed 다양체이다. 이는 지금까지 알려진, 3차원 구  $S^3$ 와 같은 homology group을 가지지만  $S^3$ 와 위상동형은 아닌 유일한 예이다. 위상공간  $\Sigma$ 의 기본군은 exact sequence  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \pi_1(\Sigma) \rightarrow A_5 \rightarrow 0$ 를 가지는 것이 알려져 있고, 이리하여  $S^3$ 와 위상동형일 수 없다. homology group대신에 homotopy group을 이용할 때 이러한 예제가 존재하는지는 밝혀지지 않은 문제이며, 이는 Poincaré conjecture로 잘 알려져 있다.

## 제 4 절 Regular map 이란 무엇인가?

곡면  $S$  위의 위상적 **map**이란, 앞의 Riemann곡면의 regular tessellation에서 본바와 같이, 어떤 그래프  $G$ 의 곡면  $S$ 로의 2-cell 매장을 말한다. 여기서 2-cell이란, 매장에서 생기는 영역이 모두 위상적으로 2-cell이 됨을 말한다. 예를 들어, Platonic solid들은 곡면  $S^2$  위의 서로 다른 2-cell 매장들이다. 주어진 map에서, 그래프  $G$ 와 곡면  $S$ 를 각각 그 map의 기저그래프(underlying graph)와 기저곡면(supporting surface)이라 부른다. 편의를 위하여, 이 장에서는 기저곡면이 closed인 유향곡면에서의 map만을 다루기로 한다. 위상적 map  $\mathcal{M}_1$ 와  $\mathcal{M}_2$ 에 대하여, 함수  $f$ 가  $\mathcal{M}_1$ 의 기저곡면  $S_1$ 으로 부터  $\mathcal{M}_2$ 의 기저곡면  $S_2$ 로 대응되는 분지된 피복(branched covering)으로서  $f$ 의 정의역을  $\mathcal{M}_1$ 의 기저그래프  $G_1$ 으로 제한했을 때 그 상이  $\mathcal{M}_2$ 의 기저그래프  $G_2$ 가 될 때,  $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ 를 **준동형사상**(homomorphism)이라 한다. 만약,  $f$ 가  $S_1$ 에서  $S_2$ 로 대응되는 위상동형사상(homeomorphism)이고, 또한  $G_1$ 에서  $G_2$ 로 가는 그래프 동형사상일 때, 함수  $f$ 를 map  $\mathcal{M}_1$ 에서 map  $\mathcal{M}_2$ 로의 **동형사상**(isomorphism)이라 한다. 어떤 map  $\mathcal{M}$ 에 대하여 자기자신에서 자기자신으로의 방향보존동형사상을 map  $\mathcal{M}$ 의 **자기동형사상**(automorphism)이라 한다. 이때, 그 map의 자기동형사상들의 집합은 합성함수연산에 대하여 군을 이루는데, 이 군을  $\mathcal{M}$ 의 **자기동형군**이라 하고  $\text{Aut}(\mathcal{M})$ 으로 표시한다.

자기동형군의 크기는 map의 대칭성에 대한 척도로 사용된다. 주어진 map  $\mathcal{M}$ 의 기저그래프가  $G$ 일 때,  $\text{Aut}(\mathcal{M})$ 의 크기는  $G$ 의 변(edge)의 갯수의 2배보다 작거나 같음이 잘 알려져 있다.  $\text{Aut}(\mathcal{M})$ 의 크기가  $G$ 의 변(edge)의 갯수의 2배일 때,  $\mathcal{M}$ 을 **regular map**이라 한다. 즉, regular map이란 Platonic solids처럼 대칭성이 아주 좋은 그래프의 대칭성이 좋은 2-cell 매장을 말한다.

## 조합적 또는 군론적 정의

위상적 map은 어떤 유한 집합과 그 집합의 원소들의 치환(permutation)들로 표현이 가능한데 이를 조합적 map(또는 군론적 map)이라고 한다. 조합적 map은 다음 조건을 만족하는 triple  $\mathcal{M} = (D; R, L)$ 이다.

- (i)  $D$ 는 유한집합이고( $D$ 의 원소를 dart라 한다),  $R$ 과  $L$ 은  $D$ 의 치환으로  $L^2$ 은 항등치환이다.
- (ii)  $D$ 의 대칭군  $S_D$ 의 부분군으로서  $R$ 과  $L$ 로 생성되는 군  $\langle R, L \rangle$ 은 집합  $D$ 에 추이적으로 작용(transitive action) 한다. 부분군  $\langle R, L \rangle$ 을 map  $\mathcal{M}$ 의 **monodromy group**이라고 하고  $\text{Mon}(\mathcal{M}) = \langle R, L \rangle$ 로 표기한다.

조합적 map  $\mathcal{M} = (D; R, L)$ 에서  $\langle R \rangle$ ,  $\langle L \rangle$ 과  $\langle RL \rangle$ 의 궤도(orbit)들을 각각 map  $\mathcal{M}$ 의 꼭지점, 변 그리고 면(혹은, 영역)이라 한다. 조합적 map에서  $D$ 는 위상적 map에서 유향변들의 집합에 해당되고  $R$ 은 같은 꼭지점에서 나오는 유향변들의 시계방향으로의 치환에,  $L$ 은 같은 변을 갖는 두 유향변 사이의 호환(involution)에 해당된다. 기저곡면이 유향곡면인 모든 위상적 map은 조합적 map으로 나타낼 수 있고, 모든 조합적 map은 기저곡면이 유향곡면인 위상적 map으로 나타낼 수 있다. 위상적 map의 준동형사상, 동형사상, 자기동형사상, regularity가 조합적 map에서는 다음과 같이 정의된다.

두 조합적 maps  $\mathcal{M}_1 = (D_1; R_1, L_1)$ 과  $\mathcal{M}_2 = (D_2; R_2, L_2)$ 에 대하여,  $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ 가 준동형사상(homomorphism)이라 함은  $f$ 가  $D_1$ 에서  $D_2$ 로 대응되는 함수로서  $fR_1 = R_2f$ 과  $fL_1 = L_2f$ 를 만족할 때를 말한다. 만약,  $f$ 가 일대일 대응이면  $f$ 를 동형사상이라 한다.  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$ 인 경우  $f$ 를 자기동형사상이라 한다. 자기동형사상들의 집합은  $S_D$ 의 부분군을 이루는데 이 군을 자기동형군이라 하고  $\text{Aut}(\mathcal{M}_1)$ 으로 표기한다.

어떤 조합적 map  $\mathcal{M} = (D; R, L)$ 에 대하여 군  $\text{Mon}(\mathcal{M})$ 은 집합  $D$ 에 추이적 작용(transitive action)을 하고, 자기동형군  $\text{Aut}(\mathcal{M})$ 은 집합  $D$ 에 준정칙작용(semi-regular action)을 하므로, 부등식  $|\text{Aut}(\mathcal{M})| \leq |D| \leq |\text{Mon}(\mathcal{M})|$ 이 성립한다. 위 부등식에서 첫번째 부등식의 등호와 두번째 부등식의 등호가 동시에 성립하거나 동시에 성립하지 않음이 잘 알려져 있고, 등호가 동시에 성립할 때 map  $\mathcal{M} = (D; R, L)$ 을 **regular map**이라 한다. 조합적 regular map을 위상적 map으로 표현하면 위상적 regular map이 되고, 위상적 regular map을 조합적 map으로 표현하면 역시 조합적 regular map이 된다.

조합적 map  $\mathcal{M} = (D; R, L)$ 에서  $\text{Mon}(\mathcal{M})$ 을  $G$ 라고 하고  $G_e$ 를 집합  $D$ 상에서의  $G$ 의 작용에서 dart  $e$ 의 고정군(stabilizer)라고 할 때,  $\text{Aut}(\mathcal{M}) \simeq N_G(G_e)/G_e$ 를 만족한다. 따라서 조합적 map  $\mathcal{M}$ 이 regular map이 될 필요충분조건은 어떤 dart  $e$ 에 대하여  $G_e$ 가 자명한 부분군이 되는 것이다. 그리고, 조합적 map  $\mathcal{M} = (D; R, L)$ 은 조합적 map

$\mathcal{M}' = (G/G_e; R, L)$  (dart집합이  $G$ 의 부분군인  $G_e$ 의 좌잉여류 집합이고,  $gG_e \in G/G_e$ 에 대하여  $R(gG_e) = RgG_e$ ,  $L(gG_e) = LgG_e$ 로 정의된다)과 동형이다. 따라서, regular map과 주기가 2인 원소와 다른 하나의 원소로 생성되는 군 사이에는 대응이 존재한다. 조합적 map의 장점은 기하학적 대상인 map을 군으로 표현할 수 있다는 데 있다.

## Riemann maps

기저그래프의 꼭지점의 차수(degree)들의 최소공배수가  $m$ 이고 면들의 길이들의 최소공배수가  $n$ 인 리만 곡면 위의 map  $\mathcal{M}$  (앞으로 이러한 map을 type- $(m, n)$  map이라 하겠다)은 triangle group  $\Delta(m, n) = \langle \rho, \lambda \mid \rho^m = \lambda^n = (\rho\lambda)^2 = 1 \rangle$ 을 monodromy group으로 가지는 simply connected인 리만 곡면(  $1/m + 1/n - 1/2$ 이 양수, 0, 음수인가에 따라서 Spherical 평면, Euclid 평면, Hyperbolic 평면이 된다)의 *universal tessellation*  $\mathcal{U}_{m,n}$ 의 quotient map과 동형이 됨이 잘 알려져 있다.  $S$ 가  $\Delta(m, n)$ 의 부분군으로서,  $\mathcal{U}_{m,n}$ 을  $S$ 로 quotient한 map이  $\mathcal{M}$ 과 동형이 될 때,  $S$ 를 map  $\mathcal{M}$ 의 *map subgroup*이라 한다. 이때,  $\mathcal{M}$ 은 조합적 map  $(\Delta(m, n)/S, \rho, \lambda)$ 와 동형이 된다. 리만 곡면 위의 map을 그 map의 map subgroup을 사용하여 나타낼 때, 이 map을 *Riemann map*이라 한다. Riemann map의 장점은 map의 준동형사상, 동형사상, 자기동형사상, regularity가 map subgroup 사이의 관계(부분군, conjugacy, normality 등등)에 의해 쉽게 표현된다는 데 있고, 단점은 map subgroup을 구하기가 어렵고, map subgroup이 주어졌을 때 그 map의 기하학적 모양을 알기가 어렵다는 데 있다.

지금까지 위상적, 조합적, Riemann map에 대해 살펴 보았는데 실제로 서로 호환이 가능하다. 따라서, 우리는 map을 다양한 관점에서 볼 수 있다. Map theory는 군론, Riemann surfaces, 대수곡선론, Galois theory 등과도 밀접한 연관이 있음이 잘 알려져 있다.

보기 4.1. 여기에서, Type- $(m, n)$  map들의 집합을  $U(m, n)$ 으로 표기하자.

(1) **Euclid 평면에서 Regular map:** Euclid 평면  $\mathbb{E}^2$ 에서는, 세가지 다른 type의 map이 존재한다:

$$U(4, 4), U(3, 6), U(6, 3). \quad (\text{그림 5, 6, 7 참조})$$

예를들어,  $U(6, 3)$ 에 속하는 map  $\mathcal{M}$ 의 자기동형군  $\text{Aut}(\mathcal{M}) = \mathcal{A}$ 은

$$\Delta = \langle \rho, \lambda \mid \rho^6 = \lambda^2 = (\rho\lambda)^3 = 1 \rangle \xrightarrow{\text{proj}} \mathcal{A} = \langle \rho, \lambda \mid \rho^6 = \lambda^2 = (\rho\lambda)^3 = \dots = 1 \rangle$$

처럼 triangle group의 quotient group으로 나타나고, 이때,  $\mathcal{M} = (\mathcal{A}; \rho, \lambda)$ 로 regular map의 표현이 가능하다.

(2) **Spherical 평면에서 Regular map:** Platonic solid들은 각각  $U(3, 5), U(3, 4), U(4, 3), U(5, 3), U(3, 3)$ 에 속하는 유일한 map들이다.

(3) **Hyperbolic 평면에서 Regular map:**  $U(7, 3)$ 의 model은 Klein (1878)에 의해서 알려졌으며, 그림 10 오른쪽 S732도 그 중에 하나이다.  $U(7, 3)$ 에 속하는 임의의 map  $\mathcal{M}$ 에서, 각 삼각형의 내각의 합은

$$2\pi/7 + 60^\circ + 60^\circ < 180^\circ$$

이며, 이는 hyperbolic geometry에서 가능하다. 또한, map  $\mathcal{M}$ 의 자기동형군  $\text{Aut}(\mathcal{M})$ 은

$$\text{Aut}(\mathcal{M}) = \mathcal{A} = \langle \rho, \lambda \mid \rho^7 = \lambda^2 = (\rho\lambda)^3 = \dots = 1 \rangle$$

로 표현이 가능하고, 이때,

- dart set는 :  $\mathcal{A}$
- vertex는 : coset  $a \langle \rho \rangle$ , 즉,  $V = \mathcal{A} / \langle \rho \rangle$
- edge는 : coset  $a \langle \lambda \rangle$ , 즉,  $E = \mathcal{A} / \langle \lambda \rangle$
- face는 : coset  $a \langle \rho\lambda \rangle$ , 즉,  $F = \mathcal{A} / \langle \rho\lambda \rangle$

로 표현될 수 있다.

몇가지 주요 질문과 그의 답을 생각해 보자. 우선, 임의로 주어진 valency와 covalency에 대하여 이를 가지는 regular map이 존재하는가? 다음의 conjecture는 1976년에 주어졌으며, 1983년 A.Vince에 의하여 증명되었다.

정리 4.2. (**Grünbaum's conjecture**) 임의로 주어진  $r \geq 2, \ell \geq 2$ 에 대하여, valency  $r$ 와 covalency  $\ell$ 을 가지는 regular map은 항상 존재한다. 더욱이, Euclid 평면이나 Hyperbolic 평면상에서는 (즉,  $1/r + 1/\ell \leq 1/2$ 인 경우) 무한히 많은  $(r, \ell)$ -type의 regular map이 존재한다.

주어진 곡면위에서 얼마나 많은 regular map이 가능한가?

정리 4.3. (**Hurwitz:1892**) (1) 임의의 genus  $g \geq 2$ 인 closed Riemann surface  $S$  에 대하여,

$$|\text{Aut}(S)| \leq 84(g - 1)$$

이다. 이와 동치로, 만약  $\mathcal{M}$ 이 genus  $g \geq 2$ 인 oriented map이면,  $\mathcal{M}$ 의 oriented automorphisms의 갯수는  $|\text{Aut}(\mathcal{M})| \leq 84(g - 1)$ 이다.

(2) 만약, 군  $\mathcal{A}$ 가 genus  $g \geq 2$ 인 위상곡면  $S$ 에 작용하면 (orientation-reversing을 허용하여),

$$|\mathcal{A}| \leq 168(g - 1).$$

Hurwitz정리에서 부등식  $|\text{Aut}(\mathcal{M})| = |D(G)| \leq 84(g - 1)$ 이 등식이 되는 경우가 있는가? MacBeath는 Hyperbolic 곡면에서 무한히 많은 경우가 있을 수 있음을 보였다.

정리 4.4. (MacBeath:1969)  $|\text{Aut}(\mathcal{M})| = 84(g-1)$ 을 만족하는 Hyperbolic 곡면에서의 (genus  $g \geq 2$ ) regular map은 무한히 많이 존재한다. 실은, regular map  $\mathcal{M}$ 이 이러한 map이 될 필요충분조건은  $\mathcal{M}$ 이 (3,7)- 혹은 (7,3)-type이 되는 것이다.

어떤 그래프가 regular map의 기저 그래프가 될 수 있는가?

정리 4.5. (Gardiner et.al:1999) 주어진 그래프  $G$ 를 기저그래프로 갖는 regular map이 존재하기 위한 필요충분조건은  $G$ 의 자기동형군  $\text{Aut}(G)$ 가 다음 성질을 만족하는 부분군  $S$ 를 가지는 것이다.

- (1)  $S$ 가  $G$ 의 유향변에 regular action한다.
- (2)  $G$ 의 임의의 꼭지점  $v$ 에 대하여,  $v$ 를 고정하는  $S$ 의 고정부분군  $S_v$ 가  $v$ 의 degree와 같은 order의 순환군이 된다.

## 제 5 절 Regular map의 분류

Regular map의 모든 가능한 경우를 찾아라. 이러한 분류문제는 다음과 같이, 크게 세 가지 방향에서 연구되고 있다.

- (1) 곡면을 고정했을 때, 그 곡면을 기저곡면으로 갖는 regular map의 분류
- (2) 그래프를 고정했을 때, 그 그래프를 기저그래프로 갖는 regular map의 분류
- (3) 군을 고정했을 때, 그 군을 자기동형군으로 갖는 regular map의 분류

### 곡면을 고정했을 때

구면에서의 regular map인 5개의 Platonic solids는 기원전부터 알려져 왔다. 이 외에 구면에서의 regular map들은 자명한 infinite family들 외에는 없다. Torus에 몰입되는 regular map은 무한히 많이 존재하지만 그 type은 (4,4), (3,6), (6,3)외에 없다. 이에 대한 분류는 Coxeter와 Moser에 의해 완전히 이루어 졌다. 종수(genus)가 2이상인 고정된 곡면에 대해서는 Hurwitz bound(1982)에 의해 그 곡면을 기저곡면으로 갖는 regular map이 유한함이 증명되었다. 이에 따라 20세기에 들어 그 분류문제가 활발하게 이루어 졌다. 최근, M. Conder와 P. Dobcsányi가 computer를 사용하여 유향곡면인 경우 종수가 15이하에 대해, 비유향곡면(nonorientable surface)에 대해서는 cross cap수가 30이하에 대해 그 곡면을 기저곡면으로 갖는 regular map의 분류를 완성하였다. 컴퓨터의 연산속도 향상에 따라 더 많은 곡면에 대해 분류가 이루어질 것으로 기대된다.

재미있는 사실은 임의의 유향곡면에 대해서도 그 유향곡면을 기저 곡면으로 가지는 regular map이 존재하지만, 비유향곡면의 경우에는 regular map이 존재하지 않는 곡면이 존재한다. 예를 들면, cross cap수가 2, 3, 18, 24, 27, 39, 48인 비유향곡면을 기저곡면으로 갖는 regular map이 존재하지 않음이 알려져 있다. regular map을 갖지 않는 비유향곡면이 무한한지, 어떤 분포로 존재하는지는 아직 풀리지 않은 미해결 문제이다.

보기 5.1. (Small genus의 곡면에서의 regular map의 분류:)

<< orientable case >>		
$\chi$	number of reg. maps	By
2	5 platonic polyhedra $\infty$ dihedra, hosohedra	
0	$\infty$	H.Coxeter(1948)
-2	10	See Coxeter-Moser p.140
-4	20	F.Sherk(1959)
-6	20	D. Garbe(1969)
-8	26	
-10	23	
-12	21	D.Garbe(1978)

<< nonorientable case >>		
$\chi$	number of reg. maps	By
1	4	
	$\infty$	
0	0	Efremovic(1947)
-1	0	See Coxeter-Moser
-2	4	A.Grek(1963)
-3	6	A.Grek(1966)
-4	6	A.Grek(1968)
-5	4	J.Scherwa(1985)
-6	2	

**그래프를 고정했을 때**

Heffter(1898)가 소수  $p$ 에 대하여 완전그래프  $K_p$ 의 regular map을 분류한 후부터 그래프를 고정했을 때 그 그래프를 기저그래프로 갖는 regular map의 분류문제가 대두되었다. 대칭성이 아주 좋은 regular map의 기저그래프 또한 당연히 대칭성이 좋아야 한다.

그래프  $G$ 를 고정했을 때의 regular map의 분류 문제는 다음과정의 의해 가능하다.

- (I) 정리 4.5을 만족하는  $\text{Aut}(G)$ 의 부분군의 conjugacy class에 대한 분류
- (II) (I)에서 구해진 conjugacy class마다 대표들을 선택해서, 대표로 선출된 부분군들에 대해 그 부분군을 자기동형군으로 갖는 regular map에 대해 분류

지금까지 분류가 이루어진 그래프는 그리 많지 않다. 분류가 완전히 이루어진 그래프로는  $n$ -bouquet of circle  $B_n$ ,  $n$ -dipole  $D_n$ , 완전그래프  $K_n$ , tensor product  $K_n \otimes K_2$ , 소수  $p$ 에 대한 완전다분그래프  $K_{p,p,\dots,p}$ 가 있다. 그리고, 완전이분그래프  $K_{n,n}$ ,  $n$ -cube  $Q_n$ 에 대해서는 부분적인 분류가 이루어졌다.

## 군을 고정했을 때

군이 고정되었을 때, 그 군을 자기동형군으로 갖는 regular map이 존재할 필요충분조건은 그 군이 주기가 2인 원소와 다른 하나의 원소로 생성되는 것임이 잘 알려져 있다. 특별히 최근에 군이론에서 단순군에 대한 분류가 완전히 이루어짐에 따라 군을 이용한 regular map의 분류가 활발히 이루어지고 있다. 주목할 만한 사실은 단순군들 대부분이 주기가 2인 원소와 다른 하나의 원소로 생성된다는 것이다. 예를 들면, 교대군  $A_n$ , projective special linear group  $\text{PSL}_n(q)$ , Suzuki 군  $\text{Sp}(q)$  등이 그러하다.

군을 고정했을 때의 regular map의 분류 문제는 주어진 군을 생성하는 주기가 2인 원소와 다른 원소의 순서쌍의 분류에 달려있다. 특별히, 군을 고정했을 때 그 군을 자기동형군으로 갖는 regular map의 분류는 그 군이 유향곡면의 위상동형군으로 작용하는 유향곡면의 분류와 밀접한 관계가 있다.

## 제 6 절 Regular map 研究의 年歷

- 4C BC) Plato knew that there could be at most five regular maps on  $S_0$  and later Theaetetus proved it.
- (1619) Kepler discovered a (non-spherical) regular map on  $S_5$  of type  $(5,5)$ (=the great dodecahedron)
- (1878) F.Klein described a 3-valent heptagonal map, (*i.e.*, of type  $(7,3)$ ), on the orientable surface  $S_3$ . (with  $f = 24$ .) 그림 10 참조
- (1880) W.Dyck described a 3-valent octagonal map, (*i.e.*, of type  $(8,3)$ ) on  $S_3$ . (with  $f = 12$ .) 그림 10 참조
- (1890) P.Heawood: Two regular maps on a torus  $S_1$ : one is of type  $(4,4)$  (with many possible  $f$ ) and the other is of type  $(6,3)$  (with  $f = 7$ .)



- (1911) W.Burnside described regular maps of the complete graph  $K_p$ ,  $p$ , prime,
- (1927) H.Brahana initiated a systematic study of regular maps
- (1959) F.A.Sherk classified oriented regular maps of genus 3.
- (1969) D.Garbe derived characterization of oriented regular maps on surfaces of genus less than 8 and nonorientable surfaces of genus less than 9.
- (1985) L.James and G.Jones classified completely the regular maps of the complete graph  $K_n$ .
- (1997) R.Nedela and M.Skoviera: Additional oriented regular maps of Hypercubes  $Q_n$  and  $K_{n,n}$  by using lifting and exponent groups.
- (1999) A. Gardiner, R. Nedela, J. Širáň and M. Škoviera characterized graphs which underlie regular maps on closed surfaces
- ( $\geq 2002$ ) A.Breda d’Azevedo and R.Nedela classified mirror asymmetric orientably regular maps on surfaces of genus less than 4.
- ( $\geq 2002$ ) M.Conder and P.Dobcsányi gave a list of all oriented regular maps on surfaces of genus less than 15 and nonorientable surfaces of genus less than 30 with the help of a computer program.
- ( $\geq 2002$ ) Du-Kwak-Nedela: (Orientable) Regular maps of complete multipartite graphs
  - (1)  $\exists_1$  regular embedding of  $K_{p,p}$ ,
  - (2)  $\exists_1$  regular embedding of  $K_{p,p,p}$  for  $p \neq 3$ ,
  - (3)  $\exists p \phi(p-1)$  regular embeddings of  $K_p[\overline{K}_p]$ ,
  - (4) No regular embeddings of  $K_n[\overline{K}_p]$  if  $n \geq 4$  and  $n \neq p$ .
- ( $\geq 2002$ ) Du-Kwak-Nedela: (Orientable) Regular maps of graphs of order  $pq$ . Infinitely many families of 4 different types.
- ( $\geq 2002$ ) Kwak-Kwon: More regular orientable maps of complete bipartite graphs and their exponent groups.

### 6.1. Semi-regular tessellations

앞의 예에서 거론한 바와 같이 Fullerene  $C_{60}$ 은 정다면체가 아닌 truncated icosahedron (soccer ball) 모양을 하고 있다. 이와 같이, 하나의 정다각형로만 이루어진 tessellation인 regular map 외에 두가지 이상의 정다각형으로 이루어진, 하지만 각 꼭지점에서의 인접한 영역(면)은 일정한 규칙을 가지는, tessellation을 semi-regular tessellation (혹은, semi-regular map)이라고 한다. 간단히 몇가지 예만 제시하기로 한다.

- 보기 6.1. (1) 평면에서의 semi-regular tessellations: 그림 12 참조
- (2) Torus에서의 semi-regular tessellation: 그림 13 참조

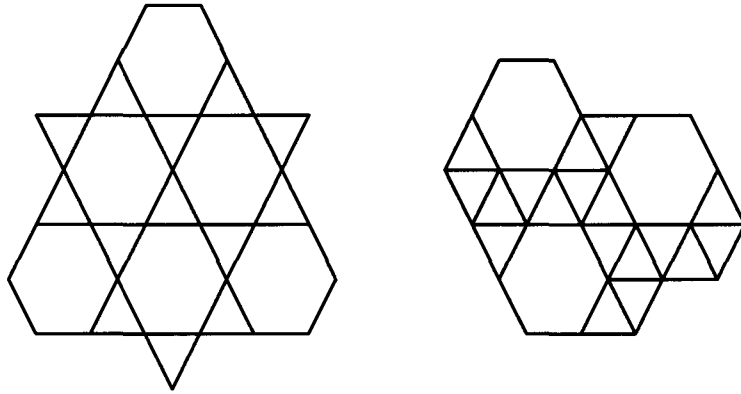


그림 12. Euclid 평면에서 semi-regular tessellation (3, 6, 3, 6)과 (3, 3, 3, 3, 6)

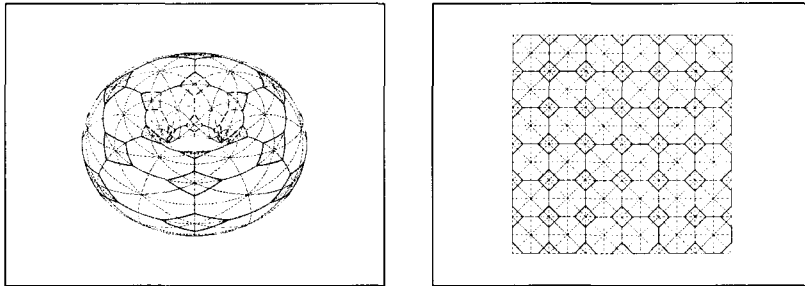


그림 13. Torus에서의 semi-regular tessellation과 그 펼친그림

일반적인 Riemann곡면상에서의 regular tessellation이나 semi-regular tessellation이 fullerenes와 관련한 분자구조의 응용에 어떻게 관련되는지 관심이 있는 독자는 *Discrete Mathematics* 238 (2001), 115–130, *J Chem. Inf. Comput. Sci.* 40 (2000), 530–541, 혹은 *J Chem. Inf. Comput. Sci.* 40 (2000), 550–558 등에서 참고문헌을 찾을 수 있다.

#### 참고 문헌

- [1] M. A. Armstrong, *Groups and Symmetries*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [2] N. L. Biggs, *Classification of complete maps on orientable surfaces*, *Rend. Mat.* 4 (1971), no. 6, 132–138.

- [3] H. R. Brahana, *Regular maps and their groups*, Amer. J. Math. **48** (1927), 268–284.
- [4] G. Brinkmann and M. Deza, *Lists of Face-Regular Polyhedra*, J. Chem. Inf. Comput. Sci. **40** (2000), no. 3, 530–541.
- [5] M. Conder and P. Dobcsányi, *Determination of all regular maps of small genus*, preprint.
- [6] M. Conder and B. Everitt, *Regular maps on non-orientable surfaces*, Geom. Dedicata **56** (1995), 209–219.
- [7] R. Cori and A. Machì, *Maps, hypermaps and their automorphisms: a survey I, II, III*, Expositiones Math. **10** (1992), 403–427, 429–447, 449–467.
- [8] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Fourth Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [9] M. Deza, P. W. Fowler, A. Rassat and K. M. Pogers, *Fullerenes as Tilings of Surfaces*, J. Chem. Inf. Comput. Sci. **40** (2000), no. 3, 550–558.
- [10] M. L. N. Downs and G. A. Jones, *Enumerating regular objects with a given automorphism group*, Discrete Math. **64** (1987), 134–151.
- [11] S. F. Du, J. H. Kwak and R. Nedela, *Regular embeddings of complete multipartite graphs*, preprint, 2001.
- [12] ———, *A classification of regular embeddings of graphs of order a product of two primes*, preprint, 2001.
- [13] D. Garbe, *Über die regulären Zerlegungen orientierbarer Flächen*, J. Reine Angew. Math. **237** (1969), 39–55.
- [14] A. Gardiner, R. Nedela, J. Širáň and M. Škoviera, *Characterization of graphs which underlie regular maps on closed surfaces*, J. London Math. Soc. **59** (1999), 100–108.
- [15] L. Heffter, *Über metacyklische Gruppen und Nachbarconfigurationen*, Math. Ann. **50** (1898), 261–268.
- [16] L. D. James and G. A. Jones, *Regular orientable imbeddings of complete graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **39** (1985), 353–367.
- [17] G. A. Jones and D. Singerman, *Theory of maps on orientable surfaces*, Proc. London Math. Soc. **37**(3) (1978), 273–307.
- [18] ———, *Belyĭ functions, hypermaps and Galois groups*, Bull. London Math. Soc. **28** (1996), 561–590.
- [19] G. A. Jones, *Maps on surfaces and Galois groups*, Math. Slovaca **47** (1997), 1–33.
- [20] J. H. Kwak and Y. S. Kwon, *Regular orientable embeddings of complete bipartite graphs*, preprint.
- [21] ———, *Exponent and switch exponent groups of regular orientable embeddings of complete bipartite graphs*, preprint.
- [22] M. L. Lopez, *Residual finiteness of surface groups via tessellations*, Discrete Comput. Geom. **11** (1994), 201–211.
- [23] A. M. MacBeath, *Generators of linear fractional groups*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. XII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1969), 14–32.
- [24] C. MacLachlan, *A bound for the number of automorphisms of a compact Riemann surface*, J. London Math. Soc. **44** (1969), 265–272.
- [25] J. M. Montesinos, *Classical Tessellations and Three-Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

- [26] R. Nedela, *Regular Maps - Combinatorial Objects Relating Different Fields of Mathematics*, J. Korean Math. Soc. **38**(5) (2001), 1069-1105.
- [27] R. Nedela and M. Škoviera, *Regular maps of canonical double coverings of graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **67** (1996), 249-277.
- [28] ———, *Exponents of orientable maps*, Proc. London Math. Soc. **75**(3) (1997), 1-31.
- [29] A. Pasini, *Four-dimensional football, fullerenes and diagram geometry*, Discrete Math. **238** (2001), 115-130.
- [30] L. Schneps (ed.), *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants*, London Math. Soc. Lecture Note Series 200, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [31] J. Širáň, *Triangle group representations and constructions of regular maps*, Proc. London Math. Soc., **82** (2001), no. 3, 513-532.
- [32] A. Vince, *Combinatorial maps*, J. Combin. Theory Ser. B **34** (1983), 1-21.
- [33] ———, *Regular combinatorial maps*, J. Combin. Theory Ser. B **35** (1983), 256-277.
- [34] S. E. Wilson, *Cantankerous maps and rotary embeddings of  $K_n$* , J. Combin. Theory Ser. B **47** (1989), 262-273.
- [35] S. Wilson and A. Breda d'Azevedo, *Surfaces with no regular hypermaps*, submitted.

포항공과대학교 수학과  
경상북도 포항시 남구 효자동  
산31번지 790-784  
E-mail: jinkwak@postech.ac.kr