

# 변형된 창함수를 사용한 FIR 디지털 필터에 관한 연구

## A Study on the FIR Digital Filter using Modified Window Function

강 경 덕, 배 상 범, 김 남 호, 류 지 구

Kyeong-Deog Kang, Sang-Bum Bae, Nam-Ho Kim, Ji-Goo Ryu

### 요 약

현대산업사회의 발전에 따라 신호처리 분야 중 디지털필터의 사용은 급격히 증가하고 있으며, 특히 디지털 영상처리, 디지털 음성처리, CATV 및 각종 통신 분야 등에서 카메라의 Detail processor, Y/C separator, Ghost제거 필터, 표준변환기(NTSC-PAL), Noise reducer 등으로 많이 사용되고 있다. 이러한 디지털필터에는 일반적으로 IIR(infinite impulse response)과 FIR(finite impulse response) 필터가 있으며, 본 논문에서는 구현이 용이하고 선형위상특성을 갖는 FIR 디지털필터를 설계하였다. FIR 디지털필터 설계에 있어서 통과대역의 차단주파수 부근에서 깁스(gibbs) 현상에 의해 생긴 리플을 완화하기 위해 window함수를 사용한다. 그러나, 기존의 window는 고정된 값으로 되어 있으므로 설계목적에 적합한 window함수를 선택함에 있어 다소 문제점이 있다. 따라서, 본 논문에서는 설계목적에 따라서 융통성있게 선택이 가능한 파라미터를 부가한 변형된 Hanning window를 설계하였으며, 타당성을 입증하기 위해 디지털필터를 설계하여 기존의 Hamming, Hanning, Blackman, Kaiser window와 비교하였으며, 판단기준으로 peak side-lobe와 천이특성 등을 사용하였다.

### Abstract

The use of digital filters in the signal process field is increasing rapidly with development of the modern industrial society. Especially, detail processors, Y/C separators, ghost removing filters, standard converters (NTSC to PAL or PAL to NTSC) and noise reducers, all of which use digital filters, tend to be used in digital video and audio processing, CATV and various communication fields. Generally, there are two different digital filters, the IIR (infinite impulse response) filter and the FIR (finite impulse response) filter in digital filter. In this paper, we have designed FIR filter which has the phase linearity and the easiness of creation. In the design of the FIR digital filter, the window function is used to alleviate the ripples caused by Gibbs Phenomenon around the cut off frequency of the band pass. But there're some problems to choose proper window function for the design destination due to its fixed values. Therefore, in this paper, we designed a modified Hanning window with new parameter which is adaptively chosen corresponding to design objectives. The digital filter was simulated to prove the validity of the model and it was compared with the Hamming, the Hanning, the Blackman and the Kaiser window function. And we have used peak side-lobe and transient characteristics as standard of judgement.

**Key words** : FIR digital filter, Hanning, Hamming, Blackman, Kaiser window

### I. 서론

현대 산업사회의 발전에 따라 신호처리 분야에서 디지털 필터의 사용이 급격히 증가하고 있다. 디지털 필터는 아날로그 필터와 같이 주어진 입력신호를 희망하는 신호의 형태로 여과하는 디지털 시스템이다. 이것은 입력 데이터와 유한구간 임펄스 응답의 선형중첩으로, 신호처리를 수학적 계산에 의존하여 실행하며, 구현의 용이성과 안정성 및 잡음특성이 우수하다[1].

일반적으로 디지털 필터에는 IIR 디지털 필터와 FIR 디지털 필터가 있으며, IIR 디지털 필터는 정확성에 있어서 우수하지만, 계산이 복잡하고 위상변화가 생기며 구현이 용이하지 않다. 그러나, FIR 디지털 필터는 IIR 디지털 필터에 비하여 다소 부정확하지만, 선형위상특성을 가지며 구현이 용이하다는 장점을 가지고 있다[2].

FIR 디지털 필터 설계에 있어서, 통과대역의 차단주파수부근에서 깁스(gibbs)현상에 의해 발생한 리플을 완화하기 위해서 window 함수를 사용한다. 그러나, 기존의 window는 고정된 값으로 되어 있어, 설계목적에 적합한 window 함수를 선택함에 있어 다소 문제점이 있다.

따라서, 본 논문에서는 설계목적에 따라 선택 가능한 파라미터를 부가한 변형된 Hanning window를 설계하였다. 제안된 window의 타당성을 입증하기 위해 기존의 Hamming, Hanning, Blackman 그리고 Kaiser window 함수를 사용한 디지털 필터와 비교하였으며, 판단기준으로 peak side-lobe와 천이특성 등을 사용하였다.

### II. FIR 디지털 필터의 설계

FIR 디지털 필터의 임펄스 응답은 필터의 계수와 동일하므로, 주어진 필터 사양을 만족하는 FIR 디지털 필터의 계수는 임펄스 응답으로부터 구한다. 임펄스 응답을 구하는 방법에는 푸리에 급수에 의한 방법과 window 함수에 의한 방법이 있다.

#### 1. 푸리에 급수에 의한 방법

$n=k$ 에서 단위 임펄스가 가해질 때, 임펄스 응답을  $h_k$ 라 하면, 1차원 FIR 디지털 필터의 일반형은 다음과 같다.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x(n-k) \quad (1)$$

양변을  $z$  변환하면,  $Y(z)$ 는 다음의 식 (2)와 같으며, 전달 함수  $H(z)$ 는 식 (3)과 같다.

$$Y(z) = X(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k} \quad (2)$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k} \quad (3)$$

사양을 만족하는 FIR 디지털 필터의 주파수 응답  $H(e^{j\omega})$ 는  $2\pi/T$ 의 주기함수이며, 식 (3)에  $z=e^{j\omega}$ 를 대입하면 다음과 같다.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j\omega k} \quad (4)$$

필터를 설계하기 위해서  $H(e^{j\omega})$ 가  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ 를 만족하는  $h_k$ 의 계수를 결정한다.

$$h_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega \quad (5)$$

실제로 원하는 주파수특성을 만족하는 필터의 전달 함수를  $H^*(z)$ 로 나타내고, 실수부와 허수부를 각각  $R(\omega)$ 와  $I(\omega)$ 라 하면, 주파수 응답  $H^*(e^{j\omega})$ 는 다음과 같다.

$$H^*(e^{j\omega}) = R(\omega) + j I(\omega) \quad (6)$$

필터의 인과성을 만족하기 위해서 유한한 차수가 필요하므로  $n=N$ 에서 절단하면, 근사식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_N(z) &= a_0 + \sum_{n=1}^N \left[ z^{-n} \frac{a_n - b_n}{2} + z^n \frac{a_n + b_n}{2} \right] \\ &= z^N \left[ \frac{a_N + b_N}{2} + z^{-1} \frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2} \right. \\ &\quad + \dots + a_0 z^{-N} + z^{-N-1} \frac{a_1 - b_1}{2} \\ &\quad \left. + \dots + z^{-2N} \frac{a_N - b_N}{2} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)과 식 (3)의 비교에서 다음의 식 (8)이 구해진다.

$$\begin{cases} h_k = \frac{a_{N-k} + b_{N-k}}{2}, & (0 \leq k \leq N-1) \\ h_k = a_0, & (k = N) \\ h_k = \frac{a_{k-N} - b_{k-N}}{2}, & (N+1 \leq k \leq 2N) \end{cases} \quad (8)$$

그리고, 2차원 FIR 필터의 전달 함수는 다음과 같다.

$$H(z_1, z_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z_1^{-k} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_r z_2^{-r} \quad (9)$$

그러나, 푸리에급수에 의한 방법에 의해서 FIR 필터를 설계할 경우, 차수  $N$ 을 크게 할수록 이상적인 필터특성에 접근하지만, 주파수특성상 함수  $H^*(z)$ 의 불연속성으로 말미암아 차단주파수 부근에서 깃스현상은 큰 변화가 없다.

2. Window함수에 의한 방법

푸리에급수에 의해 생긴 깃스현상은 window함수를 사용하여 완화할 수 있으며, 차수가  $M$ 인 1차원 window함수  $W(\omega)$ 는 식 (10)과 같이  $\omega$ 에 대한 실함수로 된다.

$$W(\omega) = \sum_{k=0}^M w_k e^{j\omega k} \quad (10)$$

주파수영역에서  $W(\omega)$ 와  $H(e^{j\omega})$ 의 컨벌루션은 각각의  $h_k$ 에 대응되는  $w_k$ 의 곱과 같으며, 최종적으로  $H(z)$ 는 다음의 식 (11)과 같다.

$$H(z) = \sum_{k=0}^K (w_k h_k) z^{-k} \quad (11)$$

그리고, 2차원 window함수의 전달함수는 식 (9)로부터 구해진다.

$$H(z_k, z_r) = \sum_{k=0}^M (w_k h_k) z^{-k} \sum_{r=0}^N (w_r h_r) z^{-r} \quad (12)$$

식 (12)에서  $w_k$ 와  $w_r$ 이 환상대칭이라면, 2차원 window함수  $w_{kr}(m, n)$ 는 식 (13)과 같이 된다.

$$w_{kr}(m, n) = w_k(n) \Big|_{n=\sqrt{m^2+n^2}} = w_k(\sqrt{m^2+n^2}) \quad (13)$$

III. 변형된 Hanning window 모델

1. 변형된 Hanning window 모델의 설정

설계목적에 적합한 필터의 특성을 얻기 위하여 변형된 Hanning window 모델을 제시하기 위한 기본 모델은 그림 1과 같은 Hanning window에 의해 구해지며, 식 (14)와 같다. Hanning window는 코사인 함수를 자승한 형태이므로, 이와 같은 효과를 고려하여  $w_h(n)$ 에  $\beta$ 인수를 도입한  $w_{mh}(n)$ 을 가정하여 window를 설정하였다. 설정한 window는 식 (15)와 같고,  $\beta$ 변화에 대한 결과는 그림 2와 같다.

$$w_h(n) = 0.5(1 + \cos(2\pi n/N)), \quad -N/2 \leq n \leq N/2 \quad (14)$$

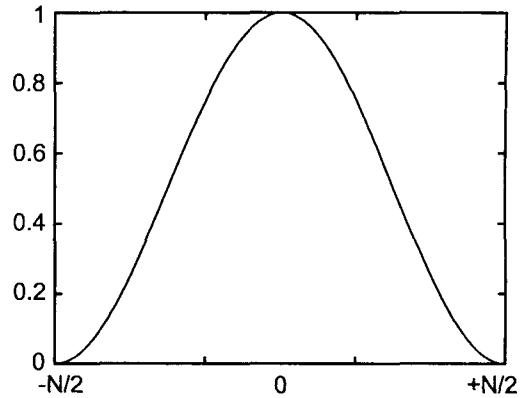


그림 1. Hanning window  
Fig. 1. Hanning window.

$$w_{mh}(n) = \sqrt{0.5(1 + \cos(2\pi n/N))}^\beta, \quad -N/2 \leq n \leq N/2 \quad (15)$$

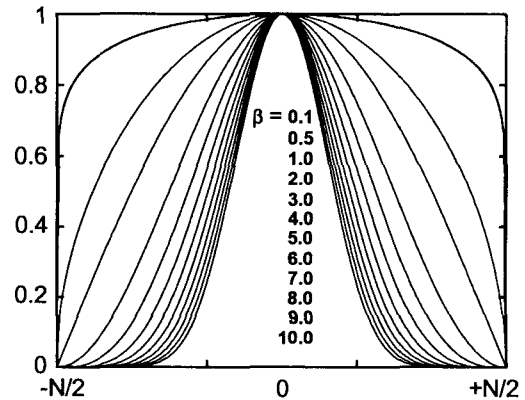


그림 2. 변형된 Hanning window의 모양  
Fig. 2. Shape of Modified Hanning window.

그림 2에서  $\beta$ 가 증가함에 따라  $w_{mh}(n)$ 은 main-lobe가 작아지며, 만약 양의 극한값을 취하면  $w_{mh}(n)$ 은  $\delta$  함수가 된다. 또한  $\beta$ 가 감소함에 따라 main-lobe가 커지며, 만약  $\beta$ 가 0의 극한값을 취하면  $w_{mh}(n)$ 은 Rectangular window가 된다. 그리고  $\beta = 1$ 이면 코사인 window,  $\beta = 2$ 이면 Hanning window가 된다.

2. 변형된 Hanning window 모델의 분석

제시된 필터의 특성을 분석하기 위해 그림 3과 같은 저역통과필터에 그림 2의 window 모델을 적용하였다. 그림 3은 샘플링 주파수를 1, 차단주파수를 0.2로 설정하였으며,  $\delta$ 는 깃스현상에 의해 나타나는 리플의 크기이다.

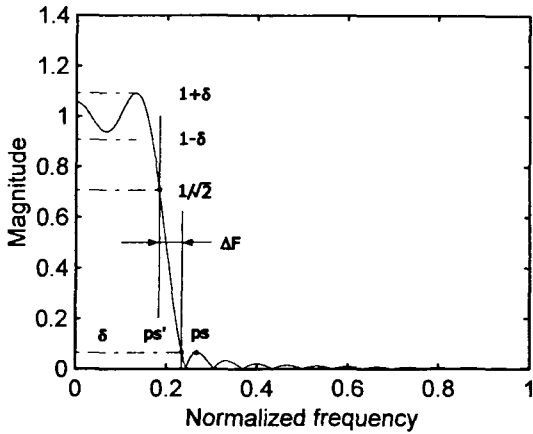


그림 3. 일반적인 저역통과필터  
Fig. 3. General low-pass filter.

그리고, peak side-lobe를 ps로 나타내었으며, 천이영역은  $\Delta F$ 로 나타내고  $1/\sqrt{2}$  (-3[dB])인 주파수에서 ps'가 되는 주파수까지의 값이다. 사용된  $w_{mh}(n)$ 의 window는 그림 2와 같으며, 차단주파수가 0.2이고  $N = 20$ 인 정규화된 저역통과필터 상에서  $\beta$ 의 변화에 따른 필터특성은 그림 4와 같다. 그림 4는  $\beta$ 가 증가함에 따라 천이영역은 넓어지고, 반면에 ps는 작아지는 특성을 보여준다. 파라미터의 변화에 따른  $\Delta F$ 의 특성은 그림 5와 같다. 그림 5에서  $\beta$ 의 증가에 따라  $\Delta F$ 가 선형적으로 넓어지고, 또한 차수의 증가에 따라  $\Delta F$ 가 작아지며, 그 증가율 역시 작아짐을 알 수 있다.

파라미터의 변화에 따른 ps의 특성은 그림 6과 같다. 그림 6에서  $\beta$ 의 증가에 따라 ps가 선형적으로 작아지고, 또한 차수의 증가에 따라 ps의 변화도 작아짐을 알 수 있다. 그림 5와 그림 6의 결과에서  $\beta$ 의 증가에 따라 김스현상은 저하되지만, 천이영역이 넓어짐을 알 수 있다.

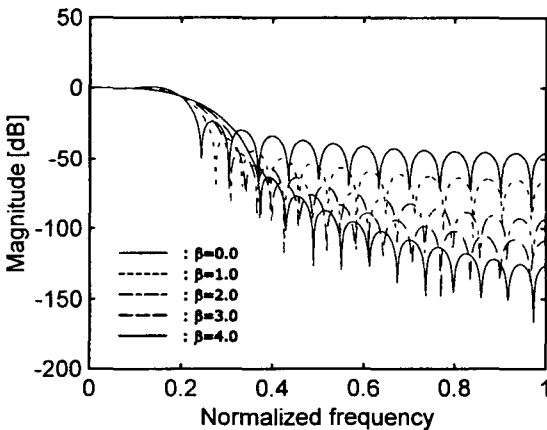


그림 4.  $w_{mh}(n)$ 을 사용한 저역통과필터  
Fig. 4. Low-pass filters using  $w_{mh}(n)$ .

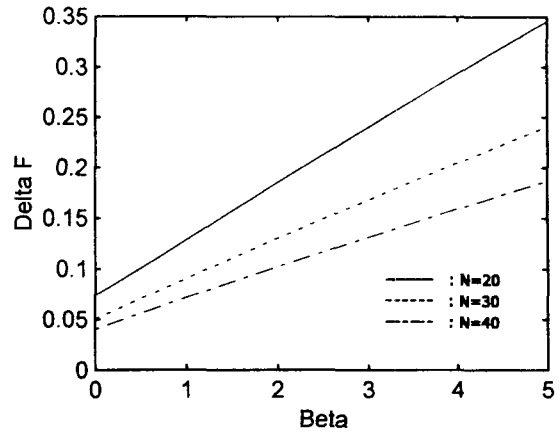


그림 5.  $\beta$ 에 따른  $\Delta F$   
Fig. 5.  $\Delta F$  with  $\beta$ .

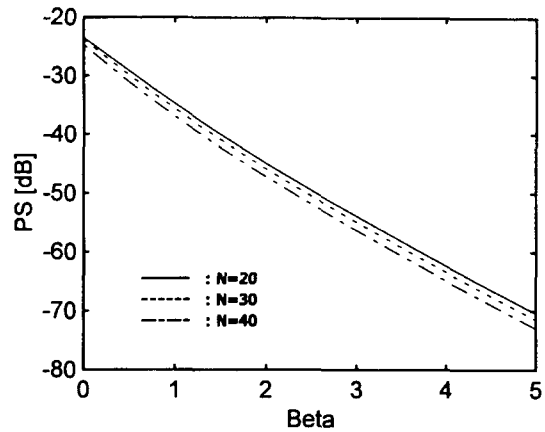


그림 6.  $\beta$ 에 따른 ps  
Fig. 6. ps with  $\beta$ .

#### IV. 시뮬레이션 결과

본 논문에서는 변형된 Hanning window를 사용한 디지털 필터의 특성을 시뮬레이션하였으며, 모양이 고정되어 있는 Hanning, Hamming, Blackman window 그리고 파라미터를 가변할 수 있는 Kaiser window를 사용한 디지털 필터와 그 특성을 비교하였다.

##### 1. 고정된 window를 사용한 필터와의 비교

그림 7은 Hanning window, Hamming window, 그리고 Blackman window들과 제시한 window ( $\beta = 1.5, 6$ )의 모양을 나타낸 것이며, 특성을 비교하기 위하여 차단주파수가 0.2이고, 차수가 20인 저역통과필터의 특성을 시뮬레이션한 것을 그림 8에 나타내었다.

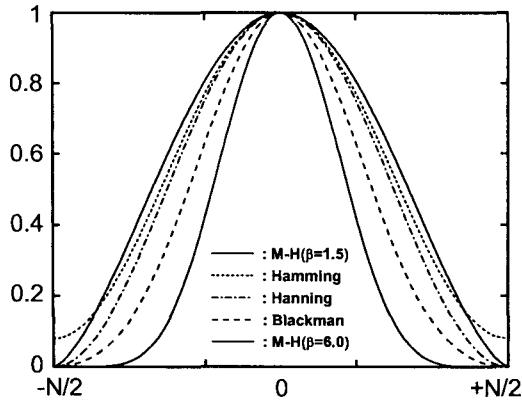


그림 7. 각 window의 비교  
Fig. 7. Comparison with each window.

그림 8에서, 제시한 window의  $\beta$ 가 1.5일 때, 천이영역의 상대적 특성이 가장 양호하였으며, ps는 Blackman window가 좋은 것으로 나타났다.

또한  $\beta$ 가 6일 때, 천이영역의 상대적 특성은 Hanning window가 가장 양호하고, ps는 제시한 window가 좋은 것으로 나타났다.

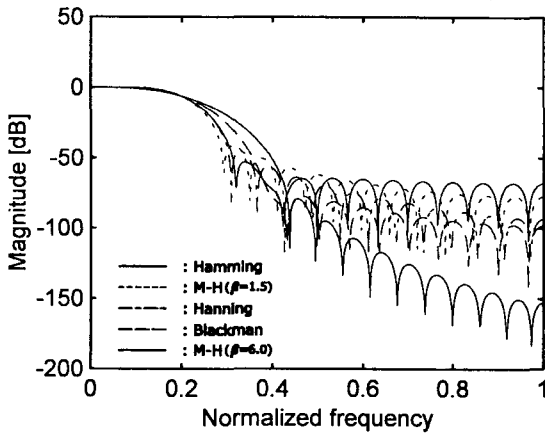


그림 8. 그림 7의 window를 사용한 LPF  
Fig. 8. LPF using of window shown by Fig. 7.

## 2. Kaiser window를 사용한 필터와의 비교

1차원의 Kaiser window  $w_{ks}(n)$ 은 식 (16)과 같으며,  $\beta$ 에 따른 Kaiser window의 모양은 그림 9와 같다.

$$w_{ks}(n) = \frac{I_0[\beta\sqrt{1-(n/N)^2}]}{I_0(\beta)}, \quad -N/2 \leq n \leq N/2 \quad (16)$$

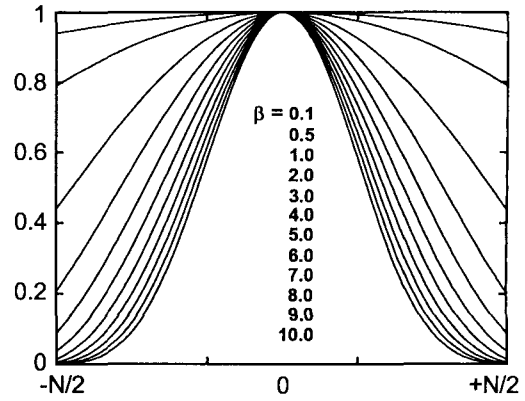


그림 9. Kaiser window의 모양  
Fig. 9. Shape of Kaiser window.

그림 2와 같이 제시한 window의  $\beta$ 가 변화할 때, main-lobe의 변화는 그림 9의 Kaiser window의  $\beta$ 에 따른 변화보다 더 완만하게 변화하며, 또한 Kaiser window가  $\beta$ 의 변화에 따라 side-lobe의 변화는 제시한 모델보다 더 민감하게 변화된다.

2차원 Kaiser window  $w_{ks}(m, n)$ 은 식 (16)으로부터 식 (13)을 이용하여 다음의 식 (17)로 된다.

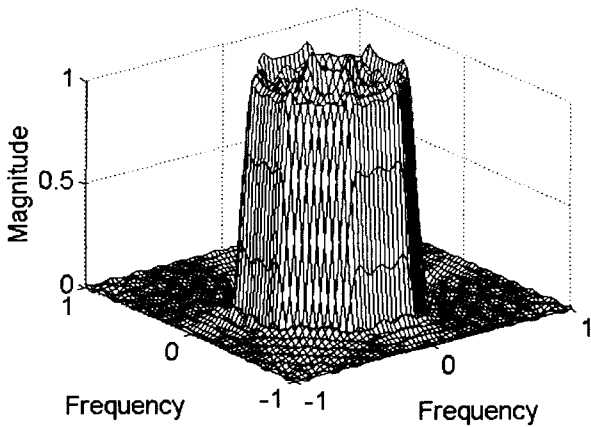
$$w_{ks}(m, n) = w_{ks}(n) \Big|_{n=\sqrt{m^2+n^2}} = \frac{I_0\left[\beta\sqrt{1-\frac{m^2+n^2}{N^2}}\right]}{I_0(\beta)} \quad (17)$$

그리고, 2차원의 변형된 Hanning window함수를 식 (15)의 형태로 표현하면 다음과 같다.

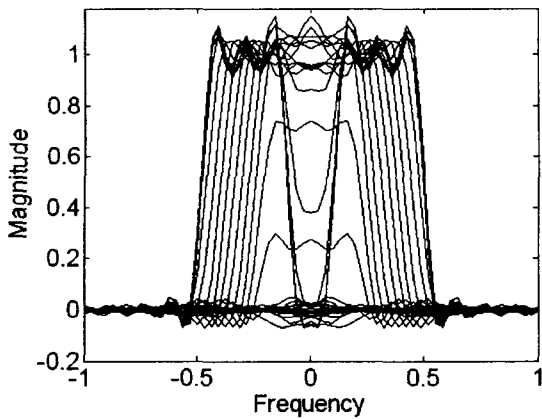
$$w_{mh}(m, n) = w_1(n) \Big|_{n=\sqrt{m^2+n^2}} = \sqrt{0.5(1+\cos(2\pi\sqrt{m^2+n^2}/N))}^\beta \quad (18)$$

변형된 Hanning window의 특성을 확인하기 위해 Kaiser window와 비교하였으며, 이 때  $\beta$ 는 1.5이며, 차수가 30인 2차원 디지털필터를 설계하여, 그 특성을 시뮬레이션하였다.

그림 10과 그림 11은  $F_L = 0.1$ ,  $F_H = 0.5$  이고,  $\beta$ 가 1.5일 때 Kaiser 및 변형된 Hanning window를 사용한 2차원 대역통과필터 특성을 시뮬레이션한 것이다. 그림 11의 2D-BPF와 LPF, HPF 그리고 BRF의 모든 경우에서, 제시한 window의  $\beta$ 가 변화할 때, main-lobe의 변화는 Kaiser window의  $\beta$ 에 따른 변화보다 더 완만하게 변화하며, Kaiser window의  $\beta$ 가 변화할 때, side-lobe의 변화는 제시한 모델보다 더 민감하게 변화되었다.



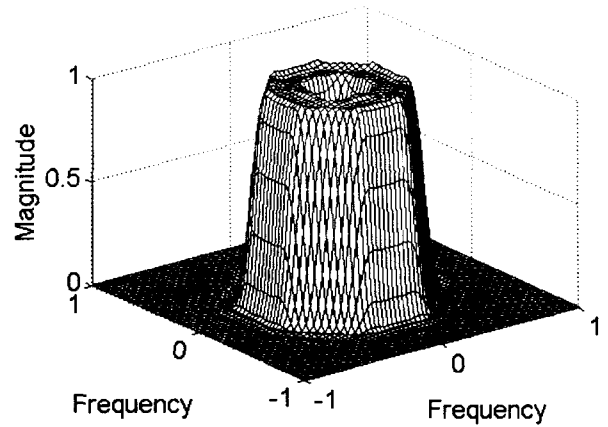
(a) 2D-BPF의 주파수 응답  
(a) Frequency response of 2D-BPF



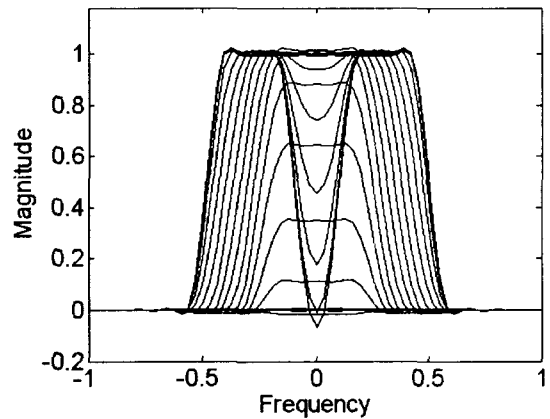
(b) (a)의 대역폭  
(b) Bandwidth of (a)

그림 10. Kaiser window를 사용한 2D-BPF의 주파수 응답 ( $\beta = 1.5$ )

Fig. 10. Frequency response of 2D-BPF using Kaiser window ( $\beta = 1.5$ ).



(a) 2D-BPF의 주파수 응답  
(a) Frequency response of 2D-BPF



(b) (a)의 대역폭  
(b) Bandwidth of (a)

그림 11. 변형된 Hanning window를 사용한 2D-BPF의 주파수 응답 ( $\beta = 1.5$ )

Fig. 11. Frequency response of 2D-BPF using Modified Hanning window ( $\beta = 1.5$ ).

그리고, 제시한 모델의  $\beta$ 에 따른  $\Delta F$ 와 리플의 특성을 비교해 볼 때,  $\beta$ 의 값이 큰 경우에는 제시한 모델과 Kaiser window의 형태가 비슷하였다. 그러나,  $\beta$ 가 작은 값일 경우에는 상이한 형태를 나타내며, 이러한 작은  $\beta$ 의 영역에서 제시한 모델은 Kaiser window 보다 더 우수한 리플과  $\Delta F$ 의 선형특성을 나타내고 있다.

다음의 표 1은  $\beta$ 에 따른 리플의 크기이며, LPF의 경우 차단주파수  $F_C=0.5$ 이며, BPF의 경우  $F_L=0.1$ ,  $F_H=0.5$ 이다.

표 1.  $\beta$ 에 따른 리플  
Table 1. Ripple with  $\beta$ .

Ripple [dB]	LPF		BPF	
	Kaiser	M-H	Kaiser	M-H
0.5	2.5519	1.2576	4.3994	1.5818
1.5	1.6867	0.3091	2.6197	0.2974
3.0	0.6097	0.0407	0.8190	0.0369

V. 결 론

본 논문에서는 설계 목적에 따라 융통성있게 선택이 가능한 파라미터를 부가한 변형된 Hanning window를 설계하였다. 타당성을 입증하기 위해, 기존의 Hamming, Hanning, Blackman, Kaiser window 함수를 사용한 디지털 필터와 비교하였으며, 성능평가의 판단 기준으로 peak side-lobe와 천이특성 등을 사용하였다.

시뮬레이션 결과, 제시한 모델은 파라미터 증가에 따라 peak side-lobe 특성은 양호하게 되었으나, 천이특성은 다소 나쁘게 되었다. 그러나, 파라미터 증가에 따른 peak side-lobe와 천이특성의 직선성이 우수하여, 제시한 window함수를 사용한 디지털필터는 각종 통신, 방송기기, CATV 분야 등에 적용되리라 사료된다.

접수일자 : 2003. 1. 08      수정완료 : 2003. 1. 20

이 논문은 1997년도 부경대학교 기성회 연구비의 지원에 의하여 연구되었음

참 고 문 헌

- [1] Abraham Peled, Bede Liu, "Digital Signal Processing", John Wiley & Sons, Inc., 1976.
- [2] R. W. Hamming, "Digital Filters", Prentice-Hall, Inc., 1989.
- [3] Leland B. Jackson, "Digital Filters and Signal Processing", Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [4] M. T. Jong, "Methode of Discrete Signal and System Analysis", McGraw-Hill, Inc., 1982.



강 경 덕(Kyeong-Deog Kang)  
準會員

1995년 2월 부경대학교 공과대학 제어계측공학과 졸업(공학사)  
1998년 8월 부경대학교 산업대학원 제어계측공학과 졸업(공학석사)  
2003년 3월~현재 부경대학교 대학원

제어계측공학과 박사과정  
1980년 6월~현재 한국방송공사 기술총국 기술국 부장  
관심분야 : 통신 및 신호처리



배 상 범(Sang-Bum Bae)  
準會員

1999년 8월 부경대학교 공과대학 제어계측공학과 졸업(공학사)  
2002년 2월 부경대학교 대학원 제어계측공학과 졸업(공학석사)

2002년 3월~현재 부경대학교 대학원 제어계측공학과 박사과정

관심분야 : 통신 및 신호처리



김 남 호(Nam-Ho Kim)  
正會員

1984년 2월 영남대학교 전자공학과 졸업(공학사)

1986년 2월 영남대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)

1991년 8월 영남대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)

1992년 3월~현재 부경대학교 공과대학 전기제어계측공학부 부교수

1999년 6월~현재 한국통신학회 부산·경남지부 총무이사

1999년 3월~현재 한국해양정보통신학회 편집위원

관심분야 : 회로 및 시스템, 신호처리



류 지 구(Ji-Goo Ryu)  
正會員

1977년 2월 동아대학교 전자공학과 졸업(공학사)

1979년 2월 동아대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)

1992년 8월 영남대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)

1979년 3월~현재 부경대학교 전자정보통신공학부 교수

1989년 1월~1990년 1월 일본 도요하시 기술과학대학 반도체 group 객원 연구원

관심분야 : 반도체 센서 및 집적화