

내부유동을 갖는 파이프 진동의 스펙트럴요소해석

오혁진* · 강관호** · 이우식†

(2002년 6월 5일 접수, 2002년 12월 31일 심사완료)

Spectral Element Vibration Analysis of the Pipeline Conveying Internal Flow

Hyuckjin Oh, Kwanho Kang and Usik Lee

Key Words : Pipe(파이프), Vibration(진동), Internal Flow(내부유동), Spectral Element Method (스펙트럴요소법), (Critical Flow Velocity)임계유동속도

Abstract

It is often important to accurately predict the flow-induced vibration or dynamic instability of a pipeline conveying internal high speed flow in advance, which requires a very accurate solution method. In this study, first the dynamic equations for the axial and transverse vibrations of a pipeline are reduced from a set of pipe-dynamic equations derived in the previous study and then the spectral element model is formulated. The accuracy of the spectral element method (SEM) is then verified by comparing its results with the results obtained by finite element method (FEM). It is shown that the present spectral element model provides very accurate solutions by using an extremely small number of degrees-of-freedom when compared with FEM. The dynamics of a sample pipeline is investigated with varying the axial tension and the speed of internal flow

1. 서론

유체를 고속으로 전송하는데 사용되는 파이프계는 파이프 내부의 유체 특성 변화에 따라서 심각한 유체유발 진동을 겪을 수 있으며, 이로 인하여 파이프 구조나 파이프 지지부가 파괴되기도 한다. 내부에 유체를 전송하는 파이프 진동문제의 예로서 지상에 설치된 각종 산업시설내의 파이프계, 증기터빈 내부의 튜브, 그리고 대형 액체추진 로켓의 파이프계 등을 생각할 수 있다.

파이프의 유체유발 진동에 대한 연구는 1950년 Trans-Arabian 파이프 라인의 진동을 규명하기 위해 Ashley 등⁽¹⁾이 수행한 것이 처음이다. 이후에, Housner⁽²⁾가 유체에 의한 코리올리(Coriolis)력의 영향을 포함시켜 물리적으로 보다 타당한 파이프의 횡방향 진동방정식을 유도하였다. 외관보 형태

의 파이프에 대한 연구는 Long⁽³⁾의 연구가 처음이며, Chen⁽⁴⁾은 조화(harmonic)유동을 갖는 단순지지보의 안정성을 고찰하였다. Paidoussis 등⁽⁵⁾에 의해 그 동안의 연구들에 대한 종합 검토가 이루어졌으며, 특히 그들은 내부 유체의 가속력을 포함하는 파이프의 횡방향 진동방정식을 유도하였다. 대부분의 연구에서 구조와 유체 사이의 연성과 유속과 유압 사이의 유체 역학적 관계를 고려하지 않은 매우 단순화된 동역학 모델을 사용하였다. Wiggert 등⁽⁶⁾과 Lesmez 등⁽⁷⁾이 Poisson효과에 의한 유압과 파이프의 축방향 변위 사이의 연성효과를 축방향 진동에 고려하였으나 횡방향 진동에는 구조와 유체 사이의 연성이 전혀 고려되지 않았다. Semler 등⁽⁸⁾도 파이프의 축방향 진동을 포함하여 횡방향 진동에 대한 비선형 운동방정식을 유도하였으나 유체의 동특성 변화가 제대로 반영되지 못하였다. 구조와 유체 사이의 연성과 유체의 동특성 변화가 보다 사실적으로 고려된 파이프의 축방향 및 횡방향 운동방정식과 유체의 연속체 및 모멘텀 식이 Lee 등^(9,10)에 의해 처음으로 유도되었으며, 그 이후 Gorman 등⁽¹¹⁾이 파이프 반경방향 진동에 대한

* 인하대학교 기계공학과

** 인하대학교 기계공학과

† 책임저자, 회원, 인하대학교 기계공학과

E-mail : ullee@inha.ac.kr

TEL : (032)860-7318 FAX : (032)866-1434

운동방정식을 추가하였다.

파이프의 유체유발 진동을 해석하기 위하여 많은 연구자들이 지금까지 사용해온 해석법으로는 Galerkin method,^(2,4,5,9) 특성변환법(characteristics transformation method),⁽⁶⁾ 전달행렬법(transfer matrix method),⁽⁷⁾ 유한요소법(FEM),⁽¹⁰⁾ 유한차분법(FDM)⁽¹¹⁾ 등이 있다. 2 차원 내지는 3 차원 공간에 설치된 파이프계의 진동해석을 위하여는 현실적으로 유한요소법의 적용이 비교적 용이하다. 그러나, 유한요소법은 자체의 훌륭한 적용성에도 불구하고 고주파 영역에서 해의 신뢰성이 저하되는 단점이 있다. 유한요소법으로 보다 신뢰성 있는 해를 얻기 위해서는 일반적으로 보다 많은 유한요소 분할과 자유도를 사용해야 하므로 보다 이로부터 파생되는 문제점을 극복할 수 있는 효율적인 방안이 필요하다.

본 연구에서는 유한요소법의 이러한 단점을 대부분 극복하면서도 파이프계와 같이 1 차원 구조요소로 구성된 구조물에 보다 용이하게 사용할 수 있는 스펙트럴요소(spectral element)모델을 유도하고 이를 수치예제에 대한 스펙트럴요소해석을 통해 검증하였다.

2. 파이프계의 운동방정식

내부에 유체가 흐르는 파이프 요소에 대한 자유물체도를 Fig. 1에 보인 바와 같이 유체를 제거한 파이프 구조요소에 대한 자유물체도와 유체요소의 검사체적(control volume)에 대한 자유물체도로 분리하여 표현한 후, 뉴턴의 운동법칙을 적용하면 파이프 자체의 축방향 및 횡방향 운동방정식과 유체의 동특성 변화를 나타내는 유체의 연속방정식과 모멘트 평형식을 다음과 같이 유도할 수 있다.^(9,10)

$$EI_p w'''' + m\ddot{w} + mg_y + m_w(2c\dot{w}' + c^2 w'' + \dot{c}w' + cc'w') - (T_0 - pA)w'' + (p'A)w' - EA_p(u''w' + u'w'') = 0 \quad (1)$$

$$EA_p u'' - m\ddot{u} - mg_x - (p'A) + EI_p(w''''w' + w''w''') - m_w(\dot{c} + cc' + 2c\dot{u}' + c^2 u'' + \dot{c}u' + cc'u') = 0 \quad (2)$$

$$(\dot{p} + cp')A + m_w a^2 [c' - 2v(\dot{u}' + cu'')] = 0 \quad (3)$$

$$(p'A) + \tau S + (pA)w'^2 + (pA)w''w' + \tau S v'^2 + m_w(g_x + \dot{c} + cc' + \ddot{u} + 2c\dot{u}' + c^2 u'' + \dot{c}u' + cc'u') + m_w(g_y w' + \dot{w}w' + 2c\dot{w}'w' + c^2 w''w' + \dot{c}w'^2 + cc'w') = 0 \quad (4)$$

여기서, w 는 횡방향 변위, u 는 파이프의 축방향 변위, p 는 유체의 압력, c 는 유속을 나타낸다. A_p

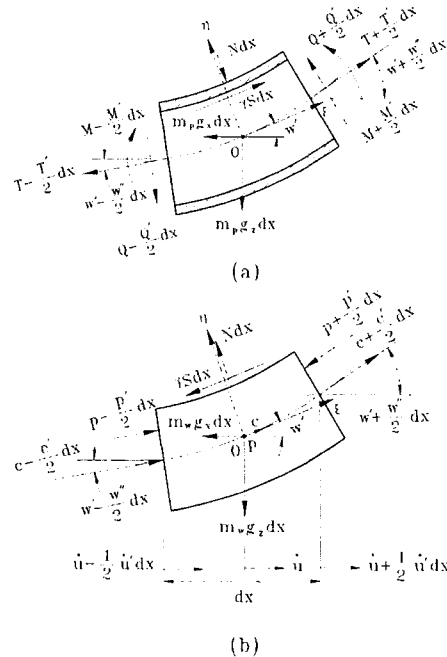


Fig. 1 Free body diagrams for (a) the pipe element and (b) the deformable moving control volume

와 I_p 는 각각 파이프의 단면적과 관성모멘트, A 는 접수면적, E 는 파이프의 탄성계수, ν 는 포아송비(Poisson ratio), m_p 와 m_w 는 각각 파이프와 유체의 단위 길이당의 질량이고 m 은 m_p 와 m_w 의 합이다. 또한, g_x 와 g_y 는 파이프의 초기 기울기에 따른 x -방향과 y -방향의 중력가속도 성분이고, τS 는 유체에 의해 파이프 벽면에 작용되는 단위 길이당의 점성 마찰력, T 는 축방향으로 작용하는 장력, a 는 유체의 파동속도이다.⁽¹²⁾

유속이 일정하다고 가정하고 (즉, $c = c_0$) 크기가 작은 비선형 항과 유체의 전달효과(convective effects)에 해당하는 항들을 무시하면 식 (1-4)를 다음과 같이 세 개의 식으로 간략화 할 수 있다.

$$EI_p w'''' + m\ddot{w} + mg_y + m_w(2c_0 \dot{w}' + c_0^2 w'') - (T - pA)w'' + p'A w' = 0 \quad (5)$$

$$EA_p u'' - m\ddot{u} - mg_x - m_w(2c_0 \dot{u}' + c_0^2 u'') - p'A = 0 \quad (6)$$

$$p'A + m_w \frac{f_s}{2D} [c_0] c_0 + m_w(g_x + g_y w' + \ddot{u}) = 0 \quad (7)$$

위 식에서 f_s 는 Darch-Weisbach 점성 마찰계수,⁽¹²⁾ D 는 파이프의 내경을 나타낸다. 식 (7)을 이용하여 식 (5)와 식 (6)의 $p'A$ 를 소거하고 파이프 내부의 유체의 압력을 일정하다고 가정하면 (즉, $p = p_0$), 유체의 압력 p_0 와 유속 c_0 가 반영된 파이프의 축방향과 횡방향 진동에 대한 운동방정식을 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$EI_p w'''' + m\ddot{w} + mg_1 + m_w(2c_0 \dot{w}' + c_0^2 w'') - (T - p_0 A)w'' - m_w g_1 w' - m_w \frac{f_s}{2D} |c_0| c_0 w' = 0 \quad (8)$$

$$EA_p u'' - m_p \ddot{u} - m_p g_1 - m_w(2c_0 \dot{u}' + c_0^2 u'') + m_w g_1 w' + m_w \frac{f_s}{2D} |c_0| c_0 = 0 \quad (9)$$

식 (8)과 식 (9)에서 진동응답 w, u 는 중력과 유속의 영향이 정적으로 작용하여 발생하는 정적 변위 w_s, u_s 와 동적변위 w_d, u_d 의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x,t) = w_s(x) + w_d(x,t) \quad (10)$$

$$u(x,t) = u_s(x) + u_d(x,t) \quad (11)$$

정적변위 w_s 와 u_s 는 다음식에 의해 결정된다.

$$EI_p w_s'''' + mg_1 + m_w c_0^2 w_s'' - (T - p_0 A)w_s'' - m_w g_1 w_s' - m_w \frac{f_s}{2D} |c_0| c_0 w_s' = 0 \quad (12)$$

$$EA_p u_s'' - m_p g_1 - m_w c_0^2 u_s'' + m_w g_1 w_s' + m_w \frac{f_s}{2D} |c_0| c_0 = 0 \quad (13)$$

식 (10), (11)을 식 (8), (9)에 대입하고 식 (12), (13)을 적용하면 동적변위 w_d, u_d 에 관한 지배방정식은 다음식으로 주어진다.

$$EI_p w_d'''' + m\ddot{w}_d + 2m_w c_0 \dot{w}_d' + m_w c_0^2 w_d'' - (T - p_0 A)w_d'' - m_w g_1 w_d' - m_w \frac{f_s}{2D} |c_0| c_0 w_d' = 0 \quad (14)$$

$$EA_p u_d'' - m_p \ddot{u}_d - 2m_w c_0 \dot{u}_d' - m_w c_0^2 u_d'' + m_w g_1 w_d' = 0 \quad (15)$$

파이프와 유체의 무게 및 유체에 의한 점성 마찰력에 의해 좌우되는 정적변위는 식 (12), (13)으로부터 동적변위와는 독립적으로 구할 수 있다. 따라서, 본 연구에서는 식 (14), (15)로부터 동적변위 w_d, u_d 을 구하기 위한 스펙트럴요소모델을 유도하였다.

3. 스펙트럴요소모델의 유도

내부에 유체가 흐르는 파이프 요소에 대한 스펙트럴요소모델은 유도하기 위하여 식 (14), (15)의 일반해를 다음과 같이 스펙트럴 형태 (spectral form)로 가정한다.

$$w_d(x,t) = \sum_{n=1}^N W_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad u_d(x,t) = \sum_{n=1}^N U_n(x) e^{i\omega_n t} \quad (16)$$

여기서, W_n 과 U_n 은 각각 횡방향과 축방향 동적변위에 대한 스펙트럴변위성분(spectral displacement components)를 나타내며 N 은 스펙트럴 변위성분의 수이다. 스펙트럴 변위성분이 계산되면 진동응답은 식 (16)에 의해 역푸리에변환(inverse FFT) 알

고리들을 활용하여 쉽게 계산할 수 있다. 아래에서는 편이상 식 (16)에서 사용된 스펙트럴 변위성분을 나타내는 아래 첨자 n 을 생략하였다. 식 (16)을 식 (14), (15)에 대입하고 정리하면 스펙트럴 변위성분에 대한 지배방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$EI_p W'''' - \omega^2 m W + (m_w c_0^2 - T)W'' + 2i\omega m_w c_0 W' - m_w \left(g_1 + \frac{f_s}{2D} |c_0| c_0 \right) W' = 0 \quad (17)$$

$$(EA_p - m_w c_0^2)U'' + \omega^2 m_p U - 2i\omega m_w c_0 U' + m_w g_1 W' = 0 \quad (18)$$

여기서 $i = \sqrt{-1}$ 이다. 식 (17), (18)의 일반해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$W(x) = \alpha_1 e^{ik_1 x} + \alpha_2 e^{ik_2 x} + \alpha_3 e^{ik_3 x} + \alpha_4 e^{ik_4 x} \quad (19)$$

$$U(x) = \beta_1 e^{ik_1 x} + \beta_2 e^{ik_2 x} + \beta_3 e^{ik_3 x} + \beta_4 e^{ik_4 x} + \beta_5 e^{ik_5 x} + \beta_6 e^{ik_6 x} \quad (20)$$

여기서 파수(wavenumbers) k_{wj} ($j = 1, 2, 3, 4$)와 k_{uj} ($j = 1, 2$)는 각각 다음의 분산관계식(dispersion relation)으로부터 계산된다.

$$EI_p k_w^4 - (m_w c_0^2 - T + p_0 A)k_w^2 - (2\omega m_w c_0 + i m_w g_1 + i m_w \frac{f_s}{2D} |c_0| c_0) k_w - \omega^2 m = 0 \quad (21)$$

$$(EA_p - m_w c_0^2) k_u^2 - 2\omega m_w c_0 k_u - \omega^2 m_p = 0 \quad (22)$$

식 (19), (20)을 식 (18)에 대입하면 상수 α_j ($j = 1, 2, 3, 4$)와 β_j ($j = 1, 2, 3, 4$) 사이의 관계식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\alpha_j = g_j \beta_j, \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (23)$$

여기서

$$g_j = \frac{(EA_p - m_w c_0^2) k_{wj}^2 - 2\omega m_w c_0 k_{wj} - \omega^2 m_p}{i m_w g_1 k_{wj}} \quad (24)$$

따라서, 식 (17), (18)의 일반해는 모두 6 개의 상수 β_j ($j = 1, 2, \dots, 6$)로 표현할 수 있으며 이들은 경계 조건으로부터 결정된다.

스펙트럴요소모델을 유도하기 위하여 길이가 l 인 파이프의 유한요소를 생각한다. 파이프의 유한요소 내부에서의 모멘트 M , 전단력 Q , 장력 T 는 재료역학적으로 변위 W, U 와 다음의 관계로 주어진다.

$$\begin{aligned} Q(x) &= EI_p W''''(x), \quad M(x) = EI_p W'''(x) \\ T(x) &= (EA_p - m_w c_0^2)U'(x) \end{aligned} \quad (25)$$

파이프 유한요소의 양단 절점(nodes) $x = 0$ 과 l 에

서의 절점력 (즉, 절점 모멘트, 전단력 및 장력)은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q(0), & M_1 &= M(0), & T_1 &= -T(0) \\ Q_2 &= -Q(l), & M_2 &= -M(l), & T_2 &= T(l) \end{aligned} \quad (26)$$

위에서 (-)부호는 유한요소법에서 일반적으로 사용하는 절점력의 부호를 스펙트럴요소모델의 유도에서도 동일하게 사용하기 때문에 고려된 것이다. 식 (19), (20)을 식 (25)에 적용하고 이를 다시 식 (26)에 적용하면 절점력과 상수 β_j ($j=1,2,\dots,6$)와의 관계식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$f(\omega) = H(\omega) \beta \quad (27)$$

여기서,

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \{ Q_1, M_1, T_1, Q_2, M_2, T_2 \}^T \\ \beta &= \{ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6 \}^T \\ H(\omega) &= \begin{bmatrix} -b_1 g_1 & -b_1 g_2 & 0 & -b_2 g_1 & -b_2 g_2 & 0 \\ -q_1 g_1 & -q_1 g_2 & 0 & -q_2 g_1 & -q_2 g_2 & 0 \\ -ik_r e^{ik_r x} & -ik_r e^{-ik_r x} & -ik_r & -ik_r e^{ik_r x} & -ik_r e^{-ik_r x} & -ik_r \\ b_1 g_1 e^{ik_r x} & b_1 g_2 e^{ik_r x} & 0 & b_2 g_1 e^{ik_r x} & b_2 g_2 e^{ik_r x} & 0 \\ q_1 g_1 e^{ik_r x} & q_1 g_2 e^{ik_r x} & 0 & q_2 g_1 e^{ik_r x} & q_2 g_2 e^{ik_r x} & 0 \\ ik_r e^{ik_r x} & ik_r e^{-ik_r x} & ik_r e^{ik_r x} & ik_r e^{ik_r x} & ik_r e^{-ik_r x} & ik_r e^{ik_r x} \end{bmatrix} \quad (28) \\ b_j &= ik_w^3 EI_p, \quad q_j = k_w^2 EI_p \quad (j=1, 2, 3, 4) \\ r &= EA_p - m_w c_p^2 \end{aligned}$$

파이프 유한요소의 양단 절점에서의 변위 W_i , U_i 와 기울기 Θ_i 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} W_1 &= W(0), & \Theta_1 &= W'(0), & U_1 &= U(0) \\ W_2 &= W(l), & \Theta_2 &= W'(l), & U_2 &= U(l) \end{aligned} \quad (29)$$

식 (19), (20)을 식(29)에 적용하면 절점자유도 W_i , Θ_i , U_i 와 상수 β_j ($j=1, 2, \dots, 6$)와의 관계를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$d(\omega) = G(\omega) \beta \quad (30)$$

여기서,

$$\begin{aligned} d(\omega) &= \{ W_1, \Theta_1, U_1, W_2, \Theta_2, U_2 \} \\ G(\omega) &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & 0 & g_3 & g_4 & 0 \\ ik_{w1} g_1 & ik_{w2} g_2 & 0 & ik_{w1} g_3 & ik_{w2} g_4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ g_1 e^{ik_r x} & g_2 e^{ik_r x} & 0 & g_3 e^{ik_r x} & g_4 e^{ik_r x} & 0 \\ ik_{w1} g_1 e^{ik_r x} & ik_{w2} g_2 e^{ik_r x} & 0 & ik_{w1} g_3 e^{ik_r x} & ik_{w2} g_4 e^{ik_r x} & 0 \\ e^{ik_r x} & e^{ik_r x} & e^{ik_r x} & e^{ik_r x} & e^{ik_r x} & e^{ik_r x} \end{bmatrix} \quad (31) \end{aligned}$$

식 (28)과 (30)으로부터 상수벡터 β 를 소거하면 파이프 유한요소에 대한 절점력 벡터와 절점자유도 벡터와의 관계를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$f(\omega) = H(\omega)G(\omega)^{-1} d(\omega) \equiv s(\omega) d(\omega) \quad (32)$$

여기서, 행렬 $s(\omega)$ 가 내부에 유체가 흐르는 파이프에 대한 스펙트럴요소행렬로서 주파수의 함수이다.

스펙트럴요소법(SEM)에서도 유한요소법에서와 마찬가지로 필요에 따라서 해석하고자 하는 파이프계를 여러 개의 유한요소로 분할하고 각 유한요소에 대한 스펙트럴요소행렬을 어셈블한 후 경계조건을 부가하여 전체 시스템에 대한 지배방정식을 다음식의 형태로 유도할 수 있다.

$$f_x(\omega) = S(\omega) d_x(\omega) \quad (33)$$

여기서 f_x 와 d_x 는 전체 시스템에 대한 절점력 벡터와 절점자유도 벡터, 행렬 $S(\omega)$ 는 전체 시스템에 대한 스펙트럴행렬을 나타낸다. 전체 시스템에 대한 고유진동수는 행렬 $S(\omega)$ 의 행렬식(determinant)가 영이 되는 조건 (즉 $|S(\omega)|=0$)으로부터 구한다.

4. 수치예제 및 고찰

수치예제로서 내부에 유체가 흐르는 양단이 단 순지지된 균일한 파이프계를 생각하였다. 파이프의 길이는 362 mm, 내경은 6.0 mm, 두께는 1.85 mm, 탄성계수는 $2.092 \times 10^6 Pa$, 파이프의 단위 길이당 질량은 0.0515 kg/m, 유체의 단위 길이당 질량은 0.0283 kg/m 이다.

본 연구에서 유도된 스펙트럴요소모델의 신뢰성을 검증하기 위하여 스펙트럴요소해석 결과를 유한요소해석 결과와 비교하였다. 유한요소해석을 위한 유한요소모델을 유도하기 위하여 파이프 유한요소내의 변위장(displacement fields)을 다음과 같이 가정하였다.

$$u_j(x,t) = N_u(x) d_u(t), \quad w_j(x,t) = N_w(x) d_w(t) \quad (34)$$

여기서,

$$\begin{aligned} N_u(x) &= [1 - \xi, \xi] \\ N_w(x) &= [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, -\xi + 2l\xi^2 - l\xi^3, \\ &\quad 3\xi^2 - 2\xi^3, l\xi^2 - l\xi^3] \\ d_u &= \{ U_1, U_2 \}^T, \quad d_w = \{ W_1, \Theta_1, W_2, \Theta_2 \}^T \end{aligned} \quad (35)$$

$N_u(x)$ 와 $N_w(x)$ 는 형상함수 행렬이고 $\xi = x/l$ 이다. 식 (34)의 변위장을 이용하여 일반적인 유한요소모델 유도과정을 통해 다음과 같은 시스템 방정식을 유도하여 사용하였다.

$$M \ddot{d} + C \dot{d} + K d = f \quad (36)$$

식 (36)의 각 행렬은 부록에 나타내었다.

먼저, 본 연구에서 유도한 스펙트럴요소모델을 검증하기 위하여 스펙트럴요소법과 유한요소법으로 구한 고유진동수를 비교하였다. Table 1 은 파이프의 내부에 유체가 존재하지 않는 경우, 파이프

Table 1 Natural frequencies of the pipeline without fluid obtained by SEM and FEM with varying axial tension

Tension T (N)	Natural Frequency (rad/s)	SEM	FEM		
		1 element (4 DOFs)	50 elements (151 DOFs)	20 elements (61 DOFs)	10 elements (31 DOFs)
0	ω_1	9.247	9.247	9.247	9.247
	ω_3	83.224	83.224	83.227	83.268
	ω_{10}	924.708	924.807	928.358	1026.350
4.95	ω_1	85.592	85.592	85.592	85.592
	ω_3	268.498	268.498	268.499	268.514
	ω_{10}	1256.642	1256.712	1259.433	1336.793
7.63	ω_1	106.048	106.048	106.048	106.048
	ω_3	327.677	327.677	327.678	327.692
	ω_{10}	1403.982	1404.044	1406.530	1477.907

Table 2 Natural frequencies of the pipeline with internal flow (axial tension $T=7.63$ N) obtained by SEM and FEM

Flow Speed C_0 (m/s)	Natural Frequency (rad/s)	SEM	FEM		
		1 element (4 DOFs)	50 elements (151 DOFs)	20 elements (61 DOFs)	10 elements (31 DOFs)
0.0	ω_1	85.204	85.204	85.204	85.204
	ω_3	263.271	263.271	263.271	263.282
	ω_{10}	1126.000	1128.071	1130.068	1187.416
3.07	ω_1	83.205	83.205	83.205	83.205
	ω_3	257.814	257.814	257.815	257.832
	ω_{10}	1117.232	1117.286	1119.426	1178.042
16.5	ω_1	0.000	0.000	0.000	0.000
	ω_3	60.478	60.406	60.434	60.837
	ω_{10}	796.240	796.448	803.627	904.034
20.0	ω_1	0.000	0.000	0.000	0.000
	ω_3	35.382	36.924	37.843	45.556
	ω_{10}	616.636	616.946	627.279	753.277

에 작용하는 장력을 변화시키면서 계산한 고유진동수를 보이고 있다. 반면에, Table 2 는 일정한 장력 $T = 7.63$ N 을 받고 있는 파이프의 내부에 유속이 존재하는 경우, 유속의 크기를 증가시면서 계산한 고유진동수를 보이고 있다. 고유진동수를 계산하기 위해서 스펙트럴요소해석에서는 한 개만의 유한요소(4 자유도)를 사용하였고, 유한요소해

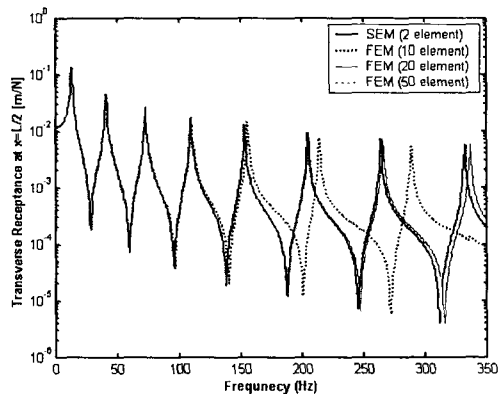
석에서는 유한요소의 개수를 10 개(31 자유도)에서 50 개(151 자유도)로 점차 증가시키면서 계산하였다. Table 1 과 Table 2 로부터 유한요소해석에서 유한요소의 개수를 증가시키면서 구한 고유진동수가 단 하나의 유한요소를 이용하여 스펙트럴요소해석으로 구한 고유진동수의 값으로 점차 수렴해 가지만 고주파 모드의 경우 그 수렴도가 상

대적으로 낮음을 확인할 수 있다. 이는 유한요소법으로 보다 정확한 고유진동수를 구하기 위하여 고주파에서 보다 많은 유한요소 분할이 요구됨을 의미한다.

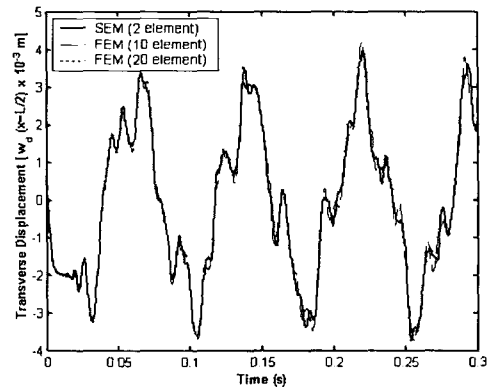
다음으로, 유속이 $c_0 = 3.07 \text{ m/s}$ 이고 장력이 $T = 7.63 \text{ N}$ 일때 스펙트럴요소법과 유한요소법으로 구한 주파수응답함수 리셉턴스(receptance)와 진동응답을 Fig. 2 와 Fig. 3 에 각각 비교하였다. 진동응답을 얻기 위해 파이프의 중앙 위치 (즉, $x=L/2$)에 단위 충격력을 가하였다. 이 경우, 스펙트럴요소해석에서 하중이 가해진 위치에 새로운 절점의 추가가 필요하므로 본 해석에서는 총 2 개의 유한요소를 사용하였다. Fig.2 는 파이프의 중앙 위치에서 계산된 횡방향 및 축방향 리셉턴스를 나타내고 Fig. 3 은 동일한 위치에서의 진동응답을 나타낸다. 고유진동수의 경우와 마찬가지로, 주파수응답함수와 진동응답의 경우에 있어서도 유한요소해석에서

유한요소의 수를 증가시키면서 구한 진동특성이 총 2 개만의 유한요소를 사용하여 스펙트럴요소해석으로 구한 결과로 점차 수렴해감을 확인할 수 있다. 이는 본 연구에서 유도한 스펙트럴요소모델의 높은 엄밀성을 입증한다. Fig. 2 에서 유한요소해석으로 구한 주파수응답함수를 스펙트럴요소해석으로 구한 결과와 비교할 때 저주파 영역 보다는 고주파 영역에서 보다 큰 오차가 있음을 확인할 수 있다. 이는 유한요소모델에 대한 스펙트럴요소모델의 상대적 우수성이 고주파 영역에서 보다 크게 나타남을 보인다.

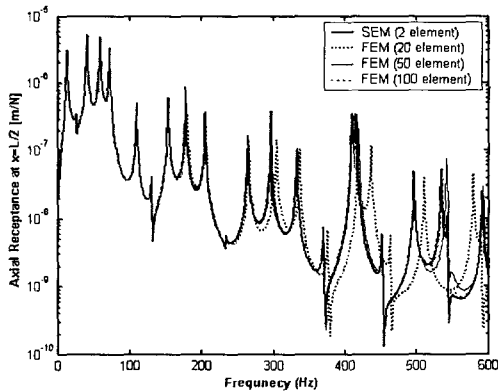
Table 1 과 Table 2 에서 추가로 고찰할 수 있는 점은 다음과 같다. 파이프계의 고유진동수는 파이프에 작용하는 장력을 증가시키는 경우 일반적으로 점차 증가하고, 유속을 증가시키는 경우에는 반대로 점차 감소한다. 이와 같은 현상은 Fig. 4(a)와 Fig. 5(a)의 주파수 응답함수를 통해서도 관찰할 수



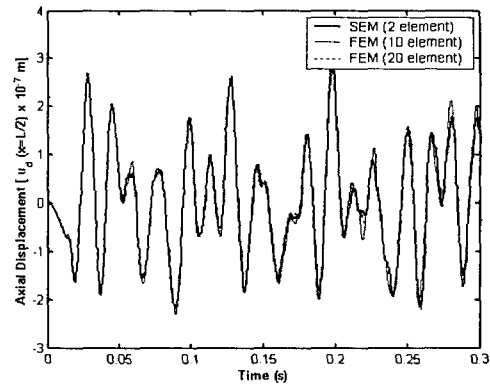
(a) Transverse receptance



(a) Transverse displacement



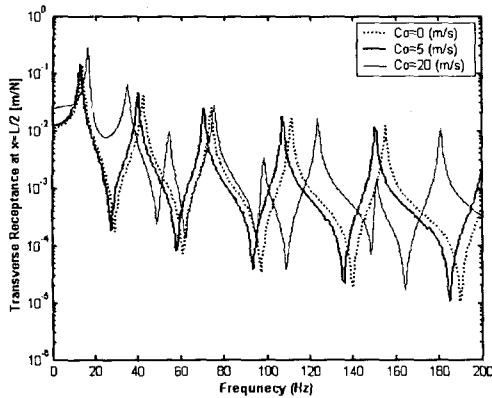
(b) Axial receptance



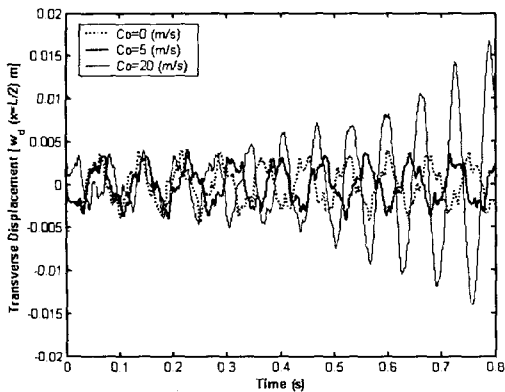
(b) Axial displacement

Fig. 2 Comparison of the frequency response functions (receptances) at the middle of pipeline obtained by SEM and FEM: $c_0 = 3.07 \text{ m/s}$, $T = 7.63 \text{ N}$

Fig. 3 Comparison of the time responses at the middle of pipeline obtained by SEM and FEM: $c_0 = 3.07 \text{ m/s}$, $T = 7.63 \text{ N}$



(a) Transverse receptance



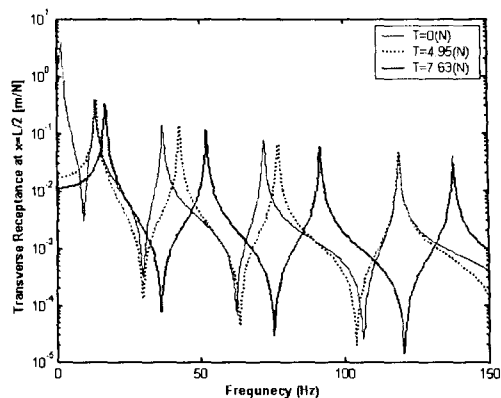
(b) Transverse time response

Fig. 4 Comparison of the frequency response functions (receptances) and time responses at the middle of pipeline obtained by SEM with varying internal flow velocity at tension $T=7.63$ N

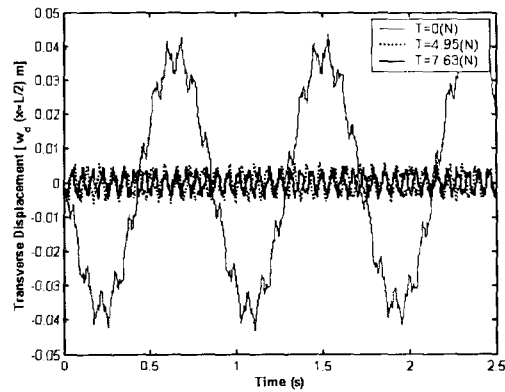
있다. Table 2 에서 유속이 증가함에 따라서 첫번째 고유진동수의 값이 점차 감소하다가 임계속도인 약 16.5 m/s 에 이르면 완전히 사라지는 것을 관찰할 수 있다. 이는, 식 (17)에서 유속이 마치 파이프에 작용하는 압축력과 같은 역할을 하기 때문에 고유진동수를 감소시키는 결과이다.

Fig. 4(b)는 유속이 임계속도 이상인 경우 동적 불안정 현상이 나타날 수 있음을 보인다. 본 예제의 임계속도인 약 16.5 m/s 보다 낮은 유속에서는 횡방향 진동응답이 안정적이지만, 이 보다 높은 유속인 20 m/s 에서는 동적 불안정성을 보이면서 시간의 흐름에 따라 진동응답이 발산함을 확인할 수 있다.

Fig. 5 는 파이프에 작용하는 장력의 변화에 따른 주파수 응답함수와 진동응답의 변화를 보인다. 장력이 없는 경우 첫번째 주파수 성분이 지배적이어



(a) Transverse receptance



(b) Transverse time response

Fig. 5 Comparison of the frequency response functions (receptances) and time responses at the middle of pipeline obtained by SEM with varying the axial tension T

서 주기가 큰 진동응답이 발생하는 것을 Fig. 5(b)에서 관찰할 수 있다.

5. 결론

본 연구의 주요 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 횡방향 및 축방향 운동을 갖는 내부에 유동을 갖는 파이프에 대한 스펙트럴요소모델을 유도하였다.
- (2) 유한요소해석 결과와의 비교를 통해 유도된 스펙트럴요소모델의 엄밀성을 검증하였다. 유한요소해석법으로 유한요소의 수를 증가시키면서 구한 진동특성이 스펙트럴요소해석으로 구한 결과로 점차 수렴해감을 유속과 장력의 변화에 따라 확인하였다.
- (3) 유속이 임계속도에 이르면 첫번째 진동모드가 먼저 사라지고, 임계속도 이상의 유속에서 동

적불안정 현상이 발생함을 고찰하였으며, 장력이 존재하는 경우 임계속도가 증가함을 고찰하였다.

부 록

참고문헌

- (1) Ashley, H. and Havilandm G., 1950, "Bending Vibrations of a Pipeline Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, pp. 229~232.
- (2) Housner, G. W., 1952, "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, pp. 205~209.
- (3) Long, R. H., Jr., 1995, "Experimental and Theoretical Study of Transverse Vibration of a Tube Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 22, No. 1, pp. 65~68.
- (4) Chen, S. S. and Rosenberg, G. S., 1971, "Vibration and Stability of a Tube Conveying Fluid," USAEC Report ANL-7762, Argonne National laboratory, Argonne, IL.
- (5) Paidoussis, M. P. and Issid, N. T., 1974, "Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 33, No. 3, pp. 267~294.
- (6) Wiggert, D. C., Hatfield, F. J. and Stuckenbruck, S., 1987, "Analysis of Liquid and Structural Transients in Piping by the Method of Characteristics," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 109, pp. 161~165.
- (7) Lesmez, M. W., Wiggert, D. C. and Hatfield, F. J., 1990, "Modal Analysis of Vibrations in Liquid-Filled Piping Systems," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 112, pp. 311~318.
- (8) Semler, C., Li, G. X. and Paidoussis, M. P., 1994, "The Non-linear Equations of Motion of Pipes Conveying Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, No. 5, pp. 577~599.
- (9) Lee, U., Pak, C. H. and Hong, S. C., 1995, "The Dynamics of a Piping System with Internal Unsteady Flow," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 180, No. 2, pp. 297~311.
- (10) Lee, U. and Kim, J., 1999, "Dynamics of Branched Pipeline Systems Conveying Internal Unsteady Flow," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.121, pp. 114~122.
- (11) Gorman, D. G., Reese, J. M. and Zhang, Y. L., 2000, "Vibration of a Flexible Pipe Conveying Viscous Pulsating Fluid Flow," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 230, No. 2, pp. 379~392.
- (12) Wjlie, E. B. and Victor, L. S., 1993, *Fluid Transients in Systems*, Prentice-Hall, New Jersey.

$$M = \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & M_{ww} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{uu} & 0 \\ 0 & C_{ww} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} \\ 0 & K_{ww} \end{bmatrix}$$

$$M_{uu} = \frac{m_p l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{ww} = ml \begin{bmatrix} 13/35 & 11l/210 & 9/70 & -13l/420 \\ 11l/210 & l^2/105 & 13l/420 & -l^2/140 \\ 9/70 & 13l/420 & 13/35 & -11l/210 \\ -13l/420 & -l^2/140 & -11l/210 & l^2/105 \end{bmatrix}$$

$$C_{uu} = m_u c_0 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{ww} = \frac{m_u c_w}{30} \begin{bmatrix} -30 & 6l & 30 & -6l \\ -6l & 0 & 6l & -l^2 \\ -30 & -6l & 30 & 6l \\ 6l & l^2 & -6l & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{uw} = \frac{EA_p - m_u c_0^2}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{ww} = \frac{m_u g_1}{12} \begin{bmatrix} 6 & -l & -6 & l \\ 6 & l & -6 & -l \end{bmatrix}$$

$$K_{uu} = \begin{bmatrix} -\frac{6a_1}{5l} + \frac{a_2}{2} + \frac{12EI_p}{l^3} - \frac{11a_1}{10} - \frac{a_2 l}{10} + \frac{6EI_p}{10} & & & \\ -\frac{a_1}{10} + \frac{a_2 l}{10} + \frac{6EI_p}{l^2} & -\frac{2a_1 l}{15} + \frac{4EI_p}{l} & & \\ \frac{6a_1}{5l} + \frac{a_2}{2} - \frac{12EI_p}{l^3} & \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 l}{10} - \frac{6EI_p}{l^2} & & \\ -\frac{a_1}{10} - \frac{a_2 l}{10} + \frac{6EI_p}{l^2} & \frac{a_1 l}{30} - \frac{a_2 l^2}{60} + \frac{2EI_p}{l} & & \\ \frac{6a_1}{5l} - \frac{a_2}{2} - \frac{12EI_p}{l^3} & -\frac{a_1}{10} + \frac{a_2 l}{10} + \frac{6EI_p}{10} & & \\ \frac{a_1}{10} - \frac{a_2 l}{10} - \frac{6EI_p}{l^2} & \frac{a_1 l}{30} + \frac{a_2 l^2}{60} + \frac{2EI_p}{l} & & \\ -\frac{6a_1}{5l} + \frac{a_2}{2} + \frac{12EI_p}{l^3} & -\frac{11a_1}{10} - \frac{a_2 l}{10} + \frac{6EI_p}{10} & & \\ \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 l}{10} - \frac{6EI_p}{l^2} & -\frac{2a_1 l}{15} + \frac{4EI_p}{l} & & \end{bmatrix}$$

$$a_1 = m_u c_0^2 + p_0 A - T$$

$$a_2 = m_u \left(g_v + \frac{f_v |c_0| c_0}{2D} \right)$$