

유한요소-전달강성계수법을 이용한 평판 구조물의 강제진동해석

Forced Vibration Analysis of Plate Structures Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method

최 명 수[†]

Myung-Soo Choi

(2002년 8월 16일 접수 : 2003년 1월 22일 심사완료)

Key Words : Forced Vibration(강제진동), Transfer Stiffness Coefficient Method(전달강성계수법), Finite Element Method(유한요소법), Plate(평판), Frequency Response Analysis(주파수응답해석), Modal Analysis(모드해석)

ABSTRACT

The finite element method(FEM) is the most widely used and powerful method for structural analysis. In general, in order to analyze complex and large structures, we have used the FEM. However, it is necessary to use a large amount of computer memory and computation time for solving accurately by the FEM the dynamic problem of a system with many degree-of-freedom, because the FEM has to deal with very large matrices in this case. Therefore, it was very difficult to analyze the vibration for plate structures with a large number of degrees of freedom by the FEM on a personal computer. For overcoming this disadvantage of the FEM without the loss of the accuracy, the finite element-transfer stiffness coefficient method(FE-TSCM) was developed. The concept of the FE-TSCM is based on the combination of modeling technique in the FEM and the transfer technique in the transfer stiffness coefficient method(TSCM). The merit of the FE-TSCM is to take the advantages of both methods, that is, the convenience of the modeling in the FEM and the computation efficiency of the TSCM. In this paper, the forced vibration analysis algorithm of plate structures is formulated by the FE-TSCM. In order to illustrate the accuracy and the efficiency of the FE-TSCM, results of frequency response analysis for a rectangular plate, which was adopted as a computational model, were compared with those by the modal analysis method and the direct analysis method which are based on the FEM.

1. 서 론

기계나 구조물의 해석 및 설계를 위하여, 다양한 구조해석기법들이 제안되었고, 그 중에서 컴퓨터의 발달과 함께 현재 가장 널리 이용되고 있는 해석기법이 유한요소법이다. 유한요소법은 엄밀해(exact solution)

를 구하기 어려운 복잡한 기계나 구조물을 막대나 보, 판과 같은 기본적인 요소의 결합으로 모델링한 후, 근사해를 구하는 유용한 해석기법이다.

그러나 복잡한 구조물을 해석하거나 정밀한 동적 해석이 요구될 경우, 해석에 필요한 전체 자유도가 커지게 되고, 이는 수치계산에 사용될 행렬의 크기를 증가시켜, 계산시간이나 컴퓨터 메모리의 사용량을 급증하게 된다.⁽¹⁾ 유한요소법의 이러한 취약점을 극복하기 위하여, Dokainish,⁽²⁾ Doyle,⁽³⁾ Lee,⁽⁴⁾ Geradin,⁽⁵⁾ Yang⁽⁶⁾ 등 많은 연구자들은 다양한 해석기법을 연구

[†] 책임저자, 정회원, 부경대학교 기계공학부
E-mail : vibsound@hanmail.net
Tel : (051) 620-1577, Fax : (051) 620-1574

해 왔고, Kondou와⁽⁷⁾ Moon은⁽⁸⁾ 1차원적인 직선형 구조물을 대상으로 계산정도 및 계산시간 그리고 컴퓨터 메모리면에서 효과적인 전달강성계수법(transfer stiffness coefficient method)을 제안한 바 있다.

기계나 구조물에 조화적인 외력이 작용할 때, 정상상태의 응답인 주파수응답해석(frequency response analysis)은 자유진동해석 및 과도응답해석과 더불어 기계나 구조물의 설계시에 중요한 역할을 차지한다. 유한요소법으로 주파수응답과 같은 강제진동해석을 수행할 경우, 사용되는 방법으로는 모드해석법(modal analysis method)과 직접해석법(direct analysis method)의 두 종류가 있다.⁽⁹⁾

모드해석법은 고유치해석의 결과로 얻어지는 고유벡터를 이용하여 연성된 운동방정식을 독립된 방정식으로 비연성화하므로써, 외력에 의한 응답을 효과적으로 계산하는 방법이다. 그러나 일반적으로 모드해석법은 알고리즘의 특성상 모델링시에 다룰 수 있는 감쇠가 모드감쇠비(modal damping ratio)나 비례감쇠(proportional damping)로 제한된다. 반면에, 직접해석법은 해석 대상 계의 전체 자유도와 동일한 수의 연립 방정식을 행렬화하고, 이를 직접 풀므로써 응답을 구하는 방법이다. 이 방법은 알고리즘이 단순 명료하고, 모드해석법과 같이 고유치해석을 선행할 필요가 없다. 그리고 모드해석법과는 달리 해석 대상 계에 점성 감쇠요소가 불규칙적으로 다수 존재하는 경우에도 해석하기 쉬운 장점이 있다. 그러나 해석시에 소요되는 계산시간이 모드해석법에 비해 과도할 경우가 많은 것이 단점으로 지적되고 있다.

한편, 유한요소법에 근간을 두고 있는 모드해석법과 직접해석법으로 정확한 동적응답을 구하기 위해서, 가장 많이 사용되는 방법이 해석 대상 계의 모델링에서 분할수를 증가시키는 것이다. 그러나 분할수의 증가는 자유도의 증가로 연결되고, 이는 컴퓨터를 통한 수치해석시에 계산시간과 계산 메모리의 측면에서 문제가 될 수 있다. 따라서 워크스테이션이나 슈퍼 컴퓨터에 비해 상대적으로 사양이 취약한 퍼스널 컴퓨터에서 자유도가 큰 기계나 구조물을 해석하기 곤란할 경우가 많다.

저자는 직접해석법의 장점을 그대로 유지하면서도 계산시간을 획기적으로 줄일 수 있고, 특히 상대적으로 적은 계산 메모리를 갖는 퍼스널 컴퓨터상에서 전체 자유도가 큰 해석 대상 구조물의 강제진동해석을

수행하기 위하여, 유한요소-전달강성계수법을 개발하였다. 이 방법은 유한요소법의 모델링 기법과 전달강성계수법의 강성계수의 전달 기법을 접합한 방법으로써, 양 방법의 장점인 유한요소법의 모델링의 편의성과 전달강성계수법의 계산의 효율성을 모두 가지고 있다.

본 논문에서는 강제 조화외력을 받는 평판형 구조물에 대한 강제진동해석 알고리즘을 정식화한다. 그리고 사각평판 구조물을 대상으로 모드해석법, 직접해석법 그리고 유한요소-전달강성계수법으로 다양한 수치계산을 수행한 후, 계산의 정확성 및 해석에 소요된 계산시간을 비교·검토한다.

2. 정식화

2.1 사각평판 구조물의 모델링

사각평판과 기초지지요소(스프링, 감쇠기)로 구성되는 다양한 형태의 평판형 구조물을 단순화하여, Fig. 1과 같이 모델링한다. Fig. 1의 X, Y, Z축은 전체좌표계를 나타내고, 여기서 Z축 방향은 평판의 표면에 수직인 방향이다.

사각평판을 X축 방향으로 m 개의 스트립(strip)으로 분할한다. 이때, 스트립과 스트립 사이의 경계선을 절선(nodal line)이라 부르고, 평판의 좌단(시작단)으로부터 우단(끝단)까지의 각 절선을 순차적으로 절선 0, 절선 1, ..., 절선 m 이라 한다. 스트립은 Fig. 2와 같이 Y축 방향으로 $n-1$ 개의 사각판요소(rectangular plate element)로 구성되고, 사각판요소는 모서리에 4

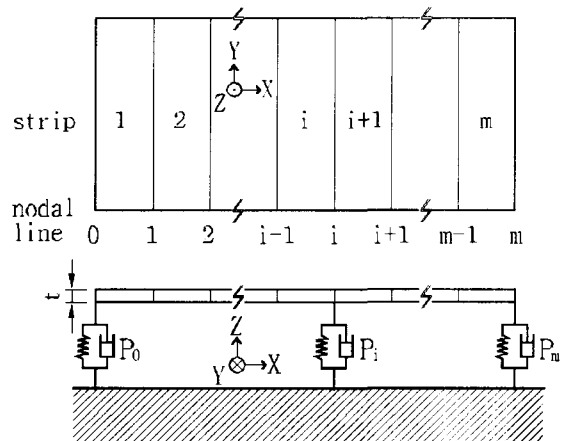


Fig. 1 Analytical model

개의 절점(node)을 가진다. 따라서 스트립 i 는 좌측 절선(절선 $i-1$)과 우측 절선(절선 i)에 각각 n 개의 절점을 가지므로, 총 $2n$ 개의 절점으로 구성된다. 그리고 평판에 작용하는 외력의 가진점과 평판과 기초 지지요소와의 결합점은 모두 절점상에 배치되도록 모델링한다.

본 해석기법에서는 경계조건을 기초지지 스프링으로 모델링한다. 예를 들면, 좌단의 경계조건이 고정인 경우에는 절선 0상의 모든 절점들이 병진 및 회전방향의 기초지지 스프링들로 지지되어 있는 것으로 고려하고, 이 스프링들의 스프링상수는 ∞ 가 된다. 좌단의 경계조건이 Z 축에 대한 회전만 자유로운 경우에는, 절선 0의 기초지지 스프링 중 Z 축 회전에 상응하는 스프링의 스프링상수는 0이 되고, 절선 0의 나머지 스프링의 스프링상수는 ∞ 가 된다.

2.2 스트립의 복소 동강성행렬

평판의 굽힘진동 해석을 위하여, 유한요소법의 4절점 사각판요소를⁽¹⁰⁾ 사용하면, 각 절점은 병진방향(Z 축)과 회전방향(X 축과 Y 축)의 3자유도를 가진다. 각 절점의 변위벡터 \tilde{u} 는 Z 축 방향의 처짐(w)과 X 축과 Y 축에 대한 각변위(θ_x, θ_y)로 구성되고, 절점의 힘벡터 \tilde{f} 는 Z 축 방향의 전단력(F_z)과 X 축과 Y 축에 대한 모멘트(M_x, M_y)로 구성된다.

사각판요소의 질량행렬(\tilde{m})과 강성행렬(\tilde{k}) 그리고 감쇠행렬(\tilde{c})를 가지고, 유한요소모델의 조립(assembly) 과정을 통하여 스트립 i 의 전체 질량행렬(\tilde{M}_i)과 강성행렬(\tilde{K}_i) 그리고 감쇠행렬(\tilde{C}_i)을

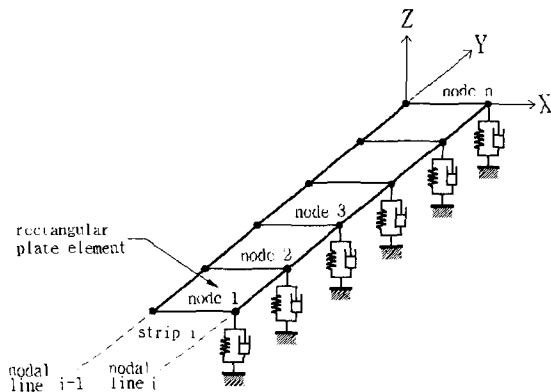


Fig. 2 Strip i and base support elements

구할 수 있다. 따라서 스트립 i 좌우측의 변위벡터(\tilde{U}_i)와 힘벡터(\tilde{F}_i) 사이의 관계를 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{K}_i \tilde{U}_i + j\omega \tilde{C}_i \tilde{U}_i - \omega^2 \tilde{M}_i \tilde{U}_i = \tilde{F}_i \quad (1)$$

여기서 ω 는 각진동수, j 는 허수단위(imaginary unit), \tilde{U}_i 와 \tilde{F}_i 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i &= {}^T \{ \tilde{U}_i^L, \tilde{U}_i^R \}, \quad \tilde{F}_i = {}^T \{ \tilde{F}_i^L, \tilde{F}_i^R \} \\ \tilde{U}_i^L &= {}^T \{ \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n \}_i^L, \\ \tilde{U}_i^R &= {}^T \{ \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n \}_i^R, \\ \tilde{F}_i^L &= {}^T \{ \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n \}_i^L, \\ \tilde{F}_i^R &= {}^T \{ \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n \}_i^R \end{aligned} \quad (2)$$

그리고 상첨자 L 과 R 은 스트립의 좌측과 우측을 뜻하고, T 는 행렬의 전치(transpose)를 뜻한다. 그리고 하첨자 i 는 i 번째 스트립을 의미한다.

식 (1)을 행렬의 크기가 $6n \times 6n$ 인 스트립의 복소 동강성행렬 \tilde{S}_i 로 나타내면 다음식과 같다.

$$\tilde{S}_i \tilde{U}_i = \tilde{F}_i \quad (3)$$

여기서 \tilde{S}_i 는

$$\tilde{S}_i = \tilde{K}_i + j\omega \tilde{C}_i - \omega^2 \tilde{M}_i \quad (4)$$

이고, 스트립 i 의 복소 동강성행렬 \tilde{S}_i 를 부분행렬(submatrix) $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i$ 로 분할하면, 식 (3)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_i^L \\ \tilde{F}_i^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & \tilde{B}_i \\ \tilde{C}_i & \tilde{D}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_i^L \\ \tilde{U}_i^R \end{bmatrix} \quad (5)$$

2.3 절선강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식

2.2절에서는 유한요소법의 모델링 과정을 이용하여 스트립의 복소 동강성행렬을 유도하였다. 지금부터는 전달강성계수법의 전달개념을 도입하므로, 해석 알고리즘의 이해를 돕기 위하여, 스트립의 관점에서 절선의 관점으로 바꾸어 생각한다. 따라서, Fig. 1에서 절선 i 의 좌측에 스트립 i 가 위치하고 절선 i 의 우측

에 스트립 $i+1$ 이 위치하게 된다.

절선 $i-1$ 우측과 절선 i 좌측의 상태량벡터 사이의 관계는 식 (5)로부터 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i-1} \\ \overline{\mathbf{F}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i-1} \\ \overline{\mathbf{U}}_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i-1} &= -\hat{\mathbf{F}}_i^L, \overline{\mathbf{F}}_i = \hat{\mathbf{F}}_i^R, \\ \mathbf{U}_{i-1} &= \hat{\mathbf{U}}_i^L, \overline{\mathbf{U}}_i = \hat{\mathbf{U}}_i^R, \\ \mathbf{A}_i &= -\hat{\mathbf{A}}_i, \mathbf{B}_i = -\hat{\mathbf{B}}_i, \\ \mathbf{C}_i &= \hat{\mathbf{C}}_i, \mathbf{D}_i = \hat{\mathbf{D}}_i \end{aligned} \quad (7)$$

이고, 하첨자 i 는 절선 i 또는 i 번째 스트립에 관한 물리량을 나타내고, 동일 기호 위에 $\hat{}$ 를 붙인 것은 절선 좌측의 상태량, 붙이지 않은 것은 절선 우측의 상태량을 나타낸다.

절선 i 좌측의 힘벡터 $\overline{\mathbf{F}}_i$ 와 변위벡터 $\overline{\mathbf{U}}_i$ 사이의 관계를 다음식과 같이 정의한다.

$$\overline{\mathbf{F}}_i = \overline{\mathbf{S}}_i \overline{\mathbf{U}}_i + \overline{\mathbf{E}}_i \quad (8)$$

여기서 크기가 $3n \times 3n$ 인 행렬 $\overline{\mathbf{S}}_i$ 와 $3n \times 1$ 인 벡터 $\overline{\mathbf{E}}_i$ 를 절선 i 좌측의 절선강성계수행렬(nodal line stiffness coefficient matrix)과 힘보정벡터(force corrective vector)라 부른다. 그리고 절선 i 의 우측에서도 힘벡터 \mathbf{F}_i 와 변위벡터 \mathbf{U}_i 사이의 관계를 절선 i 우측에서의 절선강성계수행렬 \mathbf{S}_i 와 힘보정벡터 \mathbf{E}_i 를 이용하여 다음식과 같이 정의한다.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{E}_i \quad (9)$$

절선 $i-1$ 우측의 절선강성계수행렬 \mathbf{S}_{i-1} 과 힘보정벡터 \mathbf{E}_{i-1} 을 이용하여 절선 i 좌측의 $\overline{\mathbf{S}}_i$ 와 $\overline{\mathbf{E}}_i$ 를, 식 (6), (8) 그리고 식 (9)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식으로부터, 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{S}}_i &= \mathbf{D}_i + \mathbf{C}_i \mathbf{V}_i, \overline{\mathbf{E}}_i = -\mathbf{C}_i \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{E}_{i-1} \\ (i &= 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{B}_i, \mathbf{G}_i = \mathbf{S}_{i-1} - \mathbf{A}_i \quad (11)$$

이고, 식 (10)을 필드전달식(field transfer equation)이라 부른다.

절선 i 에 강제조화 외력벡터(\mathbf{Q}_i)가 작용할 경우, 절선에서의 힘의 평형식은 다음식과 같다.

$$\mathbf{F}_i = \overline{\mathbf{F}}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{U}_i - \mathbf{Q}_i \quad (12)$$

여기서 포인트 강성행렬 \mathbf{P}_i 는 식 (13)과 같이 절선 i 의 각 절점의 기초지지 병진스프링(k_Z)과 회전스프링(K_X, K_Y) 그리고 병진방향 점성감쇠기(c_Z)와 회전방향 점성감쇠기(C_X, C_Y)로 구성되는 $3n \times 3n$ 크기의 대각행렬이다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \text{diag}(k_{z1} + j\omega c_{z1}, K_{x1} + j\omega C_{x1}, K_{y1} + j\omega C_{y1}, \\ &k_{z2} + j\omega c_{z2}, K_{x2} + j\omega C_{x2}, K_{y2} + j\omega C_{y2}, \dots, \\ &k_{zn} + j\omega c_{zn}, K_{xn} + j\omega C_{xn}, K_{yn} + j\omega C_{yn}) \end{aligned} \quad (13)$$

절선 i 좌측의 절선강성계수행렬 $\overline{\mathbf{S}}_i$ 와 힘보정벡터 $\overline{\mathbf{E}}_i$ 를 이용하여 절선 i 우측의 \mathbf{S}_i 와 \mathbf{E}_i 를 구하는 포인트전달식(point transfer equation)은, 식 (8), (9), (12) 그리고 절선에서 변위벡터의 연속조건 ($\mathbf{U}_i = \overline{\mathbf{U}}_i$)으로부터, 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= \overline{\mathbf{S}}_i + \mathbf{P}_i, \mathbf{E}_i = \overline{\mathbf{E}}_i - \mathbf{Q}_i \\ (i &= 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (14)$$

2.4 동적 응답

좌단의 경계조건을 절선 0의 기초지지요소로 모델링하였으므로, 절선 0 좌측의 힘벡터 $\overline{\mathbf{F}}_0$ 는 해석적으로 영벡터(null vector)가 된다. 따라서 식 (9)와 (12)의 i 대신에 0을 대입한 식으로부터 절선 0 우측의 절선강성계수행렬 \mathbf{S}_0 와 힘보정벡터 \mathbf{E}_0 를 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{P}_0, \mathbf{E}_0 = -\mathbf{Q}_0 \quad (15)$$

따라서 식 (15)를 시작으로, 필드전달식인 식 (10)과 포인트전달식인 식 (14)를 순차적으로 적용하면, 각 절선의 절선강성계수행렬과 힘보정벡터를 전달해

가면서 구할 수 있고, 최종적으로는 평판의 우단인 절선 m 우측의 절선강성계수행렬 S_m 과 힘보정벡터 E_m 을 계산할 수 있다.

우단의 경계조건도 절선 m 의 기초지지요소로 모델링하였으므로, 절선 m 의 우측은 해석적으로 자유 ($F_m=0, U_m \neq 0$)가 된다. 따라서 식 (9)의 i 대신에 m 을 대입한 식으로부터 우단의 변위벡터 U_m 을 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$U_m = -S_m^{-1} E_m \quad (16)$$

절선 좌우측의 변위벡터의 연속조건 ($U_i = \bar{U}_i$)과 식 (6) 그리고 식 (9)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식으로부터, 다음식을 유도할 수 있고,

$$U_{i-1} = V_i U_i - G_i^{-1} E_{i-1} \quad (i=m, m-1, \dots, 1) \quad (17)$$

이 식을 통해 절선 i 의 변위벡터를 이용하여 절선 $i-1$ 의 변위벡터를 구할 수 있다.

따라서 식 (16)으로부터 평판 우단의 변위벡터를 계산한 후, 식 (17)로부터 절선 $m-1$ 에서부터 절선 0(좌단)까지 모든 절선의 변위벡터를 순차적으로 계산할 수 있다. 힘벡터는 절선의 변위벡터를 먼저 계산한 후, 식 (8)과 (9)로부터 구할 수 있다.

3. 수치계산 결과 및 검토

제안된 방법의 신뢰성 및 유효성을 확인하기 위하여, 모드해석법(MAM)과 직접해석법(DAM) 그리고 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)을 이용하여 평판 구조물의 주파수 응답을 계산할 수 있는 프로그램

을 저자가 직접 작성한 후, 동일한 조건하에서 수치 계산을 수행하였다.

Fig. 3과 같이 한쪽면이 고정된 사각평판을 계산 모델로 선정하였고, 평판의 물성치 및 치수는 Table 1과 같다. 가진점 및 응답점은 자유단의 한쪽 모서리 (Fig. 3에서는 절점 50)로 하였고, 조화외력의 진폭은 1 N이었다.

3.1 비감쇠 사각평판의 정상상태 응답

구조감쇠(structural damping)를 고려하지 않은 사각평판을 Fig. 3처럼 10개의 스트립과 각 스트립당 4개, 즉, 10×4 개의 평판요소로 분할한 후, 가진점의 Z축방향 변위의 주파수응답을 모드해석법, 직접해석법 그리고 유한요소-전달강성계수법으로 계산한 결과가 Fig. 4이다. 모드해석법은 고유치해석을 먼저 수행한 후, 각각 10차, 20차, 50차까지의 고유모드를 합성하여 주파수응답을 계산하였다. Fig. 4에서 MAM〈 〉내의 숫자는 합성된 고유모드의 수를 뜻한다.

Fig. 4에서 유한요소-전달강성계수법과 직접해석법의 주파수응답 곡선이 하나의 선으로 완전히 겹쳐져 있으므로, 유한요소-전달강성계수법의 계산 결과가 직접해석법의 계산 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다. 모드해석법의 주파수응답 곡선은 합성된 모드 수가 증가할수록 유한요소-전달강성계수법과 직접해석법의 결과에 수렴해 감을 알 수 있었고, 모드해석법은 고차로 갈수록 공진점 이외의 영역에서 주파수 응답의 오차가 증가하고 있음을 알 수 있었다. 그리고 모드해석법, 직접해석법 그리고 유한요소-전달강성계수법의 주파수응답 곡선의 공진점이 일치하는데, 이는 3방법 모두 동일한 사각요소와 동일한 분할수로 모델링하여 계산하였기 때문이다.

사각평판을 $10 \times 4, 15 \times 6, 20 \times 8, 25 \times 10$ 개의 평판 요소로 각각 분할한 후, 유한요소-전달강성계수법, 직

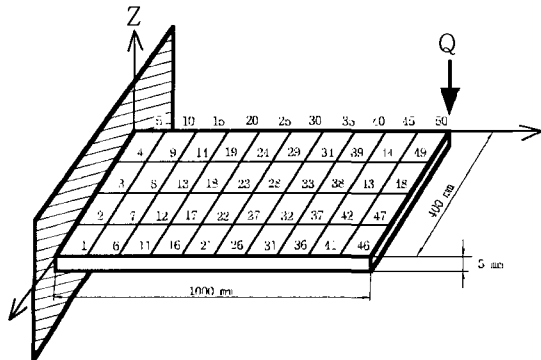


Fig. 3 A computational example (10×4 elements)

Table 1 Physical and geometrical properties for computation model

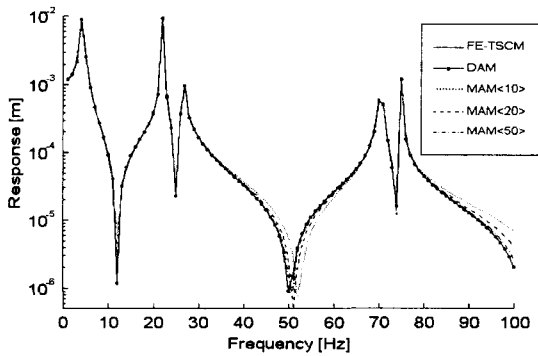
Length a [m]	1.0
Width b [m]	0.4
Thickness t [m]	0.005
Young's modulus E [GN/m ²]	73
Density ρ [kg/m ³]	2770
Poisson's ratio ν	0.32

접해석법 그리고 50차 까지의 고유모드를 합성한 모드해석법으로 주파수응답을 계산하였다. Fig. 5(a)의 유한요소-전달강성계수법 및 Fig. 5(b)의 직접해석법의 계산 결과는 잘 일치하였다. Fig. 5(c)에 나타난 모드해석법의 결과도 직접해석법 및 유한요소-전달강성계수법의 결과와 대체로 일치하였다.

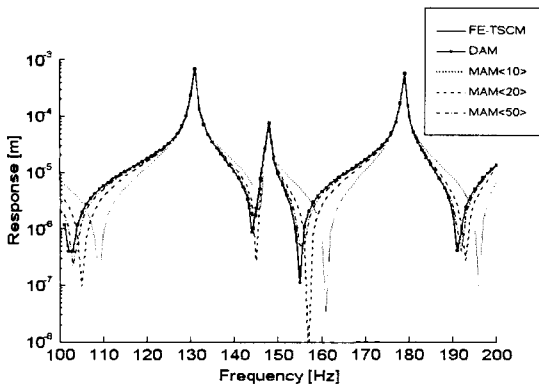
Fig. 5의 주파수응답 곡선을 자세히 살펴보면, 요소 분할수에 따라 공진 주파수의 위치가 이동하는 것을 볼 수 있고, 특히, 고차의 공진 주파수로 갈수록 그 정도가 커짐을 알 수 있었다. 이는 평판의 자유진동 해석에서 평판의 요소 분할수가 많을수록, 계산된 고유진동수가 엄밀해에 수렴하는 것과 동일한 현상이라고 생각한다. 따라서 정확한 주파수응답을 얻기 위해서는 평판의 분할수를 증가시키는 것이 중요하다는 것을 확인할 수 있었다.

Table 2는 퍼스널 컴퓨터(Pentium III 1 GHz, 256 MB)에서 평판요소의 분할수(10×4, 15×6, 20×8, 25×10)에 따라 모드해석법, 직접해석법 그리고 유한요

소-전달강성계수법으로 Fig. 4(a)의 주파수응답을 계산하는데 소요된 시간이다. Table 2에서 평판요소의 분할수가 10×4인 경우에, 모드해석법과 유한요소-전

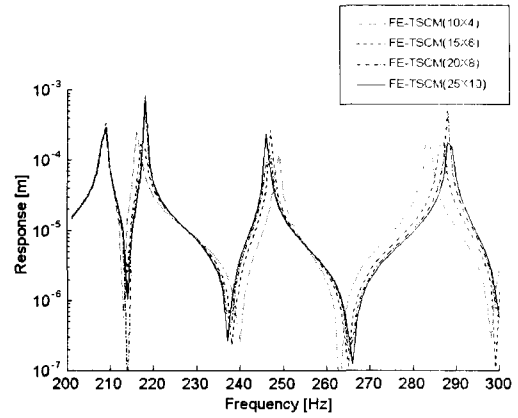


(a) Frequency range : 1~100 Hz

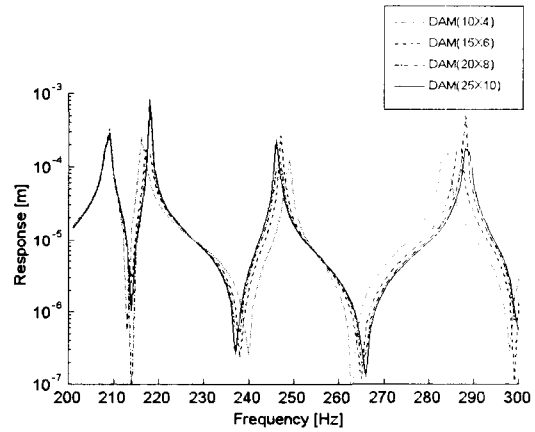


(b) Frequency range : 101~200 Hz

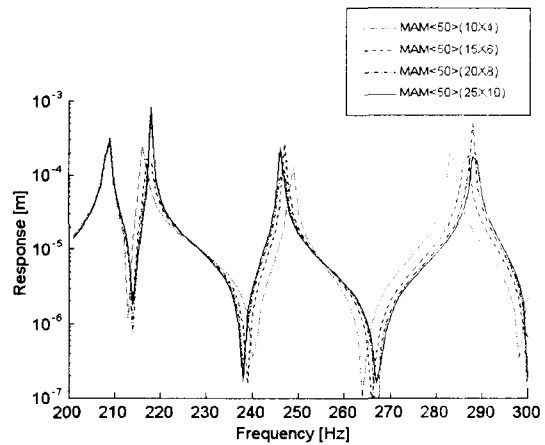
Fig. 4 Frequency response curves I



(a) FE-TSCM



(b) DAM



(c) MAM

Fig. 5 Frequency response curves II

달강성계수법에 비해 직접해석법으로 주파수응답 계산할 때, 상대적으로 많은 시간이 소요됨을 알 수 있었다. 그리고 분할수가 25×10인 경우에는 유한요소-전달강성계수법이 계산 속도면에서 다른 방법에 비해 훨씬 우수함을 알 수 있었다.

3방법 모두 분할수를 증가하면 계산시간이 증가하였는데, 특히 유한요소법에 기초를 두고있는 모드해석법과 직접해석법의 계산시간이 분할수의 증가에 따라 크게 증가함을 알 수 있었다. 모드해석법은 주파수응답을 계산하기 직전에 고유치해석을 수행해야 하는데, 요소 분할수가 증가하면, 계의 전체 자유도가 증가하고, 따라서 고유치해석에 소요되는 계산시간 및 컴퓨터 메모리의 사용이 급증하게 된다. 직접적분법도 요소 분할 수가 증가하면, 계의 전체 동강성행렬의 역행렬을 계산하는 과정에서 계산시간 및 컴퓨터 메모리의 사용이 급증하게 된다. 반면에 유한요소-전달강성계수법은 요소 분할수가 증가해도, 계산시간이 거의 선형적으로 조금씩 증가하였다. 이는 요소의 분할수가 증가하면 유한요소-전달강성계수법은 알고리즘의 특성상 전달식의 사용 회수만 선형적으로 증가하기 때문이다. 그리고 모드해석법이나 직접해석법에 사용되는 전체 동강성행렬보다 절선강성계수행렬의 크기가 훨씬 작으므로, 계산에 사용되는 컴퓨터 메모리의 사용도 유한요소-전달강성계수법이 훨씬 적다. 모드해석법에서 합성 모드의 수는 계산시간에 큰 영향을 주지 못했는데, 이는 모드해석법에서 운동방정식을 비연성화한 후에 계산량이 크게 줄어들기 때문이다.

Figs. 4, 5 그리고 Table 2의 결과를 정리해 보면, 평판구조물에 대한 저차의 주파수응답을 근사적으로 구할 때에는 모드해석법도 효과적이지만, 저차뿐만 아니라 고차까지 주파수응답을 정확하고도 빠른 시간내에 구하기 위해서는 유한요소-전달강성계수법이 기존의 모드해석법이나 직접적분법에 비해 훨씬 효과적임을 알 수 있었다.

Table 2 Computation time (unit : sec)

Method Partition	MAM <10>	MAM <20>	MAM <50>	DAM	FE-TSCM
10×4	1	1	1	4	1
15×6	7	7	7	25	2
20×8	39	39	39	98	6
25×10	131	132	132	301	12

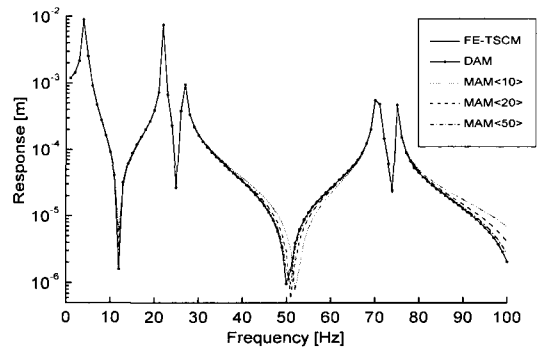
3.2 감쇠 사각평판의 정상상태 응답

구조감쇠를 고려한 Fig. 3의 사각평판을 대상으로 모드해석법, 직접해석법 그리고 유한요소-전달강성계수법으로 주파수응답을 계산한 결과가 Fig. 6이다. 수치계산에서 사각평판은 10×4개의 평판요소로 분할하였고, 구조감쇠계수는 0.005로 하였다.

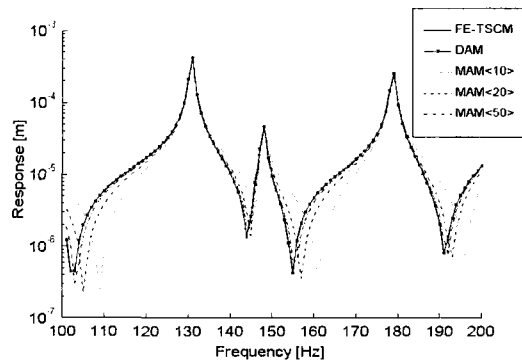
Fig. 6에서 유한요소-전달강성계수법과 직접해석법의 계산 결과가 구조감쇠를 고려할 경우에도 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다. 그리고 모드해석법에서 합성 모드 수가 증가할수록 유한요소-전달강성계수법과 직접해석법의 결과에 수렴해 감을 알 수 있었다.

Fig. 6의 계산모델에서 Z축 방향의 선형 점성감쇠기를 하나 추가한 계산모델을 대상으로 모드해석법, 직접해석법 그리고 유한요소-전달강성계수법으로 주파수응답을 계산한 결과가 Fig. 7이다. 여기서 사각평판은 25×10개의 평판요소로 분할하였고, 점성감쇠기는 가진점과 기초(base) 사이에 존재한다.

감쇠계수가 20 N·s/m일때와 100 N·s/m일때의 주파수응답 결과를 비교해 보면, 감쇠계수의 대소에



(a) Frequency range : 1 ~ 100 Hz



(b) Frequency range: 101 ~ 200 Hz

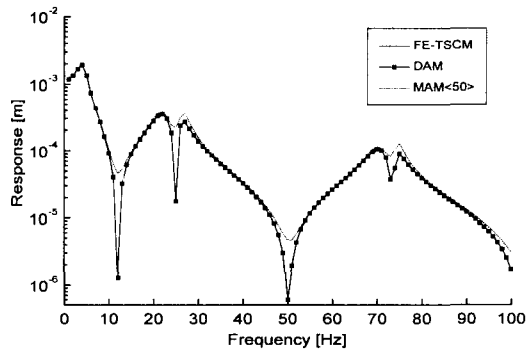
Fig. 6 Frequency response curves III

관계없이 기존의 직접해석법의 계산 결과와 본 연구에서 제시된 유한요소-전달강성계수법의 결과가 잘 일치하였다. 따라서 구조감쇠 및 점성감쇠를 갖는 평판 구조물의 주파수응답해석에서도 유한요소-전달강성계수법의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

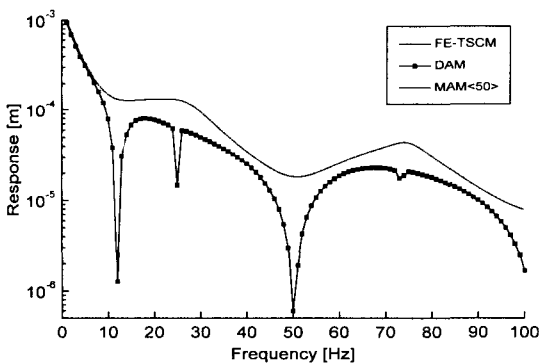
모드해석법에서는 모달감쇠행렬(modal damping matrix)이 대각화되어야만 정확한 응답을 구할 수 있으므로, 주로 모드감쇠비(modal damping ratio) 또는 비례감쇠의 형태로 계의 감쇠가 모델링된다. 따라서 Fig. 7의 계산모델은 모달감쇠행렬이 대각화가 되지 않으므로 대각항만을 취하여 모드해석을 수행할 경우

Table 3 Computation time(unit : sec)

Method Partition	MAM <10>	MAM <20>	MAM <50>	DAM	FE-TSCM
10×4	1	1	1	12	2
15×6	7	7	8	74	5
20×8	39	39	39	303	12
25×10	132	132	132	949	26



(a) $c = 20 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$



(b) $c = 100 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$

Fig. 7 Frequency response curves IV

Fig. 7(b)와 같이 오차가 발생한다. 따라서 평판에 점성감쇠기가 존재할 경우, 모드해석법은 정확한 주파수 응답을 구하기 곤란할 경우가 많다.

Table 3는 Table 2와 동일한 컴퓨터에서, 구조감쇠를 고려한 사각평판의 주파수응답인 Fig. 6(a)를 모드해석법, 직접해석법 그리고 유한요소-전달강성계수법으로 계산하는데 소요된 시간이다. Table 3에서도 평판의 분할수를 증가하면, 계산 속도면에서 모드해석법과 직접해석법에 비해 유한요소-전달강성계수법이 우수함을 확인할 수 있었다.

Table 2, 3을 비교해보면, 모드해석법의 계산시간은 거의 차이가 없지만, 직접해석법과 유한요소-전달강성계수법의 계산시간이 약 2~3배 증가함을 볼 수 있다. 그 원인은 감쇠를 고려할 경우 직접해석법의 전체 동강성행렬과 유한요소-전달강성계수법의 절선강성계수행렬의 원소들이 복소수가 되어 연산 시간이 증가하기 때문이다.

Figs. 6, 7 그리고 Table 3의 결과를 정리해 보면, 감쇠를 갖는 평판구조물의 주파수응답을 구할 경우에도 유한요소-전달강성계수법이 효과적인 해석기법임을 알 수 있었다.

4. 결 론

유한요소법에 바탕을 둔 모드해석법이나 직접해석법으로 평판 구조물의 강제진동해석을 고차까지 정밀하게 수행하기 위하여 평판 구조물의 요소 분할수를 증가시키면, 수치계산시에 계산시간과 컴퓨터 메모리의 사용이 급증하게 된다. 본 논문에서 제안하는 유한요소-전달강성계수법으로 요소 분할수가 큰 평판형 구조물의 강제진동해석을 수행하면, 계산에 사용되는 행렬들의 크기를 절선의 자유도로 축소시킬 수 있으므로, 모드해석법이나 직접해석법에 비해 일시에 사용되는 컴퓨터 메모리가 크게 줄어들어 퍼스널 컴퓨터에서도 원활한 해석이 가능해진다. 그리고 평판형 구조물의 강제진동해석시에 계산 속도면에서도 모드해석법이나 직접해석법에 비해 유한요소-전달강성계수법이 훨씬 우수하였다.

참 고 문 헌

(1) Sehmi, N. S., 1989, Large Order Structural

Eigenanalysis Techniques Algorithm for Finite Element Systems, Ellis Horwood Limited, Chichester, Chap. 1.

(2) Dokainish, M. A., 1972, "A New Approach for Plate Vibration: Combination of Transfer Matrix and Finite-Element Technique," Trans. of the ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 94, pp. 526~530.

(3) Doyle, J. F., 1988, "A Spectrally Formulated Finite Element for Longitudinal Wave Propagation," International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 3, pp. 1~5.

(4) 이우식, 이준근, 이상희, 1996, "스펙트럴요소법을 이용한 평판의 동적거동 해석," 한국소음진동공학회논문집, 제 6 권, 제 5 호, pp. 617~624.

(5) Geradin, M. and Chen, S. L., 1995, "An Exact Model Reduction Technique for Beam Structures : Combination of Transfer and Dynamic

Stiffness Matrices," Journal of Sound and Vibration, Vol. 185, No. 3, pp. 431~440.

(6) 양보석, 황형섭, 1997, "동적 유한요소에 의한 회전축 계의 진동 해석," 한국소음진동공학회논문집, 제 7 권, 제 3 호, pp. 467~475.

(7) 近藤孝廣, 綾部隆, 末岡淳南, 1996, "部分構造合成法を採用した傳達剛性係數法の提案," 日本機械學會論文集(C), 第 62 卷, 第 596 號, pp. 1277~1284.

(8) 문덕홍, 최명수, 1999, "강성계수의 전달을 이용한 다양한 연결부를 갖는 구조물의 진동해석," 대한기계학회논문집, 제 23 권, 제 2 호, pp. 344~356.

(9) Petyt, M., 1990, Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Chap. 9.

(10) Petyt, M., 1990, Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Chap. 6.