

다중격자 유한체적법에 의한 복사열전달 해석

김만영[†] · 변도영* · 백승욱**
 (2002년 10월 8일 접수, 2002년 11월 29일 심사완료)

A Study of a Multigrid Finite-Volume Method for Radiation

Man Young Kim, Do Young Byun, and Seung Wook Baek

Key Words : Multigrid Method(다중격자법), Radiative Heat Transfer(복사열전달), Finite Volume Method(유한체적법), Convergence(수렴), CPU Time(계산시간).

Abstract

The convergence of finite volume method (FVM) or discrete ordinate method (DOM) is known to degrade for optical thickness greater than unity and large scattering albedo. The present article presents a convergence acceleration procedure for the FVM based on a full approximation storage (FAS) multigrid method. Among a variety of multigrid cycles, the V-cycle is used and the full multigrid algorithm (FMG) is applied to an analysis of radiation in irregular two-dimensional geometry. Solution convergence is discussed for the several cases of various optical thickness and scattering albedo. At small scattering albedo and optical thickness, there is no advantage to using the multigrid method for calculation CPU time. For large scattering albedo greater than 0.5 and optical thickness greater than unity, however, the multigrid method improves the convergence and the solution is rapidly obtained.

기호설명

A : 근사해 계수행렬
 $D_{\vec{a}}^m$: 방향 가중치
 \vec{e}_x, \vec{e}_y : 단위 벡터
 i : 격자간 전달계수(interpreter)
 I : 복사강도, $W/(m^2 \cdot sr)$
 I_b : 흑체 복사강도, $W/(m^2 \cdot sr)$
 \vec{r} : 위치 벡터
 R : 근사해 오차벡터
 S_r^m : 생성항
 S : 근사해 생성항 벡터
 T : 온도, K

α : 엄밀해 계수행렬
 β_0 : 소멸계수, $= \kappa_a + \sigma_s, m^{-1}$
 φ : 엄밀해
 ζ : 엄밀해 생성항 벡터
 ΔA_i : 면적
 ΔV : 검사 체적
 $\Delta \Omega$: 검사각도
 θ : 극각
 κ_a : 흡수계수, m^{-1}
 σ_s : 산란계수, m^{-1}

그리스문자

[†] 책임저자, 회원, 현대자동차 승용디젤엔진시험팀
 E-mail : manykim@hyundai-motor.com
 TEL : (031)369-4733 FAX : (031)369-4643
 * 회원, 한국과학기술기획평가원
 ** 회원, KAIST 기계공학과 항공우주공학 전공

1. 서론

열복사 현상은 전자기파에 의한 열전달 현상으로 서 에너지 전달과정 중 흡수, 방사, 그리고 산란현상을 통하여 매질과 직접적인 상호작용을 할 뿐만 아니라 온도의 4 승에 비례하기 때문에 연소계와 같은 고온의 열발생장치에 있어서 그 역할이 매우 중요하다.

최근에 비직교 좌표계와 비정렬 격자계에서의 복사열전달 해석 기법들이 제안되었다. 특히 유한체적법⁽¹⁻³⁾은 그 효율성과 정확성으로 인하여 크게 주목받고 있다. 그러나 유한체적법은 구분종 좌법⁽⁴⁾과 마찬가지로 광학두께가 증가할수록, 산란 강도가 강할수록 그리고 벽면의 방사율이 작아질수록 수렴성이 낮아진다고 알려져 있다. 화석연료를 사용하는 연소기 등에서 국부적으로 큰 광학두께 화염의 존재는 복사열전달 해석의 효율을 낮게 한다. 때문에 수렴성의 개선을 위하여 여러 방법들이 제시되고 있다. Fiveland and Jesse⁽⁵⁾는 중성자 수송이론⁽⁶⁾에 제안되었던 몇가지 방법, 즉, SOR (successive over-relaxation)법, 격자재균형(mesh rebalance)법, 복합 가속(synthetic acceleration)법 등을 복사열전달에 적용하여 비교하였다. 이 중에서 가장 수렴성을 안정적으로 증가시키는 격자재균형법은 각도에 대한 복사강도를 적분하여 균형함수에 대한 보존방정식을 구성한 후 이를 구하고 각 방향의 복사강도를 보정하는 과정이다. 그러나 이 방법은 격자 광학강도가 작아질수록, 즉 격자계가 매우 조밀하여질 경우에는 성능이 떨어지는 단점을 지니고 있다. 한편, Mathur and Murthy⁽⁷⁾는 전도/복사 혼합열전달 문제에 있어서 다중격자 기법의 효율성을 제시하면서 에너지 방정식과 복사전달방정식을 결합하여 문제를 해석하는 새로운 과정을 제안하였다. 하지만 그들은 등방산란에 대한 문제만을 고려하였으며 다중격자법에 있어서도 CS (correction storage) 방법을 적용하여 대류/전도/복사 혼합열전달 모드가 결합된 비선형 문제에 대한 효율성을 보장할 수 없다. 또한, 높은 효율성에도 불구하고 정확한 해를 얻기 위하여 각도 분할을 세밀하게 하였을 경우 메모리 문제를 야기할 수도 있다.

본 연구에서는 다중격자 기법^(8,9)에서 FAS (full approximation storage) 방법을 복사열전달 해석을 위한 유한체적법에 적용하여 흡수, 그리고 비등방 산란하는 매질에서의 복사전달 방정식의 수렴성에 미치는 영향을 분석하고자 한다. 다중격자 기법은 전산유체역학 분야에서 유동장 해석을 위한 기법들에 적용되어 저주파 오차를 효율적으로 제거하였으며 성공적으로 수렴성을 개선할 수 있었다. 본 연구는 복사열전달 해석을 위한 유한체적법에 있어서 조밀한 격자계와 성긴 격자계를 이용함으로써 오차의 효율적 전파와 제거를 수행할 수 있는 다중격자법을 적용하여 순수 복사열전달 및 전도/복사 혼합열전달 해석을 통하여 다중격자법의 효율성을 검증하고자 한다.

2. 이론해석

2.1 다중격자법

전산해석에 있어서 단일격자 해법은 격자크기에 비례하여 고주파 오차를 효율적으로 제거할 수 있으나 수렴에 지배적인 저주파 오차의 제거에는 한계가 존재하여 수렴이 매우 느리다. 한편, 다중격자법은 이러한 단일격자의 저주파 오차를 성긴격자에서 효과적으로 제거하고자 하는 방법이다. 그리고 성긴 격자에서 얻어진 해를 조밀 격자로 외삽하여 더해주면 더욱 좋은 초기조건을 확보하게 되어 수렴성을 보장하게 된다. 사용된 다중격자법은 변수까지 모든 격자에서 고려하고 계산을 수행하는 FAS 방법을 따른다^(8,9).

k 번째 격자계에서 임의의 변수에 대한 엄밀해를 가정하면,

$$\alpha^k \phi^k = \zeta^k \quad (1)$$

여기에서 α^k 와 ζ^k 는 각각 계수행렬과 생성항 벡터이다.

한편, 가장 조밀한 격자계에서 계산이 시작되면 근사해가 얻어지고 이 근사해는 엄밀해와는 다르므로 다음과 같이 오차벡터 R^k 를 구할 수 있다

$$A^k \phi^k = S^k - R^k \quad (2)$$

여기에서, 식 (2)에서 식 (1)을 빼면 :

$$\alpha^k \phi^k - A^k \phi^k = \zeta^k - S^k + R^k \quad (3)$$

윗식 (3)은 다중격자법의 기본식으로 사용된다. 다음 성긴 격자계인 k-1 번째 격자에 대하여 식 (3)을 적용하면,

$$A^{k-1} \phi^{k-1} = S^{k-1} + \tilde{A}^{k-1} \tilde{\phi}^{k-1} - \tilde{S}^{k-1} + i_k^{k-1} R^k \quad (4)$$

을 얻을 수 있다. 여기에서 k-1 격자계에서 변수들은 k 격자계에서 근사된 값을 이용하여 계산되며 식 (4)를 k-1 격자계에서 반복 계산하여 ϕ^{k-1} 을 얻을 수 있다. 이때 식 (4)의 우항에 있는 생성항인 S^{k-1} 은 매번 새로이 계산되거나 뒷부분의 항들은 k-1 격자계로 근사된 값으로 한번 계산된 후에 반복 계산동안 계속 고정된다. 한편, 변수와 오차의 근사는 다음과 같이 내삽과 합산으로 구해진다. 즉,

$$\tilde{\phi}^{k-1} = \hat{i}_k^{k-1} \phi^k \quad (5)$$

$$\tilde{R}^{k-1} = \hat{i}_k^{k-1} R^k = R_{i,j}^k + R_{i+1,j}^k + R_{i,j+1}^k + R_{i+1,j+1}^k \quad (6)$$

k-1 격자계에서 얻어진 해를 이용하여 다음과 같이 k 격자계로의 보정이 이루어진다.

$$\phi^k = \phi^{k,old} + \hat{i}_k^k (\phi^{k-1} - \hat{i}_k^{k-1} \phi^{k,old}) \quad (7)$$

한편, 다양한 다중격자 사이클 중에서 본 연구에서는 FMG(Full Multigrid) 알고리즘을 이용한 V-사이클을 적용하여 격자계들간의 근사해와 오차 전달 해석을 수행하였다.

2.2 유한체적법

흡수, 방사 및 산란하는 회체매질내 임의의 지점에서 복사강도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dI(\vec{r}, \vec{s})}{ds} = -\beta_0 I(\vec{r}, \vec{s}) + \kappa_a I_b(\vec{r}) + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} I(\vec{r}, \vec{s}') \Phi(\vec{s}' \rightarrow \vec{s}) d\Omega' \quad (8)$$

여기에서, κ_a 는 흡수계수이고, σ_s 는 산란계수, $\beta_0 = \kappa_a + \sigma_s$ 는 소멸계수이고 $\Phi(\vec{s}' \rightarrow \vec{s})$ 는 산란위상함수이다. 이러한 복사전달방정식에 대한 경계조건은 일반적인 벽면의 경우 다음과 같이 벽면방사와 반사의 합으로 표현된다. 즉,

$$I(\vec{r}_w, \vec{s}) = \varepsilon_w I_b(\vec{r}_w) + \frac{1-\varepsilon_w}{\pi} \int_{\vec{s}' \cdot \vec{n}_w < 0} I(\vec{r}_w, \vec{s}') |\vec{s}' \cdot \vec{n}_w| d\Omega' \quad (9)$$

유한체적법은 식 (8)을 제어체적과 제어각도에 대하여 적분을 수행하고 임의의 체적, 각도에서 복사강도는 일정하고 한정된 각도로만 진행한다고 가정할 때 Fig. 1 과 같은 2 차원 좌표에서 다음과 같은 차분식으로 정리할 수 있다.⁽³⁾

$$a_p^m I_p^m = a_E^m I_E^m + a_W^m I_W^m + a_N^m I_N^m + a_S^m I_S^m + b_p^m \quad (10)$$

여기에서,

$$a_i^m = \max(-\Delta A_i D_{ci}^m, 0) \quad (11)$$

$$a_p^m = \sum_{i=e,w,n,s} \max(\Delta A_i D_{ci}^m, 0) + \beta_{0,p} \Delta V \Delta \Omega^m \quad (12)$$

$$b_p^m = (S_r^m)_p \Delta V \Delta \Omega^m \quad (13)$$

$$D_{ci}^m = \int_{\Delta \Omega^m} (\vec{s} \cdot \vec{n}_i) d\Omega^m \quad (14)$$

$$\Delta \Omega^m = \int_{\theta^{m-}}^{\theta^{m+}} d\Omega^m = \int_{\phi^{m-}}^{\phi^{m+}} \int_{\theta^{m-}}^{\theta^{m+}} \sin \theta d\theta d\phi \quad (15)$$

$$S_r^m = \kappa_a I_b + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} I^{m'} \Phi^{m' \rightarrow m} d\Omega' \quad (16)$$

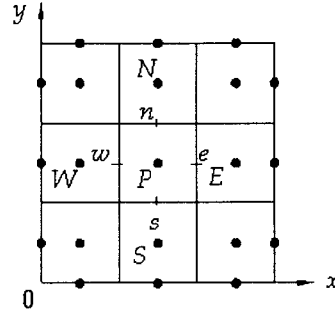


Fig. 1 Grid system used in this formulation.

식 (10)을 2 절에서 언급한 바와 같이 여러 격자계에 대하여 다중격자법을 이용하여 해석한다. 한편, 식 (4)와 (7)에서 필요한 성긴 격자와 조밀격자간의 변수 전달은 격자 중심부에서의 변화율을 계산하여 내삽을 수행하였으며 성긴 격자에서 조밀격자로의 복사강도 전달은 DOIM^(10,11)에서 이용되는 복사전달방정식 해석 기법을 적용하였다. 한편, 전체 해석영역을 $(N_x \times N_y)$ 제어체적으로 구분하고 입체각 4π 는 유한체적법에서와 같이 $(N_\theta \times N_\phi)$ 방향으로 구분한다.

2.3 에너지 보존 방정식

전도/복사 혼합열전달 문제에 있어서 다중격자법의 효과를 알아보기 위하여 다음과 같이 무차원된 에너지 방정식을 이용하였다.⁽¹²⁾

$$\begin{aligned} (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) \Theta &= \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla^{*2} \Theta \\ &- \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\tau_0^2}{N} (1 - \omega_0) \left(\Theta^4 - \frac{1}{4} \int_{\Omega=4\pi} G d\Omega \right) \end{aligned} \quad (17)$$

이때 각 무차원 변수들은 다음과 같이 정의된다. G는 식 (8)에서 나타나는 복사강도의 무차원 변수로서 식 (8)을 무차원 형태로 정리하여 해석을 수행한다. 즉,

$$\begin{aligned} x^* &= x/L, y^* = y/L, \tau_0 = \beta_0 L, w_0 = \sigma_s / \beta_0 \\ \Theta &= \frac{T}{T_w}, \text{Re} = \frac{\rho_0 \mu_0 L}{\mu_0}, \text{Pr} = \frac{C_{p0} \mu_0}{k_0} \\ N &= \frac{k_0 \beta_0}{4\sigma T_w^3}, G = \frac{I}{\sigma T_w^4} \end{aligned} \quad (18)$$

식 (17)에서 복사전달방정식으로부터 생성항으로 전달되는 항은 다음과 같이 선형화하여 적용한다.⁽¹²⁾ 즉,

$$\begin{aligned}
 S_T &= S_T^* + \left(\frac{dS^*}{d\Theta^*} \right)_P (\Theta_P - \Theta_P^*) \\
 &= \left(-\frac{4}{\text{Re Pr}} \frac{\tau_0^2}{N} (1-\omega_0) \Theta_P^{*3} \right) \Theta_P \\
 &+ \left[\frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\tau_0^2}{N} (1-\omega_0) \left(3\Theta_P^{*4} + \frac{1}{4} \int_{\Omega=4\pi} G d\Omega \right) \right] \\
 &= S_P \Theta_P + S_C
 \end{aligned} \tag{19}$$

에너지 방정식 또한 차별화하여 얻어진 식들을 다중격자법의 순서에 따라 적용한다.

3. 결과 및 고찰

3.1 순수복사열전달 해석

우선 본 연구에서 고려한 유한체적법은 이미 엄밀해와 비교, 검증되었으므로⁽¹³⁾ 검증해를 도출하지 않기로 한다. 복사열전달에서 다중격자법의 효율성을 살펴보기 위하여 고려한 비직교좌표 형상은 Fig. 2에서 보는 바와 같은 확장 노즐이다.

우선, 순수 산란 문제에서의 다중격자법의 효율성을 알아보기 위하여 노즐의 아래 벽면만 온도를 1000 K 로 유지하며 매질과 나머지 벽면들은 모두 0 K 로 고정하였다. 그리고 산란은 등방산란만을 고려하였다. 매질은 흡수 혹은 방사를 전혀 하지 않으므로 뜨거운 벽면으로부터 방사된 복사열 에너지는 나머지 벽면으로 산란 경로에 따라 이동한다. 모든 벽면의 방사율은 1 로서 흑체로 가정하였다. 그리고 공간 및 각도 격자제는 각각 $(N_x \times N_y) = (160 \times 80)$ 그리고 $(N_\theta \times N_\phi) = (2 \times 3)$ 으로 구성하였다.

Table 1 은 순수 산란인 경우에 수렴에 필요한 계산 시간과 반복계산 횟수를 나타내고 있다. 계산 시간은 IBM PC (Intel 450)를 이용하였을 경우의 수치를 나타낸다. 산란 알베도가 0.1 인 경우에는 계산 시간상의 잇점이 크게 나타나고 있지 않으나 1 과 10 일 경우에는 약 50 %의 저감 효과가 있음을 관찰할 수 있다.

한편, 흡수, 방사, 그리고 산란하는 매질에 대한 다중격자법의 성능을 조사하기 위하여 Fig. 1 과 동일한 형상에 대하여 해석하였다. 왼쪽과 오른쪽 벽면은 1500 K, 윗 벽면은 2000 K, 아래 벽면은 2500 K 의 고온을 유지하며, 매질은 1000 K 을 유지한다고 가정하여 여러 경우에 대하여 단일격자와 다중격자의 수렴성 및 CPU 시간을 비교하였다. $\sigma_s = 0$ 인 복사 흡수 매질에서의 수렴성에는 어떠한 수렴 촉진 기법이 필요 없다. 왜냐하면 이런

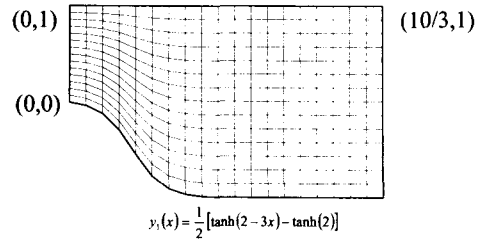


Fig. 2 Schematic and body-fitted coordinate grid system for an expanding nozzle

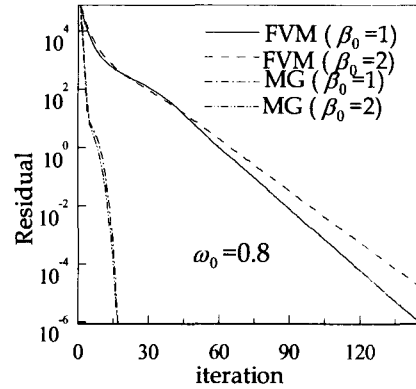


Fig. 3 Iterations required for convergence

Table 1 CPU time and iterations for convergence for a variety of isotropic scattering albedo

ω_0	FVM		Multigrid FVM	
	CPU s	Iter	CPU s	Iter
0.1	23	99	26	18
1	42	197	24	18
10	515	2530	214	165

Table 2 CPU time and iterations for convergence for a variety of isotropic scattering albedo and extinction coefficient ($\epsilon_w = 1.0$)

β_0	ω_0	FVM		Multigrid FVM	
		CPU s	Iter	CPU s	Iter
1.0	0.2	22	90	25	17
	0.8	34	146	28	18
2.0	0.2	20	83	26	16
	0.8	39	167	27	17

문제의 경우에는 한번의 계산으로 수렴된 해를 얻을 수 있기 때문이다.

Fig. 3 은 산란 알베도가 0.8 인 경우에 광학 두께의 차이에 의하여 수렴도의 차이가 나타남을 보여주고 있다. 단일격자계에서는 광학두께가 증가할수록 수렴성이 악화됨을 알 수 있으나 다중격자

Table 3 CPU time and iterations for convergence for a variety of isotropic scattering albedo and extinction coefficient ($\epsilon_w=0.5$).

ω_0 ($\beta_0=1$)	FVM		Multigrid FVM	
	CPU s	Iter	CPU s	Iter
0.2	27	120	27	18
0.8	52	226	30	19

Table 4 CPU time and iterations for convergence for an an-isotropic scattering ($\epsilon_w=0.5$).

ω_0 ($\beta_0=1$)	FVM		Multigrid FVM	
	CPU s	Iter	CPU s	Iter
0.8	51	222	31	20

Table 5 CPU time and iterations for convergence for conduction-radiation.

ω_0 ($\beta_0=1$)	FVM		Multigrid FVM	
	CPU s	Iter	CPU s	Iter
0.5	2.e5 \geq	500 \geq	5848	49

법은 그 차이가 없이 수렴이 가능하다.

복사열의 흡수, 방사, 및 산란하는 경우에도 산란 알베도가 작을수록 다중격자법의 효율이 계산 시간 측면에서 크게 나타나지 않음을 Table 2 에서 관찰할 수 있다. 광학두께가 작고 산란 알베도가 작으면 식 (8)에서 생성항으로 작용하는 방사항과 산란항의 작용이 작아져 복사강도간의 영향이 작아진다. 따라서 단일격자 유한체적법의 수렴성 또한 매우 우수하게 유지된다. 한편, 다중격자법은 반복계산 회수는 크게 줄일 수 있으나 격자간의 변수 전달과 내삽과정에 계산시간이 소모되어 다중격자법의 효과가 감소할 수도 있다.

위 Table 2에서는 벽면의 방사율이 1인 흑체로 가정하고 있으나 흑체가 아닌 경우에 대하여 Table 3에 제시하였다. 벽면은 확산 반사 및 방사하며 방사율은 0.5로 가정하였을 때 Table 2와 같은 산란 알베도, 광학두께에 대하여 더 많은 계산 시간과 반복계산을 요구하며 따라서 다중격자법의 효과가 더욱 효율적으로 나타난다. 한편, Table 4는 비등방 산란의 경우에 대하여 다중격자법의 효과에 대하여 나타내고 있다. Table 3의 문제와 같은 조건으로서 벽면의 방사율은 0.5이고 산란 알베도는 0.8, 광학두께는 1.0으로 고정되었을 경우이다. Kim⁽¹⁴⁾은 비등방산란의 복사열전달에 미치는 영향을 세밀하게 연구하였는데 본 연구에서는 그 중에 F2 산란을 이용하였다. 비등방산란의 경우에도 다

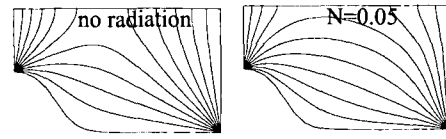


Fig. 4 Temperature contour for conduction-radiation heat transfer ($\Delta\Theta=0.05$)

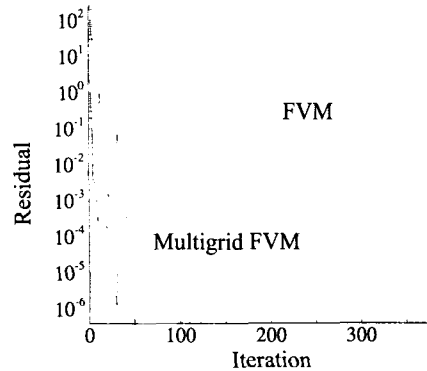


Fig. 5 Iterations required for convergence.

중격자법의 효과는 존재하지만 비등방성이 강하지 않으면 수렴성은 광학두께와 산란 알베도에 더 의존한다.

3.2 전도/복사 혼합열전달 해석

전도-복사 열전달 해석 역시 Fig. 2에 도시되어 있는 확장하는 노즐 문제에 대하여 적용하였다. 전도방정식과 복사전달방정식은 무차원되어 계산되었으며 각 특성 무차원 수는 다음과 같이 프란틀 수는 0.7, 전도-복사 비례계수는 0.05로 고정하였다. 고온인 아래벽면의 온도는 1이고 방사율은 0.7이며 왼쪽, 오른쪽 벽면은 각각 0.5 및 1.0으로 가정하였으며 윗면에는 대칭조건을 설정하였다. 매질의 광학두께는 1.0이며 산란계수는 0.5이다. 공간 및 각도 격자는 각각 $(N_x \times N_y) = (160 \times 80)$, $(N_\theta \times N_\phi) = (6 \times 8)$ 로 구성하였으며 다중격자계에서 이용한 격자계의 단계는 4 단계를 적용하였다.

Fig. 4는 계산 결과인 등온선도를 복사효과와 고려에 따른 차이와 함께 보여주고 있다. 아래벽면과, 양 옆의 벽면은 등온이므로 등온선도는 대칭면으로 온도 경사면이 분포됨을 나타낸다. 복사를 고려할 경우에 더욱 열 분포가 고르게 됨을 알 수 있다. Table 5는 FVM과 다중격자 FVM의 계산시간 및 반복횟수를 나타낸 것으로서 다중격자법의 효율성을 확인할 수 있다.

한편, Fig. 5의 경우에서도 다중격자법의 수렴성 개선에 대한 결과를 볼 수 있다. 특히 복사열전달만이 아닌 에너지 방정식에 대한 다중격자법의 효

과도 매우 크게 작용함을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 순수 복사열전달과 전도/복사 혼합열전달에 있어서 다중격자법의 적용을 통한 수렴성 개선을 확인할 수 있었다. 또한, 계산시간의 경우 광학두께와 산란강도가 각각 약 1.0 및 0.5 이상일 때 다중격자법의 잇점이 존재함을 관찰하였다. 이후 더욱 다양한 복사 물성치 범위에서의 검증을 수행하여야 할 것이며 Mathur and Murthy⁽⁷⁾가 제안한 다중격자법과의 비교, 그리고 대류, 전도, 그리고 복사열전달이 함께 고려되는 혼합열전달 문제에서의 적용 연구를 수행하여 이를 통한 다중격자법의 일반적 특성을 고찰하고자 한다.

참고문헌

- (1) Chui, E. H. and Raithby, G. D., 1993, "Computation of Radiant Heat Transfer on a Nonorthogonal Mesh Using the Finite-Volume Method," *Numer. Heat Transfer, B*, Vol. 23, pp. 269-288.
- (2) Chai, J. C., Lee, H. S., and Patankar, S. V., 1995, "Finite Volume Radiative Heat Transfer Procedure for Irregular Geometries," *J. Thermophysics Heat Transfer*, Vol. 9, No. 3, pp. 410-415.
- (3) Baek, S. W., Kim, M. Y., and Kim, J. S., 1998, "Nonorthogonal Finite-Volume Solutions of Radiative Heat Transfer in a Three-Dimensional Enclosure," *Numer. Heat Transfer, B*, Vol. 34, No. 4, pp. 419-437.
- (4) Fiveland, W. A., 1984, "Discrete Ordinates Solutions of the Radiative Transport Equation for Rectangular Enclosures," *J. Heat Transfer*, Vol. 106, No. 4, pp. 699-706.
- (5) Fiveland, W. A. and Jessee, J. P., 1996, "Acceleration Schemes for the Discrete Ordinates Method," *J. Thermodynamics Heat Transfer*, Vol. 10, No. 3, pp. 445-451.
- (6) Lewis, E. E. and Miller, Jr, W. F., 1984, *Computational Methods of Neutron Transport*, John Wiley & Sons, Inc.
- (7) Mathur, S. R. and Murthy, J. Y., 1999, "A Point Coupled Multi-Grid Acceleration Scheme for Radiative Heat Transfer," *AIAA 99-0872, 37th Aerospace Sciences Meetings & Exhibit*, Jan. 11-14, 1999, Reno.
- (8) Hortmann, M., Peric, M., and Scheuerer, G., 1990, "Finite Volume Multigrid Prediction of Laminar Natural Convection: Bench-Mark Solutions," *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 11, pp. 189-207.
- (9) Shyy, W. and Sun, C. S., 1993, "Development of a Pressure-Correction/Staggered-Grid Based Multigrid Solver for Incompressible Recirculating Flows," *Computers and Fluids*, Vol. 22, No. 1, pp. 51-76.
- (10) Cheong, K. B. and Song, T. H., 1997, "An Alternative Discrete Ordinates Method with Interpolation and Source Differencing for Two-Dimensional Radiative Transfer Problems," *Numer. Heat Transfer, B*, Vol. 32, pp. 107-125.
- (11) Cha, H. and Song, T.-H., 2000, "Discrete Ordinates Interpolation Method Applied to Irregular Three-Dimensional Geometries," *Trans. KSME(B)*, Vol. 24, No. 6, pp. 814~821.
- (12) Kim, M. Y., and Baek, S. W., 1996, "Numerical Analysis of Conduction, Convection, and Radiation in a Gradually Expanding Channel," *Numer. Heat Transfer, A*, Vol. 29, No. 7, pp. 725~740.
- (13) Byun, D. Y., Baek, S. W., and Kim, M. Y., 2000, "Radiation in Discretely Heated Irregular Geometry Using Monte-Carlo, Finite-Volume, and Modified Discrete-Ordinate Interpolation Method," *Numer. Heat Transfer, A*, Vol. 37, pp. 1-18.
- (14) Kim, T. K., 1990, "Radiation and Combined Mode Heat Transfer Analyses in Absorbing, Emitting, and Mie-Anisotropic Scattering Media using the S-N Discrete Ordinates Method," Ph. D. Thesis, University of Minnesota, Minneapolis, MN.