194 대한기계학회논문집 A권, 제27권 제1호, pp. 194~199, 2003

중심 거리 불변의 전위 계수를 적용한 기어 시스템의 변형 특성 해석

박 수 진* · 유 완 석†

(2002년 7월 18일 접수, 2002년 12월 5일 심사완료)

Deformation Characteristics of Gear System with a Profile Shift Coefficient Preserving Center Distance

Su-Jin Park and Wan-Suk Yoo

Key Words: Profile Shifted Spur Gear(전위 평기어), Contact Problem(접촉 문제), Deformation Characteristics(변형 특성), Deformation Overlap(변형 간섭)

Abstract

In this paper, elastic deformations of several gear teeth are analyzed. The contact between a gear and pinion is modeled as a contact problem. The deformation overlap, which is defined as the interference due to deformation of gear teeth, is defined to represent the deformation characteristics of profile shifted spur gear system. The calculated deformation overlap shows teeth interference in the deformed state of a gear system.

1. 서 론

동력을 전달하고 있는 기어 치의 휨 변형에 대한 조사는 치의 형상이나 전달 하중 분배량을 결정하고 적절한 베어링을 선정하거나 진동 특성을 규명하는 등에 이용되며, 기어 설계에 있어 빠질 수 없는 중요한 인자가 된다. 진동이나 전달 오차는 기어 시스템의 생산자나 사용자 모두에 있어 까다로운 문제점으로 지적되고 있으며, 이것은 기어 치의 접촉 영역에 존재하는 하중의 불균일 분포와 함께 기어 치의 탄성 변형이 주요 원인이다.[1,2]

* 회원, 부산대학교 대학원 기계설계공학과
† 책임저자, 회원, 부산대학교 기계공학부
E-mail : wsyoo@pusan.ac.kr
TEL : (051)510-2328 FAX : (051)512-9835

K. Umezawa 등[3,4]은 유한한 폭을 가진 랙 형상의 외팔보에서 휨 변형과 모멘트를 고려하여 기어 치에 적용하였으며, D. B. Wallace 등[5]이 동하중을 받는 기어 치의 변형을 계산하고 도식화하여 소개하였다. G. Chabert 등[6]은 기어 치에 정하중을 부과하고 유한 요소법을 이용하여 휨 변형량을 산출하였으며, A. Cardou,[7] K. Fukunaga,[8] M. E. Stegemiller,[9] E. Yau,[1] P. Gagnon[10] 등이 기어 치의 변형과 휨에 대해서 연구를 수행하였다. 이들 연구에서, 기어 시스템의 변형 특성에 대한 연구는 평기어의 경우 대부분이 표준 기어에 대한 것이며,[5~9] 하중 하에서 기어 치 한 개의 거동을 조사하였고,[3~10] 해석 모형은 인벌류트 부위만을 고려하였거나,[5,6] 외팔보 또는 테이퍼 보 등으로 단순화시킨 경우가 많다.[3,4,9,10]

본 연구에서는 전위 계수에 의해 전위된 랙 커터가 창성하는 전위 평기어의 인벌류트 치형과

필렛 곡선을 만들어내는 프로그램을 작성하고, 이를 통하여 전위 기어에서 전위량에 따른 변형 특성을 해석하고자 하였다. 일반적으로 널리 사용되고 있는 중심 거리를 표준 기어의 중심 거리와 같게 두는 전위 기어가 그 대상이며, 이 경우에 양(+)의 전위를 준 구동 기어의 이두께는 두꺼워지고 음(-)의 전위를 준 피동 기어의 이두께는 얇아지게 된다. 따라서, 두꺼워지는 기어 치는 보다 작은 변형을 하여 전체 기어 시스템의 변형을 억제하는 요인으로 작용하게 되고, 두께가 얇아지는 기어 치는 그 반대의 현상을 나타내게 된다. 그러므로 전위 계수의 변화에 따른 전위 기어 시스템의 변형은, 두께가 증가하는 기어 치와 감소하는 기어 치가 전체 변형에 기여하는 정도의 우위에 따라 증가하거나 감소하게 된다. 이러한 전위 기어 시스템의 변형 특성을 기어 치의 최초 접촉 순간에서 정의되는 변형에 의한 치간섭량을 이용하여 해석하였다.

전위 기어의 인벌류트 치형과 필렛 곡선을 유한 요소 모델로 구현하고, 기어 쌍 사이를 접촉 문제로 정의하여 신뢰성 있는 변형 계산을 수행하는 과정에서, 접촉 문제의 식들을 쌍대 문제로 전환하고, 최소화 문제의 필요 조건을 이용하여 2차 계획법 문제로 정리하였다.[11] 변형 특성 해석을 위한 치간섭량 측정 상황을 기어 치의 최초 접촉 순간으로 설정하여 접촉력을 구하고, 변형 계산을 수행하여 변형에 의한 치간섭량을 계산하였다.

2. 접촉 이론

변형될 수 있는 두 물체가 경계의 일부에서 접촉되어 있을 때, 탄성 영역에서 접촉 영역의 크기와 접촉 압력의 분포, 물체내의 변위, 응력을 구하는 문제가 접촉 문제이다.[11] 두 물체들을 Fig. 1과 같이 물체 1, 2로 구분하며, 기어 쌍의 접촉 문제에서는 구동 기어를 물체 1, 피동 기어를 물체 2로 한다. 변형 변위 u와 변형률 ε_{ij}을 미소 변위, 미소 변형률로 가정하고, 응력 σ_{ij}는 Hooke's law를 적용하면 다음과 같다.

$$u = X - X_0 \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \tag{3}$$

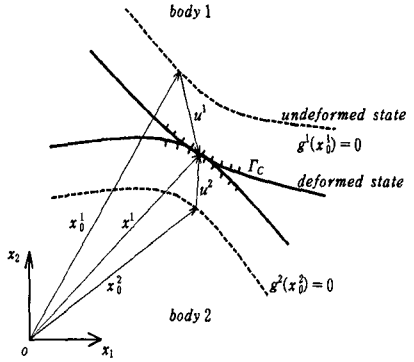

Fig. 1 Contact between two bodies

여기서, X_0와 X는 각각 변형 전후의 위치이고, $u_{i,j}$는 u_i를 공간 좌표계 x_j로 편미분한 것을 의미하며, σ_{ij}, ε_{ij}, C_{ijkl}은 각각 응력, 변형률, 탄성 계수를 의미한다. 또한, 수식의 같은 항에서 하첨자가 중복되는 경우에는 총합(summation)한다. 접촉 문제의 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{4}$$

여기서, b_i는 물체력으로서 평기어 시스템에서는 무시한다. 경계 조건은 변위 경계 조건, 하중 경계 조건과 접촉부의 접촉 경계 조건이 있다. 접촉 경계 조건은 접촉면에서 마찰을 무시하고, 비접착 접촉인 경우에 접촉 경계 Γ_C에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S \cdot g^{(k)} = 0 \ , \quad S \geq 0 \ , \quad g^{(k)} \leq 0 \qquad on \quad \Gamma_C \tag{5}$$

여기서, S와 $g^{(k)}$는 각각 접촉력, 접촉 조건식이며, 상첨자 k는 물체 번호를 나타낸다. 또한, 변위 경계 조건과 하중 경계 조건은 다음과 같다.

$$u_i = \overline{u_i} \qquad on \quad \Gamma_U \tag{6}$$

$$\overline{F_i} = \sigma_{ij}\, n_j^{(k)} \qquad on \quad \Gamma_F \tag{7}$$

여기서, Γ_U, Γ_F는 각각 변위 경계 구간, 하중 경계 구간이고, n은 외향 단위 법선 벡터이다.

기어 쌍의 접촉 문제를 해석하는 방법으로 유한 요소 해석을 채택하여, 유한 요소 수식으로 접촉 문제의 지배 방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\min J(u^1, u^2) \tag{8}$$
$$subject\ to\quad g^{(2)} \le 0 \quad on \quad \Gamma_C$$

식 (8)에서 변형에너지 J와 $g^{(2)}$는 각각 다음과 같다.

$$J = \int \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}d\Omega$$
$$-\int_{\Gamma_F}\overline{F}_i^1 u_i^1 d\Gamma - \int_{\Gamma_F}\overline{F}_i^2 u_i^2 d\Gamma$$
$$= \frac{1}{2}U^{1T}K^1U^1$$
$$+\frac{1}{2}U^{2T}K^2U^2 - R^{1T}U^1 - R^{2T}U^2 \tag{9}$$

$$g^{(2)} \fallingdotseq M^1U^1 + M^2U^2 - G \le 0$$
$$on \quad \Gamma_C \tag{10}$$

여기서, M은 접촉 간극의 감소량 계산 행렬, G는 초기 간극, R은 절점 하중 벡터이다. 유한 요소 수식으로 표현된 접촉 문제는 접촉 문제의 특성상 비선형 문제이므로 이 문제를 해석하는 방법으로 쌍대 문제(dual problem)를 이용하면 다음과 같은 이차 계획법 문제가 된다.

$$\max\ [-\frac{1}{2}P^TQP - R^TP] \tag{11}$$
$$subject\ to\quad P \ge 0$$

$$Q = M^1(K^1)^{-1}M^{1T} + M^2(K^2)^{-1}M^{2T} \tag{12}$$

$$R = G - M^1(K^1)^{-1}R^1 - M^2(K^2)^{-1}R^2 \tag{13}$$

본 연구에서는 이차 계획법 문제를 Lemke method[12]를 이용하여 수치 해석을 수행하였다.

접촉 이론을 실제 문제에 적용하기 위해 FORTRAN을 사용하여 전산 프로그램을 구성하였으며, 흐름도를 Fig. 2에 나타내었다. 기어 치의 접촉 쌍에서 발생하는 접촉 문제를 위와 같은 탄성 접촉 문제로 정의할 수 있으므로, 전위 평기어 쌍의 접촉 문제에 적용하고자 한다.[13]

3. 수치 해석

3.1 유한 요소 모형

인벌류트 치형 곡선을 가지는 기어 치를 형상화하기 위해, 기본 제원인 압력각, 모듈, 잇수, 전위 계수가 주어진 경우, 기어의 치수와 인벌류트 함수를 이용하여 인벌류트 치형을 형상화하였으며, 필렛 곡선은 전위된 랙 커터의 치끝의 둥근 부위에 의해 창성되는 궤적을 사용하였다.[14]

구동기어의 잇수 42개, 피동기어의 잇수 49개, 모듈 2.25, 압력각 17.5 ° 이고, 재료의 물성치는 영계수 206010 N/mm^2, 프와송비 0.3인 기어의 물림 상태를 단위 치폭을 갖는 평면 응력 시스템으로 생각하여 유한 요소 모형화를 수행하였고, 유한 요소는 4절점 사각형 요소를 사용하였다.

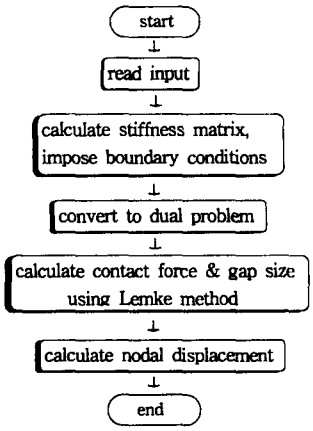

Fig. 2 The Flow Chart of Contact Program

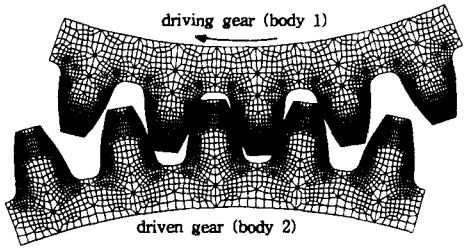

Fig. 3 Finite Element Model for Standard Spur Gear System

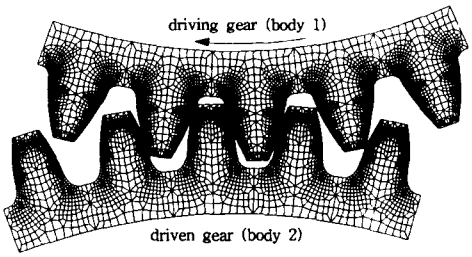

Fig. 4 Finite Element Model for Profile Shifted Spur Gear System

Table 1 Data of gear system

	Driving gear	Driven gear
Number of teeth	42	49
Pressure angle	17.5 °	
Module	2.25	
Torque($N\cdot mm$)	14048	
Young's modulus(N/mm^2)	206010	
Poisson's ratio	0.3	
Profile shift coefficient	+ 0.5	

물림율이 2.0 이상인 경우의 기어도 고려하여, 접촉되는 기어치 2개와 변형 간섭을 조사하는 기어치 1개, 경계조건을 고려하여 양쪽에 각각 1개씩의 기어치를 더 생성하였다. 전위 계수가 영인 표준 기어의 유한 요소 모형과 구동 기어에 +0.5, 피동 기어에 -0.5의 전위 계수를 적용한 전위 기어의 유한 요소 모형이 각각 Fig. 3와 Fig. 4에 있다. 전위량에 의해 구동 기어의 이두께는 두꺼워지고 피동 기어의 이두께는 얇아진 것을 볼 수 있다. 생성된 유한 요소와 절점은 표준기어의 경우 잇수가 많은 피동기어의 요소와 절점이 구동기어 보다 더 많이 생성되었고, 전위 기어의 경우는 표준 기어와 비교하여 치두께의 변화로 인하여 구동기어는 개수가 증가하였고 피동기어는 감소하였다.

단위 치폭에 대한 전달 토크는 14048 $N\cdot mm$ 이고, 피동 기어의 림과 구동기어의 림에는 변위를 구속하고 구동기어의 림에는 전달 토크를 구현할 수 있는 접촉력이 발생하도록 일정 변위 구속 조건을 부여하였다. 접촉 여부를 조사하는 접촉 예상 구간은 접촉 예상 치면인 중앙의 3개 치면의 모든 절점에 부과하여, 총 120개의 절점에서 접촉 여부를 조사하였다. Fig. 3과 Fig. 4에 나타낸 기어의 주요 제원은 Table 1에, 유한 요소 모형에 대한 정보와 경계 조건은 Table 2과 Table 3에 정리하였다.

3.2 전달 하중 분배량 계산

하중 분배량 해석은 접촉 문제와 유한 요소법[15]을 이용하여 접촉점에서 접촉력을 구하는 방법으로 수행하였다. 1쌍의 기어 치가 접촉하고 있는 상황에서 그 다음 접촉 쌍이 접촉을 시작하는 경우인 치간섭량 측정 상황을 만든 후, 전달 토크인 14048 $N\cdot mm$ 를 실현하기 위해 구동 기어에

Table 2 Data of FE model for standard spur gear system

Gear	Driving gear		Driven gear	
Node	4666		4697	
Element	4360		4400	
Boundary condition	Displacement boundary condition on the rim(mm)			
	Radial	0.0	Radial	0.0
	Circumferential	0.01584	Circumferential	0.0

Table 3 Data of FE model for profile shifted gear system

Gear	Driving gear		Driven gear	
Node	4875		4155	
Element	4590		3860	
Boundary condition	Displacement boundary condition on the rim(mm)			
	Radial	0.0	Radial	0.0
	Circumferential	0.017023	Circumferential	0.0

Table 4 Tooth load sharing of standard gear

Radial distance(mm)	47.53	47.43	47.34	47.25
Contact force (N)	3.97	160.85	28.27	119.17
Total torque ($N\cdot mm$)	14057.20			

Table 5 Tooth load sharing of profile shifted gear

Radial distance(mm)	48.53	48.41	48.29	48.18
Contact force (N)	21.77	152.72	114.90	21.97
Total torque ($N\cdot mm$)	14048.46			

강체 변위를 부과하고 피동 기어에는 변위 경계 조건을 적용하여 전달 하중을 계산하였다. 강체 변위는 Table 2와 Table 3에 나타낸 바와 같이 표준 기어와 전위 기어의 경우 각각 0.01584 mm 와 0.017023 mm 로서, 허용 오차 0.1 % 이내에서 전달 토크를 구현하였다. 접촉하고 있는 가운데 기어치의 접촉면 4개 절점에서 접촉이 발생하였으며, 구동기어의 중심에서부터 각 접촉 절점까지의 반경 방향 거리와 접촉력, 계산된 접촉력에 의한 전달 토크를 Table 4와 Table 5에 나타내었다.

Table 6 Tooth overlap and overlapped nodes depending on profile shift coefficients

Profile shift coefficient	Deformation Overlap(μm)
0.0	16.885
0.125	16.472
0.156	16.567
0.1875	16.558
0.250	16.601
0.375	17.500
0.5	17.555

3.3 기어 치 변형 해석

계산된 전달 하중 분배량을 하중 경계 조건으로 하여 기어 치의 변형 해석을 수행하고, 이 변형 해석 결과를 이용하여 기어 치의 변형에 의한 치간섭량을 정의하여 기어 시스템의 변형 특성을 조사하였다.

기어치의 변형으로 인하여 접촉쌍의 이상적인 접촉 시기 이전에 이미 기어 치가 접촉하게 되므로 기어치가 접촉을 시작하는 순간, 즉 접촉 쌍의 개수가 1쌍에서 2쌍으로 되는 순간을 변형에 의한 치간섭량 측정 상황으로 설정한다. 치간섭량 측정 상황에서 변형 해석을 수행한 후, 접촉 시작 예정인 기어 치들의 간섭 부분을 변형 후 기어 치간섭량으로 정의한다. 이상과 같이 변형에 의해 계산되는 치간섭량을 치의 변형 간섭(deformation overlap)이라 부르기로 한다.

3.4 결과 및 고찰

전위 기어 시스템에 대한 수치 해석의 결과를 Table 6에 나타내었다. 전위 계수가 각각 0.0, 0.125, 0.15625, 0.1875, 0.25, 0.375, 0.5인 7가지 경우에 대해서 치의 변형 간섭량과 간섭 절점의 개수를 나타내었다.

전위 계수가 0.0에서부터 점차로 증가 하면서 구동 기어의 이두께는 증가하고 피동 기어의 이두께는 감소하게 된다. 따라서 이두께가 증가한 기어 치는 더 작은 변형을 일으키게 되며 이두께가 감소한 기어 치는 더 큰 변형을 하게 된다. 그러므로 기어 시스템의 변형은 이두께가 증가한 기어 치와 감소한 기어 치가 전체 변형에 기여하는 정도의 우열에 따라 증가 또는 감소하게 되며, 그 결과로 치의 변형 간섭에 변화를 가져오게 된다.

수치 해석 결과에서 알 수 있듯이 전위 계수 0.125까지의 구간에서는 증가한 이두께가 변형에 더 큰 영향을 미치고 있으며 따라서 전체적인 변형이 감소하므로 변형 간섭은 감소한다. 전위 계수 0.1875까지의 구간에서는 변형 간섭이 정체 현상을 보이고 있으며, 따라서 증가한 이두께와 감소한 이두께가 변형에 대해 서로 대등한 관계를 지니고 있는 구간으로 판단할 수 있다. 전위 계수 0.1875 이상에서는 감소한 이두께가 전체 변형에 더 큰 기여를 하여 기어 시스템 전체의 변형이 증가하므로 변형 간섭이 계속 증가하게 된다. 특히 전위 계수가 0.375를 넘어가면 이두께가 감소한 기어치의 변형이 급격히 증가하여 전체적인 변형이 증가하고 변형 간섭 또한 크게 증가한다.

4. 결 론

전위 기어 시스템이 동력을 전달하고 있을 때의 탄성 변형 특성을 조사하기 위해 기어 쌍 사이를 접촉 문제로 해석하고 접촉하는 기어 치에서 전달 하중을 접촉력으로 구하였으며, 변형에 의한 기어 치의 간섭량을 계산하였다. 이러한 치간섭량을 변형 간섭으로 정의하고, 이를 이용하여 전위 기어 시스템의 변형 특성을 해석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 동력 전달용 기어 시스템에서 랙 커터가 창성하는 인벌류트 치형 곡선과 필렛 곡선을 구현하고 접촉 문제로 구성하였다.

(2) 기어치의 최초 접촉 상황에서 변형 간섭을 정의하고 변형 특성을 판단하는데 이용하였다.

(3) 중심거리 불변의 전위 계수를 적용한 기어 시스템에서 이두께의 변화에 따라 변형이 증가하고 감소하는 전위계수의 구간을 조사하고 그에 따른 변형 특성을 파악하였다.

(4) 본 연구에서 개발된 전산 프로그램을 이용하여 전위계수의 변화에 대한 영향을 설계 단계에서 검토할 수 있다.

후 기

본 연구는 국가지정연구실(부산대학교 기계공학부 CAE연구실, M1-0203-00-0017-02J0000-00910)의 지원으로 이루어졌음.

참고 문헌

(1) Yau, E., Busby, H. R. and Houser, D. R., 1994, "A Rayleigh-Ritz Approach to Modeling Bending and Shear Deformation of Gear Teeth," *Computer & Structures*, Vol. 50, No. 5, pp. 705~713.

(2) Park, C. I.. and Lee, J. M., 1996, "A Study on the Vibration Characteristics of Helical Gears with Tooth Errors," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 20, No. 5, pp. 1534~1542.

(3) Umezawa, K, 1972, "Deflections and Moments Due to a Concentrated Load on a Rack-Shaped Cantilever Plate with Finite Width for Gears," *Bulletin of the JSME*, Vol. 15, No. 79, pp. 116~130.

(4) Umezawa, K. and Ishikawa, J, 1973, "Deflection Due to Contact between Gear Teeth with Finite Width," *Bulletin of the JSME*, Vol. 16, No. 97, pp. 1085~1093.

(5) Wallace, D. B. and Seireg, A, 1973, "Computer Simulation of Dynamic Stress, Deformation, and Fracture of Gear Teeth," *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 95, No. 4, pp. 1108~1114.

(6) Chabert, G, Dang Tran, T, Mathis, R, 1974, "An Evaluation of Stresses and Deflection of Spur Gear Teeth under Strain," *Transactions of the ASME, Journal of Engineering*, Vol. 96, No. 1, pp. 85~93.

(7) Cardou, A. and Tordion, G. V, 1985, "Calculation of Spur Gear Tooth Flexibility by the Complex Potential Method," *Transactions of the ASME, Journal of Mechanics, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 107, pp. 38~42.

(8) Fukunaga, K, 1987, "A Strength Analysis of Spur Gears including Ratio of Contact," *Japan Society of Mechanical Engineers, Transactions Series C*, Vol. 53, No. 489, pp. 1071~1076.

(9) Stegemiller, M. E, 1993, "A Three-dimensional Analysis of the Base Flexibility of Gear Teeth," *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 186~192.

(10) Gagnon, P, Gosselin, C. and Cloutier, L, 1997, "Analysis of Spur and Straight Bevel Gear Teeth Deflection by the Finite Strip Method," *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 119, pp. 421~426.

(11) Huh, G. J, 1991, "Constrained Variational Approach for Dynamic Analysis of Elastic Contact Problems," *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 10, pp. 125~136.

(12) Van de Panne, Whinstone, A, 1964, "The Simplex and the Dual Method for Quadratic Programming," *Operational Research Quarterly*, Vol. 15, No. 4, pp. 355~388.

(13) Huh, G. J. and Park, S. J., 1999, "A Study on the Profile Modification of Spur Gears for the Prevention of Gear Tooth Overlap by Deformation," *Journal of the Korean Society of Precision Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 208~214.

(14) Colbourne, J. R, 1987, *The Geometry of Involute Gears*, Springer-Verlag, New-York, pp. 212~218.

(15) Bathe, K. J, 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall International Editions, pp. 342~363, 622~628.