

## 영위법을 이용한 미소중량 측정 장치의 기구설계

최인묵<sup>†</sup> · 우삼용\* · 김부식\* · 김수현\*\*  
 (2002년 7월 11일 접수, 2002년 11월 15일 심사완료)

### Mechanism Design of the Micro Weighing Device by Using Null Balance Method

In-Mook Choi, Sam-Yong Woo, Boo-Shik Kim and Soo Hyun Kim

**Key Words :** Null balance(영위법), Force(힘), Measurement(측정), Repeatability(반복능), Parallel spring(평행스프링), Resolution(분해능)

#### Abstract

Micro-weighing device by using null balance method is being essential part in fields of high-technology industries such as precision semiconductor industry, precision chemistry, biotechnology and genetics etc. Also, requirements for high resolution and for large measurement range increase more and more. The performance of the micro-weighing device can be determined by the mechanism design and analysis. The analytical design method has been proposed for the performance improvement such as resolution, measurement range and fast response. The 2-stage displacement amplification is designed to overcome the limit of conventional force transmitting lever. The parallel spring is designed for the measurement result independent of the input force position variation. Also, the natural frequency of mechanism is analyzed for the fast response. After each analysis, optimal design has been carried out. To verify the analysis and design result, characteristics experiments had been carried out after construction. Finally, the system had been controlled.

기호설명	
$L_g$	: 레버이득
$2w, 2b$	: 수평 및 수직 빔 거리
$h$	: 빔의 폭
$t$	: 빔의 두께
$l$	: 빔의 길이
$\beta_T$	: 빔의 기울임각
$\delta$	: 변위
$\theta$	: 각변위
$F, P$	: 힘
$I_i$	: 관성모멘트
$M, T$	: 모멘트 및 비틀림 힘
$M'$	: 질량행렬
$T'_{p_i}$	: 변환행렬

$R^i$	: 회전행렬
$Q_i$	: 일반화 힘
$q^i$	: 일반화 좌표
$R_i$	: 레버길이
$a_i$	: 레버위치
$C_{ij}$	: 컴플라이언스
$B$	: 자속밀도
$i_c$	: 코일입력전류
$l_c$	: 유효코일길이
$W_i$	: 목적함수

#### 1. 서론

미소중량 측정은 첨단산업 분야에 필수적으로 사용된다. 유전공학, 의학, 화학, 생명공학 등 많은 분야에서 높은 정밀도의 미소질량 측정이 요구되고 있다.

미소힘 측정 시스템은 정밀도와 측정방법에 따라 크게 로드셀형(Loadcell type) 과 영위법형(Null

<sup>†,\*</sup> 책임저자, 회원, 한국표준과학연구원  
 E-mail : mookin@kriss.re.kr  
 TEL : (042)868-5117 FAX : (042)868-5679  
 \*\* 한국과학기술원

balance type)으로 나눌 수 있다. 여기서 로드셀형은 입력 힘에 대한 기계적 변형을 전기적 신호로 바꾸어주는 모든 변환기(Transducer)를 일컫는다. 로드셀형의 대표적인 예로 스트레인 게이지(Strain gauge)를 들 수 있다. 로드셀은 정밀도가 다소 떨어지는 반면 저가이고 제작이 쉽다. 그러나 로드셀 자체의 기계적 변형에 대한 비선형성을 갖고, 주위환경의 변화에 민감하기 때문에 자체 특성 향상을 통해 높은 정밀도를 얻기에는 한계가 있다. 따라서 대용량 힘을 측정하기는 어렵지만 높은 분해능을 얻을 수 있기 때문에 미소 힘 측정에는 영위법을 이용한 측정 방법을 이용한다.<sup>(1)</sup>

이외에도 가해지는 힘에 비례한 고유 주파수 변화를 이용하는 방법과 자기특성변화를 이용하는 증량측정장치가 있고, 자이로의 원리를 이용하는 방법도 제시되고 있다. 그러나 대체적으로 큰 힘의 측정이 요구되는 곳에 사용되고 있으며 성능의 한 척도로 사용되는 분해능과 측정범위 비(Ratio)가 로드셀이나 영위법을 이용한 시스템에 비해 현저하게 떨어진다. Fig. 1은 현재 상용화되고 있는 시스템의 측정영역을 보여준다.<sup>(2-5)</sup>

영위법은 힘이 가해져 메커니즘의 변위가 발생하면 코일에 전류를 가하여 반대의 로렌츠힘(Lorentz force)을 발생시켜 기구부가 항상 영점의 위치에 있도록 제어한다. 이때 가해지는 힘과 코일에 적용되는 전류와의 비례 관계를 이용해 가해지는 힘을 측정한다. 이러한 전자기힘 보상을 이용한 영위법은 우수한 선형성을 가지며 과입력힘에 의한 영점의 이동에 무관하다는 장점이 있지만 다른 정밀 측정장비와 마찬가지로 온도문제에 민감하고 동적힘 측정을 하기 어렵다.

영위법을 이용한 미소중량 측정 장치의 성능향상을 위해서는 기계적 특성이 매우 중요하다. 적용되는 제어성능과 필터(filter)등은 기계적 시스템에 의해 결정된 특성을 감소시킬 뿐 향상시킬 수는 없다. 따라서 기계적 설계방법은 시스템의 성능을 결정하는 중요한 요소이다. 그러나 현재 기계적 설계 방법에 대해 제시한 논문은 없었으며, 단지 제어방법과 필터설계에 대한 몇 가지 논문과 특허만이 제시 되었을 뿐이다.<sup>(6-8)</sup>

본 논문은 미소 질량 측정을 위한 시스템의 기계적 해석 및 설계 방법에 중점을 두고 있다. 2장에서는 영위법을 이용한 힘 측정에 대한 일반적인 원리 및 구성요소의 역할 등에 대해 설명한다. 3장에서는 기계 구성요소의 설계조건 및 방법을 제시하고 모의 실험(Simulation) 결과를 통해 설계 방법을 검증한다. 4장에서는 설계 방법에 따라 제작된 시스템의 특성 실험 결과가 제시 되며 5장

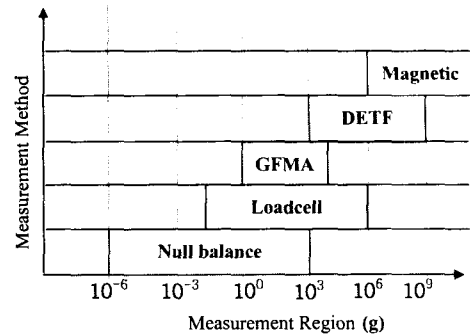


Fig. 1 Measurement performance according to the measurement methods

에서는 본 논문의 결론과 향후 연구에 대해 제시하였다.

## 2. 힘 측정 시스템

Fig. 2는 기존의 미소 중량 측정 장치의 개략도이다. 물체가 증량판(Weighing pan)에 올려져 중력에 의해 힘이 수직으로 발생하면 연결된 로버발(Roberval) 메커니즘으로 알려진 평행스프링에 의해 수직 변위가 발생된다. 발생된 수직 변위는 변위확대 메커니즘에 전달되어 코일부의 변위를 크게 증가시키게 된다. 이 변위는 광학센서(Optical sensor)등의 초정밀 변위센서를 통해 측정된 후 제어부에 전달된다. PID 등의 적절한 제어기를 거친 후 코일에 전류가 가해지고 이때 발생하는 로렌츠힘에 의해 반대 방향의 힘이 발생하여 코일부가 상승하지 못하도록 한다. 위치센서에서 얻어지는 오차전압이 0이 될 때까지 제어하고 이때 코일에 가해지는 전류와 힘과의 비례관계로부터 미소질량을 측정하게 된다. 여기서 정밀도를 결정하는 중요한 역할을 하는 기구부가 변위확대기구와 평행스프링이다. 이러한 메커니즘을 갖는 시스템의 측정 성능을 향상시키기 위해서는 다음과 같은 세 가지의 설계요건이 필요하다.

첫째, 위치 반복능을 향상시키기 위한 설계요건이 필요하다. 평행 스프링은 물체가 놓여지는 위치, 다시 말해 위치 반복능(Repeatability)과 관계가 있다. 물체가 증량판의 중앙에 위치하는 경우와 끝단(Edge)에 위치했을 때 위치센서에서 얻어지는 변위는 다르게 된다. 입력 힘이 작을 경우에는 위치에 무관하게 되지만 측정범위에 가까운 큰 힘이 가해질 경우 이러한 차이는 곧 시스템의 반복능에 영향을 미치게 된다. 일반적으로 평행스프링은 이

러한 힘의 위치 변화에 대해 변위가 크게 다르지 않지만 정밀한 미소 질량 측정에서는 매우 큰 오차 요인이 된다. 이것은 시스템에 가해지는 힘의 위치에 관계없이 항상 일정한 변위를 발생시키기 위해서 힘에 의한 변위가 위치이동에 의해 추가로 발생한 모멘트와 비틀림힘(Torsion)에 의한 변위보다 매우 커야 함을 의미한다. 끝단에 가해지는 힘은 중앙에 가해지는 힘에 모멘트가 더해진 형태이기 때문에 힘에 의한 변위와 모멘트에 의한 변위의 비를 목적함수,  $W_1$  으로 설정하여 이를 최대화하기 위한 설계가 요구된다. 힘에 의한 변위는 크게 유지하면서 모멘트에 의한 변위는 없도록 설계해야 한다.

둘째, 시스템의 분해능과 측정 범위의 향상을 위한 설계요건이 필요하며 이것은 변위확대 메커니즘의 기능과 관련이 있다.

분해능보다 더 큰 힘의 변화가 있을 경우 센서에서 변화를 감지 할 수 있어야 한다. 센서의 성능이 결정되었을 경우 외부 힘에 대한 변위가 증가할수록 분해능을 향상시킬 수 있게 된다.

또한 전자기력에 의한 보상힘이 일정할 경우 큰 레버 비(Lever ratio) 즉 레버이득(Lever gain,  $L_g$ )에 의해 측정 범위가 향상될 수 있다. 레버 비는 대략 1:5~1:40 정도를 사용하게 된다. 1 N의 힘이 가해졌을 경우 레버이득에 의해 전자기부에서는  $1/L_g$  (N)의 힘만 보상해주면 된다. 반대로 1 N의 보상 힘이 결정되었다면 측정범위는  $L_g$  (N)이 된다. 레버비를 증가 시킨다면 그만큼 측정 범위는 증가하게 된다.

측정성능을 향상시키기 위해서는 분해능과 측정범위의 비를 목적함수,  $W_2$  로 설정하여 이를 최대화하기 위한 설계가 요구된다.

셋째로, 빠른 응답특성을 위한 설계요건이 필요하다. 위의 정적특성만을 고려하게 되면 시스템의 크기가 커지고 응답특성이 감소하게 된다. 시스템의 대역폭을 향상시키기 위해 메커니즘의 고유주파수를 또 하나의 목적함수( $W_3$ )로 설정하여 최대화하기 위한 설계가 요구된다.

위의 최적화 설계를 통해 영위법을 이용한 미소 질량측정기 제작을 위해 먼저 평행스프링과 변위확대 메커니즘에 대한 특성 해석이 필요하다.

### 3. 기구설계

#### 3.1 평행스프링

평행스프링은 가해지는 힘의 위치에 따른 변위 출력의 변화를 막기 위한 것이다.

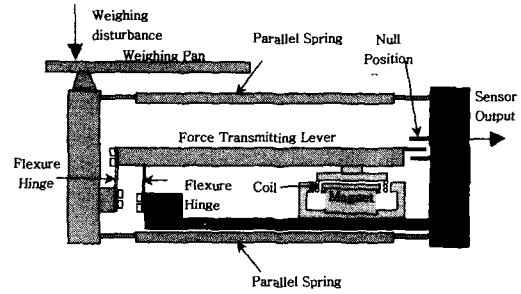
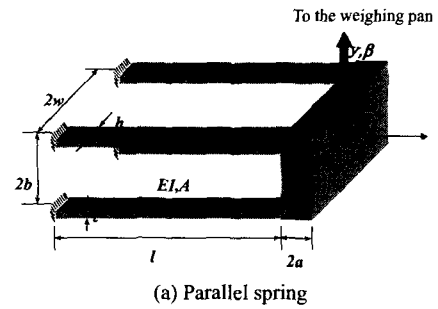
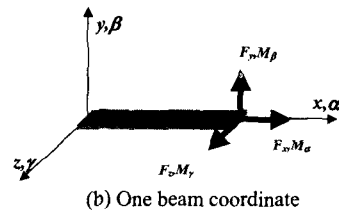


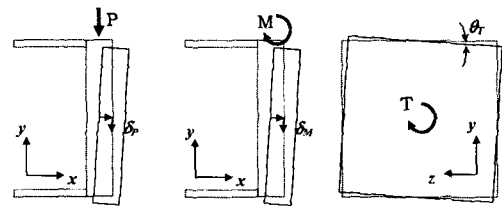
Fig. 2 Conventional micro-weighing device



(a) Parallel spring



(b) One beam coordinate



(c) Load receptor displacements according to input forces

Fig. 3 Coordinate for parallel spring analysis

힘이 중량판의 중앙에 가해졌을 경우와 끝단에 가해졌을 경우의 측정결과에 차이가 없도록 평행스프링이 설계 되어야 한다.

$$\begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{yy} & 0 & 0 & 0 & C_{yz} \\ 0 & 0 & C_{zz} & 0 & C_{z\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{\theta x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{\theta y} & 0 & C_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & C_{\theta z} & 0 & 0 & 0 & C_{\theta z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

이러한 평행스프링의 기능을 강화시키기 위해 선 정확한 메커니즘 해석이 필요하다. Fig. 3 과 같

은 일반적인 평행스프링을 해석하기 위해 식 (1) 과 같은 하나의 빔(beam)의 컴플라이언스 행렬 (Compliance matrix)을 이용할 수 있다.

힘에 의한 변위량  $\delta_p$  와 힘이 중량판의  $x$  축 끝단에 가해졌을 경우 추가되는 모멘트에 의한 변위량  $\delta_M$  의 비가 무한대가 되면 힘의 위치에 따른 오차는 사라진다. 또한 중량판의  $y$  축 방향으로의 입력 힘 위치 변화에 의한 추가적인 비틀림힘에 의한 변위는 이론적으로 0 이 된다. 하지만 조립 및 가공오차에 따른 영향을 줄이기 위해서는 이러한 비틀림힘에 의한 각변위  $\theta_r$  를 최소화 해야만 한다. 따라서 식 (2)와 같이 목적함수  $W_1$  을 설정 하였을 경우 이를 최대화 하기 위한 설계가 필요하다.

$$W_1 = w_1 \frac{\delta_x}{\delta_u} + w_2 \frac{\delta_y}{\theta_r} \quad (2)$$

여기서  $w_1, w_2$  는 가중치(Weighting factor)이다.

식 (1)은 6 개의 변위와 6 개의 힘 변수가 존재한다. 따라서 6 개의 방정식을 풀기 위해서는 6 개의 조건식이 필요하다. 평행스프링의 움직임을 고려하면 Table 1 과 같이 입력 힘에 대해 힘과 변위의 6 개 조건을 세울 수 있다.

Fig. 3(c)에서 처럼 힘을 받는 부분인 평행스프링을 연결하는 강체의 중앙에 수직한 힘  $P$  가 작용할 때 한 빔의 끝단에 작용하는 힘과 변위를 생각할 경우 Table 1(a)에서처럼 4 개의 변위 조건을 설정할 수 있다. 수직 힘에 대해 대칭조건에 의해  $z$  축 방향의 변위와  $x$  축,  $y$  축의 각변위가 없게 되고  $z$  축에 대한 각 변위는  $x$  축 방향의 변위에 의해 표현될 수 있다. 또한 Table 1(b)에서처럼 2 개의 힘 조건을 설정할 수 있다. 4 개의 빔에 수직 힘이 분산되므로  $y$  축 방향으로의 힘은  $P/4$  가 되고 모멘트는  $M_r = -bF, -aP/4$  으로 표현 된다.

비슷한 방식으로 힘의  $x$  축 위치 변화에 의해 추가적으로 발생한 모멘트,  $M$  에 대해서 4 개의 변위 조건과 2 개의 힘의 조건을 설정할 수 있다. 하나의 힘의 조건은  $M_r = M/4 - bF$  이고  $y$  축 방향으로 발생하는 힘은 0 이 된다. 마찬가지로 힘의  $z$  축 방향의 위치변화에 의해 추가적으로 발생한 비틀림힘,  $T$  에 대해서 5 개의 변위 조건과 1 개의 힘 조건  $T/4 = M_u + wF + bF$  을 설정할 수 있다.

이처럼 Table 1 에서의 6 개의 조건을 이용하여  $P$  에 의한 변위  $\delta_p$ ,  $M$  에 의한 변위  $\delta_M$ ,  $T$  에 의한 각 변위  $\theta_r$  를 각각 구하면 다음과 같다.

Table 1 Constraints of parallel spring analysis

	$\delta_x$	$\delta_y$	$\delta_z$	$\theta_\alpha$	$\theta_\beta$	$\theta_\gamma$
$P$	$\delta_x$	$\delta_y$	0	0	0	$\delta_x/b$
$M$	$\delta_x$	$\delta_y$	0	0	0	$\delta_x/b$
$T$	0	$w\theta_\alpha$	$b\theta_\alpha$	$\theta_\alpha$	0	0

(a) Displacement constraints

	$F_x$	$F_y$	$F_z$	$M_\alpha$	$M_\beta$	$M_\gamma$
$P$	$F_x$	$P/4$	$F_z$	$M_\alpha$	$M_\beta$	$M_\gamma(F_x, P)$
$M$	$F_x$	0	$F_z$	$M_\alpha$	$M_\beta$	$M_\gamma(F_x, M)$
$T$	$F_x$	$F_y$	$F_z$	$M_\alpha(F_y, F_z, T)$	$M_\beta$	$M_\gamma$

(b) Force constraints

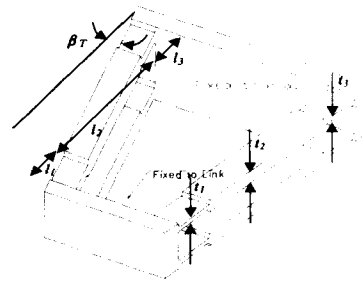


Fig. 4 Modified parallel spring

$$\delta_p = \frac{(C_{yy} + aC_{yy})C_{xx} + b^2(C_{yy}C_{zz} - C_{yz}C_{zy})}{4(C_{xx} + b^2C_{zz})} P \quad (3)$$

$$\delta_M = \frac{C_{yy}C_{xx}}{4(C_{xx} + b^2C_{zz})} M \quad (4)$$

$$\theta_r = \frac{C_{zz}C_{yy}C_{zz}}{4(C_{yy}C_{zz} + w^2C_{zz}C_{zz} + b^2C_{yy}C_{zz})} T \quad (5)$$

힘이 가해지는 중량판을 원으로 보게 되면 모멘트와 비틀림힘은 수직힘과 거리의 곱으로 표현되기 때문에 식 (2)는 빔의 컴플라이언스와 치수 로만 표현될 수 있다.

식 (3)-(5)를 이용하여 식 (2)의 목적함수를 최대화 할 수 있다. Fig. 3 에서 보여지는 일반적인 평행스프링의 길이와 두께 변화는 시스템 사양을 맞추기 어렵다. 평행스프링의 강성(Stiffness)을 크게 유지하면서 추가적인 모멘트와 비틀림힘에 대한 영향을 줄이기 위해서 Fig. 4 와 같은 평행스프링의 구조변경이 필요하다.

Fig. 4 와 같이 수직힘에 대한 강성을 작게 유지 하면서 모멘트에 의한 영향을 줄이기 위해서 빔의 두께변화가 필요하며 비틀림힘에 의한 영향을 줄이기 위해서는 빔의 기울임이 필요하다. 빔의 두께 변화에 의해 식 (1) 행렬의 각각의 성분들은 Appendix I 에서 처럼 표현된다.

또한 기울임각  $\beta_T$ 의 변환행렬 T에 의해 식 (1)의 컴플라이언스 행렬은 식 (6)과 같이 표현된다. 이때 식 (1)의 힘과 변위에 관한 방정식은 식 (7)처럼 변환된다.

$$C' = T^{-1}CT \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_\beta \\ \theta_\beta \\ \theta_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & C_{12} & 0 & C_{13} & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{23} & 0 & C_{24} \\ C_{31} & 0 & C_{32} & 0 & C_{33} & 0 \\ 0 & C_{41} & 0 & C_{42} & 0 & C_{43} \\ C_{51} & 0 & C_{52} & 0 & C_{53} & 0 \\ 0 & C_{61} & 0 & C_{62} & 0 & C_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_\beta \\ M_\beta \\ M_\beta \end{pmatrix} \quad (7)$$

앞에서와 마찬가지로 식 (7)과 Table 1에서의 조건식을 이용하여  $\delta_P, \delta_M, \theta_T$ 를 Appendix II에서의 결과와 같이 구할 수 있다.

식 (7)에서 추가적으로 발생한 성분들을 0으로 두면 Appendix의 결과가 식 (3)-(5)의 결과와 일치함을 볼 수 있다. 또한 Appendix I에서  $t=t_1=t_2=t_3, l_B=l_1+l_2+l_3$ 로 두면 일반적인 평행스프링의 모든 방향에 대한 컴플라이언스를 얻게 된다.

이와 같은 해석절차를 거치게 되면 Fig. 3과 같은 간단한 평행스프링 컴플라이언스의 경우 다음 식 (8)-(10)과 같이 구해진다.

$$\frac{\delta_P}{P} = \frac{l_B^3 [4I(1+3a/l_B+3a^2/l_B^2)+Ab^2]}{24EI(I+Ab^2)} \quad (8)$$

$$\frac{\delta_M}{M} = \frac{l_B^2(1+2a/l_B)}{4E(I+Ab^2)} \quad (9)$$

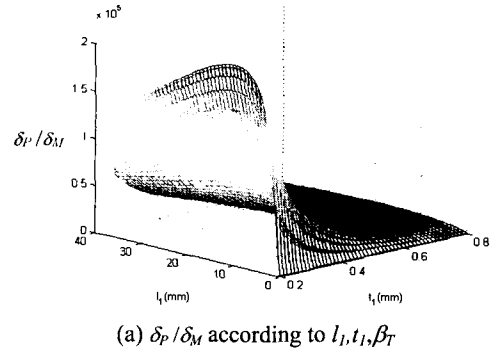
$$\frac{\theta_T}{T} = \frac{1}{4} \left( \frac{k_i G h t^3}{l_B} + w^2 \frac{3EI}{l_B^3} + b^2 \frac{EA}{l_B} \right) \quad (10)$$

여기서  $l_B$ 는 빔의 길이이고  $A$ 는 빔의 단면적이다.

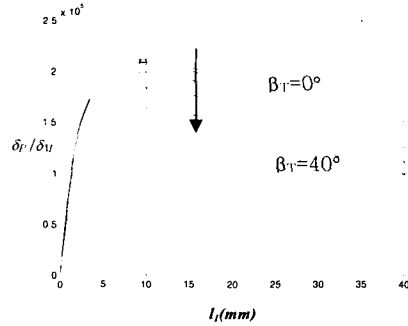
식 (7)의 방정식과 Table 1의 조건식 그리고 Appendix I에서의 각각의 컴플라이언스 성분들을 이용하여 식 (2)를 증가시키기 위한 다양한 설계들을 수행할 수 있다. 평행스프링의 특성에 영향을 미치는 설계 변수들에 대해 정리하면 다음과 같다.

Fig. 5에서 빔의 두께변화  $t_1=t_3$ 는  $t_2$ 에 비해 작을수록  $\delta_P/\delta_M$ 의 값이 증가하게 됨을 보여준다. 또한  $l_1=l_3$ 는 두께가 결정되면  $\delta_P/\delta_M$  최대가 되는 최적의 값이 존재하게 된다. 기울임각  $\beta_T$ 가 증가할수록 특성이 좋아 짐을 알 수 있다.

Fig. 6는  $\delta_P/\theta_T$ 의 특성변화를 보여준다.  $t_1, l_1$ 에

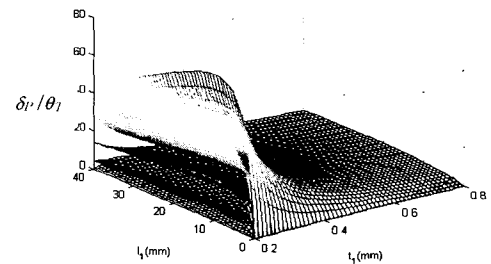


(a)  $\delta_P/\delta_M$  according to  $l_1, t_1, \beta_T$

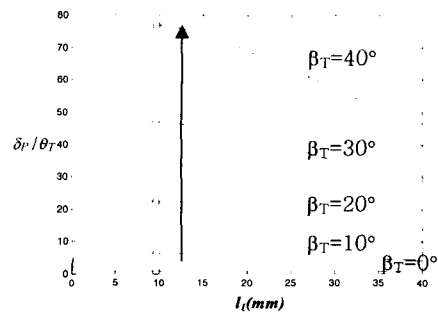


(b)  $\delta_P/\delta_M$  when  $t_1$ =minimum

Fig. 5 Reproducibility with  $\delta_P/\delta_M$



(a)  $\delta_P/\theta_T$  according to  $l_1, t_1, \beta_T$



(b)  $\delta_P/\theta_T$  when  $t_1$ =minimum

Fig. 6 Reproducibility with  $\delta_P/\theta_T$

대한 영향은  $\delta_P/\delta_M$ 의 경향과 비슷하지만 기울임각

$\beta_r$ 의 효과가 매우 큼을 볼 수 있다.

실제 제작사에는  $t_1$ 이 매우 작기 때문에 일체형으로 가공하기 어려워 휨힌지(Flexible hinge)로 변형부분을 대체한다. 이때 빔의 가운데 부분( $l_2$ )의 강성이 휨힌지에 비해 클수록 특성이 향상된다.

또한 휨힌지의  $y$ 축 스프링상수가 매우 작고 다른 축들의 스프링상수가 큰 원형 휨힌지(Circular flexure hinge)등을 사용할수록 특성은 좋아진다. 제작의 용이성을 위해서 밴드스프링(band spring)을 사용하였다.

### 3.2 변위확대기구

평행스프링의 변위를 직접 감지하여 측정에 사용하는 것은 분해능 및 측정범위 면에서 비효율적이기 때문에 변위 확대기구를 사용한다. 변위확대기구로 사용되는 레버 구조는 휨힌지를 이용해 레버를 회전하는 형태이다. 사용되는 휨힌지는 평행스프링과 마찬가지로 밴드스프링을 사용하였다.

변위확대기구는 큰 레버이득(Lever gain)과 민감도를 동시에 만족해야 한다.

레비비를 증가시키게 되면 같은 전자기력을 발생시키더라도 보상할 수 있는 힘이 증가하게 되므로 측정범위를 확대할 수 있게 된다.

$$F = L_s F_s = L_s B l_s i \quad (11)$$

자속밀도( $B$ )와 코일의 유효길이( $l$ )를 증가시키지 않고 레버이득만 증가시키더라도 측정범위를 증가시킬 수 있게 된다.

레버이득만을 무한히 증가시키게 되면 변위확대기구의 강성 및 시스템 크기가 증가하기 때문에 민감도 및 응답속도가 감소된다. 분해능을 증가시키기 위해서는 변위확대기구의 전체 강성을 작게 설계해야 한다

이와 같이 측정범위 및 분해능을 증가시키기 위해서는 식 (12)와 같이 두 특성의 비를 목적함수( $W_2$ )로 하여 이를 최대화하기 위한 설계가 필요하다.

$$W_2 = \frac{F_{range}}{F_{res}} = \frac{L_s F_s}{K_{amp} \delta_d} \quad (12)$$

측정범위  $F_{range}$ 는 전자기부에서 발생할 수 있는 힘( $F_s$ )에 레버이득을 곱한 값이 된다. 레버이득은 레버 팔의 비에 의해 결정된다. 또한 최소 측정가능 힘  $F_{res}$ 은 변위센서에서 감지할 수 있는 최소 변위량만큼 변위 확대 기구가 변형되었을 때의 복원력과 같다.

변위확대기구는 일반적으로 1 단 증폭만을 하지만 힌지 사이의 거리와 조립문제 때문에 증폭비를 증가시키는데 한계가 있다. 본 연구에서는 2 단 확대 메커니즘을 설계하여 민감도와 증폭비를 동시에 증가시킬 수 있도록 한다.

기존의 2 단 증폭기구의 해석 방법은 매우 단순하기 때문에 변위만 단순히 증폭할 경우에는 단순화한 방법에 의해 설계해도 무방하지만 힘이 고려되게 되면 기존의 방법은 오차가 크다. 기존의 단순화된 방법은 힌지의 모멘트에 의한 회전만을 고려한다. 정확한 해석을 위해서는 힌지에 걸리는 인장력 및 압축력 뿐만 아니라 횡축힘(Transverse loading)등에 대한 영향도 고려 되어야만 한다.

2 단 증폭의 형태는 Fig. 7에서 보여지고 있다. 이를 해석하기 위하여 정밀 스테이지 설계에 사용되는 방법중 하나인 라그랑지(Lagrange) 법을 사용하였다. 라그랑지법은 강체가 힌지에 의해 서로 연결되었을 때 사용되는 해석 방법으로 6 축의 힘을 모두 고려하게 된다. 위치에너지(Potential energy)는 식 (13)과 같이 표현된다.<sup>(9)</sup>

$$V = \sum_{i=1}^{N_b} \frac{1}{2} [q^i T_p^{i'} R^k k_s R^{k'} T_p^i q^i - q^i T_p^{i'} R^k k_s R^{k'} T_p^i q^i - q^i T_p^{i'} R^k k_s R^{k'} T_p^i q^i + q^i T_p^{i'} R^k k_s R^{k'} T_p^i q^i] \quad (13)$$

여기서  $q^i$ 는 강체의  $i$  번째 일반화좌표(Generalized coordinate)이고  $N_b$ 는 강체의 개수이며  $T_p^i$ 는 변환행렬(Transformation matrix)이다.  $R^k$ 는 강체  $k$ 에 대한 힌지의 회전행렬(Rotation matrix)이고  $k_s$ 는 강체에 연결된 힌지의 스프링 상수 행렬이다. 운동에너지(Dynamic Energy)는 식 (14)와 같다.

$$T_e = \sum_{i=1}^{N_b} \frac{1}{2} [\dot{q}^i M^i \dot{q}^i] \quad (14)$$

여기서  $M^i = \text{diag}[m^i, j^i]$ 는 강체  $i$ 의 관성행렬(Inertia matrix)이며  $m^i = \text{diag}[m^i, m^i, m^i] j^i = \text{diag}[I_x^i, I_y^i, I_z^i]$ 로 표현된다.  $m^i$ 는 강체의 질량이고,  $I_x^i, I_y^i, I_z^i$ 는 관성모멘트(moment of inertia)이다. 동적특성 해석을 고려한다면 관성행렬이 대각(diagonal)행렬이 되게 하기 위해서 질량중심에서 주축(Principal axis)을 취해야 한다. 그러나 동적특성을 고려치 않는다면 편의에 따라 좌표를 설정할 수 있다.

식 (16)과 같은 운동방정식을 얻기 위하여 식 (13)~(14)을 식 (15)와 같은 라그랑지 식(Lagrange's Equation)에 적용한다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T_e - V)}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial(T_e - V)}{\partial q^i} = Q^i \quad (15)$$

여기서  $Q^i$ 는 일반화힘(Generalized force)이다. 이 때 식 (15)로부터 얻어지는 운동방정식은 식 (16)과 같다.

$$M^{sys} \ddot{x} + K^{sys} x = F \quad (16)$$

여기서  $M^{sys}$ ,  $K^{sys}$ 는 각각 질량 및 스프링 행렬이며  $F$ 는 입력 힘 벡터이다. Fig. 7과 같이 2 단 증폭일 경우 2 개의 강체로 모델링되며 식 (16)의 운동방정식에서 사용되는 변위와 힘은 식 (17)의 벡터로 표현된다. 첨자 1은 입력 강체를 나타내며 첨자 2는 출력 강체를 표현 한다.

$$x = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix}_{12,1}, \quad F = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}_{12,1} \quad (17)$$

Fig. 7로부터 2 개의 강체를 선택하여 식 (18),(19)과 같은 행렬을 얻을 수 있다. 여기서 과 입력 힘에 의한 버클링(Buckling)등의 현상을 피하기 위해 힌지가 인장력만을 받도록 위치 시켰다.

$$M^{sys} = \text{diag}[M^1] \quad (18)$$

$$K^{sys} = \begin{bmatrix} T_1^{1T} R^1 k_h R^{1T} T_1^1 + T_2^{1T} R^2 k_h^2 R^{2T} T_2^1 & -T_2^{1T} R^2 k_h^2 R^{2T} T_2^1 \\ -T_2^{2T} R^2 k_h^2 R^{2T} T_2^2 & T_2^{2T} R^2 k_h^2 R^{2T} T_2^2 + T_3^{2T} R^3 k_h^3 R^{3T} T_3^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

정적힘만을 고려하기 위해 식 (20)와 같이 분리하게 되면 두개의 행렬방정식을 얻게 되는데 입력을 힘으로 할 경우  $q^1$ 을 소거하여 식 (21)과 같이 정리 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$q^2 = (K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12})^{-1} (f^2 - K_{21} K_{11}^{-1} f^1) \quad (21)$$

식 (20)에서 입력 힘  $f^1$ 에 대해 출력변위  $q^2$ 를 구할 수 있다.  $f^1 = 1 \text{ N}$ ,  $f^2 = 0 \text{ N}$ 을 사용하면  $q^2$ 는 변위확대기구의 컴플라이언스( $C_{amp} = K_{amp}^{-1}$ )가 된다. 밴드스프링을 사용할 경우 스프링의 컴플라이언스 형태는 식 (1)과 같다.

$W_2$ 을 증가시키기 위해 변수를 변화 시켜 보았다.  $R_1$ 은 영향을 미치지 못하고  $R_2$ 는 증가 시킬수록  $R_3$ 는 감소시킬수록  $R_4$ 는 증가시킬수록  $W_2$ 값도 증가하게 된다. 이것은 레버이득이 증가할 때 더욱 특성이 좋아지는 경향을 보여주고 있다. 힌지간의 거리 변화에 따른 특성변화는 Fig. 8에서 보여지고 있다. 이것은 변위 확대 메커니즘의 컴플

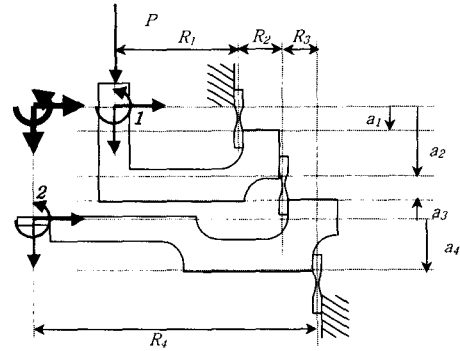


Fig. 7 Amplification mechanism

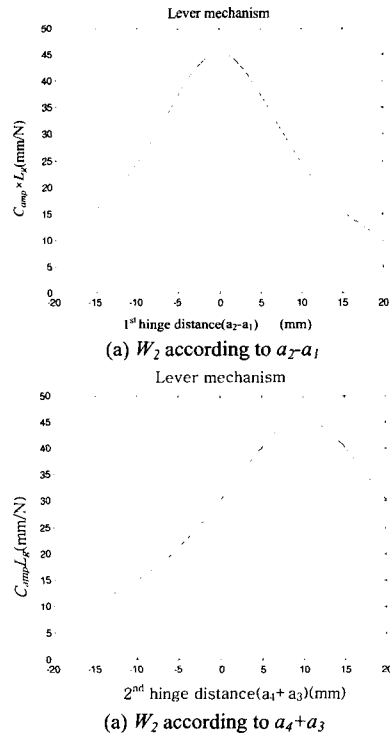


Fig. 8 Characteristic with hinge distance

라이언스가 최대가 되는 경향과 같다. 이로부터 힌지의 위치 및 레버 팔 길이 등을 정할 수 있게 된다.

이와 같이 변위확대기구의 정적인 특성만을 향상시키게 되면 크기가 증가하고 강성이 감소하여 동적특성은 감소되는 경향이 있다. 이에 대한 해석은 평행스프링과 결합된 후 4장에서 다시 고려된다.

#### 4. 최적설계

특성해석을 통해 설계된 두 메커니즘이 결합되

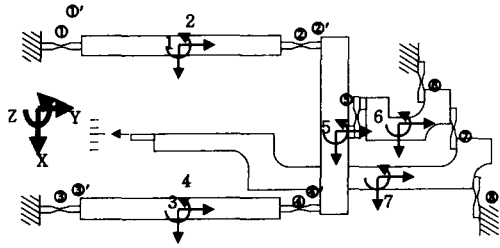


Fig. 9 Combination of parallel spring and amplification mechanism

어 미소중량측정 시스템을 이룬다. 결합 후에도 시스템 특성을 향상시키기 위해  $W_1$  과  $W_2$  를 설계요건으로 설정할 수 있다. 이외에 빠른 응답 특성을 위해 시스템의 고유주파수(Natural Frequency)도 함께 목적함수로 정하였다. 고유주파수는 앞에서 사용된 라그랑지법에 의해 쉽게 해석되어진다.

Fig. 9 는 두 메커니즘을 결합한 후 전체 메커니즘의 개략도이다. 평행스프링과 변위확대기구는 마찬가지로 밴드스프링을 이용해 연결시킨다. 결합되었을 경우의 특성은 결합전의 특성이 거의 유지되지만 연결시키는 힌지에 의해 영향을 받게 된다.

평행 스프링은 수직 변위 이외의 변위가 발생하지 못하도록 설계를 하지만 그 크기를 향상시키는 것은 한계가 있다. 그러나 Fig. 9 와 같은 레버의 연결로 평행스프링의 모멘트에 의해 센서에서 감지되는 변위를 0 으로 만들 수 있다.

모멘트가 평행스프링에 가해지면 레버 구조는 두가지 성분에 의해 움직인다. 평행스프링에 가해지는 모멘트에 의해 수직변위가 발생하여 레버구조에 전달되는 변위성분과 모멘트가 직접 레버구조에 전달되어 발생하는 변위성분이 있다. 이러한 두 성분에 의한 변위 방향을 반대로 하고, 전달되는 크기를 메커니즘 치수 및 힌지에 의해 설계할 수 있다. 1 단 증폭만을 사용하는 일반적인 구조에서는 두 성분에 의한 변위 방향이 같기 때문에 모멘트에 의한 영향을 제거하는 것이 매우 어렵다. 그러나 Fig. 9 에서는 두 방향이 반대가 되기 때문에 최적설계를 통해  $\delta_M$  을 0 으로 만드는 것이 가능하다.

$$K^m = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 & K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & 0 & K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} & K_{11} & 0 & 0 \\ K_{11} & K_{11} & K_{11} & K_{44} & K_{11} & K_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{44} & K_{44} & K_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{44} & K_{44} \end{pmatrix}_{n,n} \quad (22)$$

Table 2 Optimal Design Result

Variable	$W_1$		$W_2$	$W_3$
	$\delta_p/\delta_M$	$\delta_p/\theta_T$	$F_{range}/F_{res}$	$\omega_{n1}$
Target	$10^6$	Not specified	$2 \times 10^5$	5.0 Hz
Obtained	$4.4 \times 10^9$	61 mm/mrad	$1.6 \times 10^6$	5.2 Hz

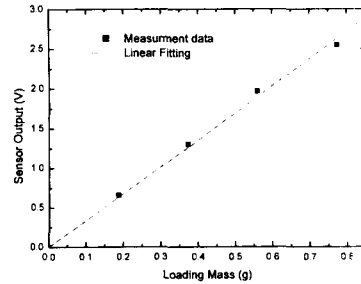


Fig. 10 Mechanical sensitivity

$$M^{ii} = \text{diag}(M^i)_{i,c} \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (23)$$

3.2 절에서의 평행스프링 해석과 마찬가지로 관성행렬과 스프링행렬을 식 (22),(23)의 형태로 구할 수 있다. 위 식들에서 첨자 5 는 입력을 나타내며 첨자 7 은 출력을 나타낸다. 응답특성을 향상시키기 위해 식 (24)와 같은 목적함수를 설정할 수 있다.

$$W_3 = \omega_n \quad (24)$$

$$\det(K^m - \omega^2 M^m) = 0 \quad (25)$$

여기서  $\omega_n$  은 기본고유주파수이다. 앞에서 사용되었던 각각의 목적함수를 결합하여 식 (26)과 같이 둘 수 있다.

$$W = w_1 \frac{\delta_i}{\delta_u} + w_2 \frac{\delta_i}{\theta_i} + w_3 \frac{L_i \cdot F_i}{K \cdot \delta_i} + w_4 \omega_n \quad (26)$$

힌지가 압축되지 않고 인장력(Tension)만 받도록 두개의 제약식 (Constraint equation) 과 13 개의 변수를 선택하여 Table 2 의 설계 목표 값 이상이 되도록  $W$  를 최대로 하기 위한 최적설계를 수행하였다. Table 2 에서의  $W_1, W_2$  의 목표값은 가장 많이 사용되고 있는 상용 시스템을 기준으로 설정하였고,  $W_3$  는 응답시간을 2 초 이내로 하기 위해 요구되는 메커니즘의 최소 대역폭 값으로 설정하였다.

Table 2 에서의 결과를 보면 모든 설계요건을 만족하며 특히  $\delta_p/\delta_M$  의 값이 매우 크고 이것은 모멘트에 의한 영향  $\delta_M$  이 2 단 증폭 메커니즘의 특성에 의해 제거되었기 때문이다.



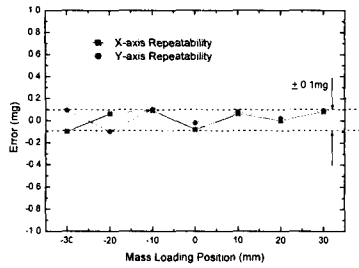


Fig. 11 Reproducibility experiments

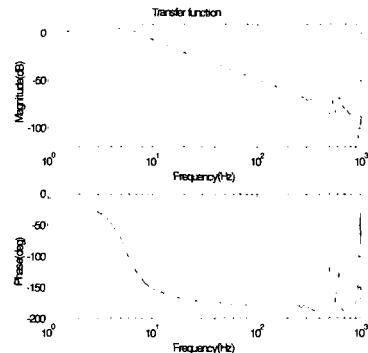


Fig. 13 Transfer function of system

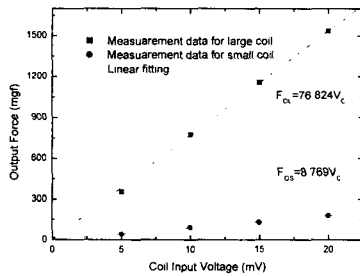
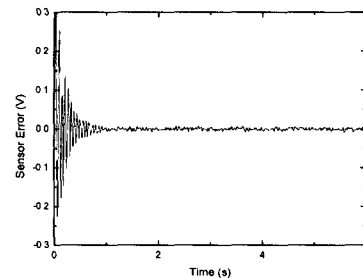


Fig. 12 Force sensitivity



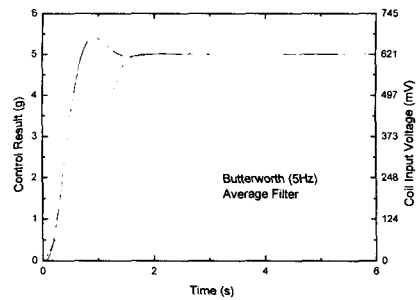
### 5. 실험 (Experiment)

설계요건에 따라 설계된 시스템을 제작하였다. 시스템을 제어하기 전에 앞장에서의 설계결과를 검증하기 위해 특성실험이 필요하다. 특성실험은 제어를 하지 않은 상태에서의 결과로서 제어오차 및 센서의 드리프트(Drift) 현상에 의해 측정 성능이 감소하는 정도를 고려하지 않았다.

우선 민감도 실험부터 수행하였다. 물체를 중량팬에 올려 놓았을 경우 발생하는 센서의 출력을 Fig. 10에 도식하였고 감도는 3.395 mV/mg 이었다. 0.1 mg의 분해능을 얻기 위해서는 센서의 분해능이 0.3 mV 이하이어야 한다.

다음으로는 힘의 위치에 따른 반복능 실험을 수행하였다. Fig. 11은 50 g의 물체를 중량팬의 중앙으로부터 변화시켜 센서에서의 출력 변화량을 측정하였다. 출력값은 Fig. 10에서 구한 감도를 이용하여 힘으로 환산한 값이다. Fig. 11에서 물체의 위치변화에 대해 센서의 잡음을 제거한 후 계산한 값들이 모두 0.1 mg 이하의 결과로 센서의 오차내에 있으며 이것은  $W_1$ 의 특성이 우수함을 보여주고 있다.

$W_2$ 의 특성을 실험하기 위해 전자기부를 구성한 후 코일 감은 수를 다르게 한 두가지 코일 시스템



(b) Coil input voltage  
Fig. 14 Control result

에 대해 실험하였다. Fig. 12는 이러한 코일들에 전압을 가하였을 경우 발생하는 변위를 Fig. 10에서 얻은 감도를 이용하여 힘으로 환산한 것이다. 감은수가 큰 코일의 경우 힘의 민감도가 76.8 g/V였고 작은 코일의 경우 8.8 g/V 이었다. 코일에서 발생하는 열에 의한 영향을 고려하여 코일에 가해지는 전압을 5 V로 설정할 경우 측정 범위는 각각의 코일에 대해 약 400 g와 45 g가 된다. 측정범위는 코일의 감은 수에 따라 변화시킬 수 있다. 그러나 결국은 코일의 감은 수를 크게 하는 것은 측정범위는 증가시킬 수 있지만 제어를 적용하게 되면 디지털 출력 성능의 제한 때문에 분해능을

떨어뜨리는 효과가 있다.

디지털 출력 성능을 고려치 않았을 경우  $W_2$ 의 특성 실험으로부터 앞장에서 설정한 목표 값보다 큰 값을 보여주고 있다.

Fig. 13은 시스템의 전달함수를 보여주고 있다. 전달함수는 식 (27)과 같이 근사 시킬 수 있다. 이때 얻어지는 기본고유주파수는 5.53 Hz로 설계시 얻어진 값과 오차가 거의 없다. Fig. 13에서 보여지고 있는 댐핑(Damping) 효과는 코일의 역기전력(Back emf) 효과에 의한 것이다. 이러한 댐핑 효과는 시스템 제어에 도움을 주게 된다.

$$\frac{x(s)}{V_m(s)} = \frac{36.72}{s^2 + 3.90s + 30.60} \left( \frac{mm}{V} \right) \quad (27)$$

Fig. 14는 5 g의 표준질량을 증량팬에 올려 표준 힘을 발생시켰을 경우 제어를 적용한 결과를 보여주고 있다. 제어오차가 0으로 수렴하고 있고, 이때 코일에 가해지는 전압을 저역 필터(Low Pass Filter)를 거쳐 도식화 한 것이다. 저역필터로서 Butterworth 필터와 연속적인 데이터의 평균값을 취하는 이동평균필터(Moving Average Filter)를 사용하였다. 분해능은 제어오차 및 위치센서의 드리프트 그리고 디지털 출력 성능제한 등의 영향으로 기계설계시보다 성능이 감소된 1 mg 이었다.

## 6. 결론

본 논문에서는 영위법을 이용한 미소중량측정 기구의 메커니즘 설계요건을 제시하고 또한 설계요건을 충족시키기 위해 평행스프링 및 2 단 증폭 기구를 설계하였다.

평행스프링은 힘이 가해지는 위치에 무관하도록 수직힘에 대해서만 민감하도록 설계하였다( $W_1$ ). 2 단 증폭기구는 기존 증폭기구의 기능인 레버이득 이외에 민감도를 고려한 설계가 이루어졌다( $W_2$ ). 또한 응답특성의 향상을 위해 기본고유주파수를 향상시키기 위한 설계가 이루어졌다( $W_3$ ). 두 메커니즘의 결합 후 최적설계기법을 이용해 모든 설계 사양이 만족되도록 설계하였다.

메커니즘 설계 후 위치 반복능 실험을 통해 힘이 가해지는 위치에 대한 오차가 0.1 mg 이하로 센서의 오차 내에 포함됨을 검증하였다. 또한 힘의 민감도 실험을 수행하여, 코일의 감은 수에 따

라 400 g 이상의 측정범위를 구현할 수 있고 제어 능력에 따라 0.1 mg 이하의 분해능이 가능함을 보여주었다. 응답속도 설계특성을 검증하기 위해 전달함수를 구함으로써 대역폭이 5 Hz 이상임을 검증하였다. 또한 간단한 제어실험을 통해서 영위법을 이용한 미소중량 측정 장치의 성능을 검증하였다.

향후 연구로 메커니즘에서 설계된 특성들을 모두 활용하기 위한 영위법에 적용되는 제어기법 및 신호검출 방법에 대한 연구가 필요하다.

## 참고문헌

- (1) Peterson, I. R., 1997, Design Considerations for an Electrobalance Microforce Sensor, *Rev. Sci. Instrum.* Vol.68, No.2, pp.1130~1136.
- (2) Cheshmehdoost, A. and Jones, B.E., 1995, Design and Performance Characteristics of an Integrated High Capacity DETF-Based Force Sensor, *The 8<sup>th</sup> Int. Conf. on Solid-state Sensors and Actuators and Eurosensors IX. Stockholm, Sweden, June 25-29* pp.608~611.
- (3) Hara, S., Kasai, S., Nishitani, T. and Nagashima, A., 1999, Development of Steady-State Magnetic Sensor, *Rev. of Sci. Instrum.*, Vol.70, No.1, pp.435~438.
- (4) Kurosu, S., 1996, Performance of Gyroscopic Force Measuring Apparatus, *Proc. of the Measurement of Force and Mass*, pp.129~134.
- (5) Holford, K.M., Bakopoulos, C.P. and White N.M., 1990, The Development of a High Pressure, Thick-Film Sensor *Proc. Proc. of 1 Mech E Mechatronics Conf.* pp.47~59.
- (6) Quinn, T.J., 1992, The Beam Balance as an Instrument for Very Precise Weighing, *Meas. Sci. Technol.* 3, pp.141~159.
- (7) Balachandran, W., Halimic, M., Hodzic, M., Tariq, M., Enab, Y. and Cecelja, F., 1995, Optimal Digital Control and Filtering for Dynamic Weighing System, *IEEE Instrumentation/ Measurement Technology Conf. - IMTC/95, Waltham, Boston, MA, USA, April 24- 26*, pp. 293~298.
- (8) Maier, R. and Schmidt, G., 1989, Integrated Digital Control and Filtering for an Electrostatically Compensated Weighcell, *IEEE transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol.38, No.5 pp.998~1003.
- (9) Ryu J.W., Lee S.Q., Gwon D.G. and Moon K.S., 1999 Inverse Kinematic Modeling of a Coupled Flexure Hinge Mechanism, *Mechatronics* Vol.9, 657-674.

부록 1

$$\begin{aligned}
 C_a &= \frac{l_1}{EA_1} + \frac{l_2}{EA_2} + \frac{l_3}{EA_3} \\
 C_b &= C_{\sigma} = \frac{1}{2EI_{\sigma}} \{l_1^2 + 2l_1(l_1 + l_2)\} + \frac{1}{2EI_{\sigma}} \{l_2^2 + 2l_2l_3\} + \frac{1}{2EI_{\sigma}} l_3^2 \\
 C_c &= \frac{1}{6EI_{\sigma}} \{2l_1^2 + 3l_1^2(l_1 + l_2) + 3l_1(l_1 + l_2)(l_1 + 2l_2 + 2l_3)\} + \frac{1}{3EI_{\sigma}} \{l_2^2 + 3l_2l_3(l_2 + l_3)\} + \frac{l_3^2}{3EI_{\sigma}} \\
 C_d &= \frac{l_1}{EI_{\sigma}} + \frac{l_2}{EI_{\sigma}} + \frac{l_3}{EI_{\sigma}} \\
 C_e &= \frac{1}{6EI_{\sigma}} \{2l_1^2 + 3l_1^2(l_1 + l_2) + 3l_1(l_1 + l_2)(l_1 + 2l_2 + 2l_3)\} + \frac{1}{3EI_{\sigma}} \{l_2^2 + 3l_2l_3(l_2 + l_3)\} + \frac{l_3^2}{3EI_{\sigma}} \\
 C_f &= C_h = \frac{1}{2EI_{\sigma}} \{l_1^2 + 2l_1(l_1 + l_2)\} + \frac{1}{2EI_{\sigma}} \{l_2^2 + 2l_2l_3\} + \frac{1}{2EI_{\sigma}} l_3^2 \\
 C_g &= \frac{l_1}{EI_{\sigma}} + \frac{l_2}{EI_{\sigma}} + \frac{l_3}{EI_{\sigma}} \\
 C_{\infty} &= \frac{l_1}{k_1 G h t_1^3} + \frac{l_2}{k_2 G h t_2^3} + \frac{l_3}{k_3 G h t_3^3}
 \end{aligned}$$

부록 2

$$1. \delta_p = \frac{A_p + B_p}{4C_p} P$$

where

$$\begin{aligned}
 A_p &= -b^2 (C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} + C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma}) \\
 &\quad + C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} (C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta}) \\
 B_p &= (a C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - a C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} + C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma}) \\
 &\quad \times (C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta}) \\
 C_p &= -b^2 (C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma}) (C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta}) \\
 &\quad + C_{\sigma\sigma} (C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta})
 \end{aligned}$$

$$2. \delta_u = \frac{A_u}{4(B_u + C_u)} M$$

where

$$\begin{aligned}
 A_u &= (C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma}) \\
 &\quad \times (C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta}) \\
 B_u &= b^2 (C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma}) (C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta}) \\
 C_u &= C_{\sigma\sigma} (-C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta})
 \end{aligned}$$

$$3. \theta_t = \frac{A_t B_t}{4(C_t + D_t E_t)} T$$

where

$$\begin{aligned}
 A_t &= (C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} + C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} + C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma}) \\
 B_t &= (C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta}) \\
 C_t &= b^2 (C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta}) \\
 &\quad \times (C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} + C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} + C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} - C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma} C_{\sigma\sigma}) \\
 D_t &= (C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} - C_{\beta\beta} C_{\beta\beta} C_{\beta\beta}) \\
 E_t &= C_{\sigma\sigma} (C_{\sigma\sigma} - w C_{\sigma\sigma}) + w C_{\sigma\sigma} (-C_{\sigma\sigma} + w C_{\sigma\sigma}) + C_{\sigma\sigma} (-C_{\sigma\sigma} + w (C_{\sigma\sigma} + C_{\sigma\sigma} - w C_{\sigma\sigma}))
 \end{aligned}$$