

## V-노치균열의 응력장과 경계배치법에 의한 파괴변수

배 정 배\* · 최 성 렬†

(2002년 3월 9일 접수, 2002년 11월 21일 심사완료)

### Stress Fields for the V-notched Crack and Fracture Parameters by Boundary Collocation Method

Jung Pae Pae and Sung Ryul Choi

**Key Words:** V-notched Crack(V-노치균열), Boundary Collocation Method(경계배치법), Stress Intensity Factor(응력확대계수), T-Stress(T응력)

#### Abstract

The arbitrary V-notched crack problem is considered. The general expressions for the stress components on this problem are obtained as explicit series forms composed of independent unknown coefficients which are denoted by coefficients of eigenvector. For this results eigenvalue equation is performed first through introducing complex stress functions and applying the traction free boundary conditions. Next solving this equation, eigenvalues and corresponding eigenvectors are obtained respectively, and finally inserting these results into stress components, the general equations are obtained. These results are also shown to be applicable to the symmetric V-notched crack or straight crack. It can be shown that this solutions are composed of the linear combination of Mode I and Mode II solutions which are obtained from different characteristic equations, respectively. Through performing asymptotic analysis for stresses, the stress intensity factor is given as a closed form equipped with the unknown coefficients of eigenvector. In order to calculate the unknown coefficients, based on these general explicit equations, numerical programming using the overdetermined boundary collocation method which is algorithmed originally by Carpenter is also worked out. As this programming requires the input data, the commercial FE analysis for stresses is performed. From this study, for some V-notched problems, unknown coefficients can be calculated numerically and also fracture parameters are determined.

#### 1. 서 론

V-노치균열 (혹은 썸기균열)은 두 자유면이 임의의 개구각(opening angle)을 유지하며 서로 만나는 노치선단을 형성하고 있으며, 노치선단에는 높은

수준의 응력상태가 존재하여 재료파괴의 주된 인자가 된다. 이러한 응력상태의 해석을 위해서 노치선단의 응력장 및 응력장에 구성된 응력특이차수와 응력확대계수 등의 파괴변수를 구하는 연구가 많이 진행되었다.<sup>(1-8)</sup>

Carpenter<sup>(6)</sup>는 등방성재료에 형성된 비대칭 V-노치 문제에 대한 응력변위장을 복소고유함수 전개법을 도입하여 구하였는데, 이들은 결과식을 여러 개의 행렬들의 곱으로 표현하였다. 여기서 비대칭 노치균열은 노치선단의 수평축에 대하여 노치 상하면이 대칭이 되지 않는 일반적인 노치균열을 말한다. 또한 고유벡터를 구하는 경계배치법 즉, 응력 변위식에 포함된 미지상수들을 수

\* 영남대학교 대학원 기계공학과

현재 (주)AMS 기술연구소

† 책임저자, 회원, 영남대학교 기계공학과

E-mail : srchoi@yu.ac.kr

TEL : (053)810-2443 FAX : (053)810-3703

치적으로 구하는 방법을 제시하고 응력확대계수를 계산하였다. 또한 이 방법에 기초하여 이종재 노치재에 대한 응력확대계수를 구하는 연구가 국내외 연구자에 의하여 수행되었다.<sup>(9-11)</sup>

본 연구에서는, Carpenter<sup>(6)</sup>가 비대칭 노치균열을 해석하여 응력장을 구했지만 형식적인 여러행렬의 곱으로 구성되어 있어서 그 식이 복잡하고 사용이 용이하지 않은 바, 비대칭 노치균열을 재해석하여, 최종 미지상수로 구성된 폐형(closed form)의 일반적인 응력식을 구하고자 한다. 여기서 일반적인 응력식은 직선균열 뿐 아니라 임의 노치 균열에 대해서도 적용이 가능한 식을 말하고, 모드 I 및 모드 II에 대한 해를 또한 얻을 수 있는 응력식을 말한다. 또한 응력확대계수와 미지상수와의 관계 등을 폐형으로 구할 수 있는 등 잇점을 지니는 바, 이 식을 기초로 하여 미지상수들과 응력확대계수와의 관계식을 구한다. 다음으로 유도된 응력식을 적용하여 Carpenter<sup>(6)</sup>가 제시한 방법으로 경계배치법 프로그램을 개발하고, 미지상수인 고유벡터를 수치적으로 구하여 각 분제에 대한 파괴변수 값을 결정하고자 한다.

## 2. 문제의 수식화

### 2.1 응력함수

등방성 탄성재료에 대한 극좌표계 응력성분은 복소수  $z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$ 의 함수인 복소포텐셜  $\phi(z), \psi(z)$  과 다음으로 기술된다.<sup>(6,12)</sup>

$$\begin{aligned} \tau_\theta &\equiv \sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{r\theta} \\ \frac{\tau_\theta}{r} &= \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} + [\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]e^{2i\theta} \\ \tau_r &\equiv \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} \\ &= \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} - [\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]e^{2i\theta} \end{aligned} \quad (1)$$

England<sup>(2,5,6)</sup>은 복소포텐셜을 복소수  $\lambda$ 에 대해 다음과 같은 고유함수로 가정하고,

$$\begin{aligned} \phi(z) &= A z^\lambda + C \bar{z}^\lambda \\ \psi(z) &= B z^\lambda + D \bar{z}^\lambda \end{aligned} \quad (2)$$

한편  $\lambda$ 가 실수일 때 다음으로 가정하여 표현하였다.

$$\phi(z) = A z^\lambda, \quad \psi(z) = B z^\lambda \quad (3)$$

여기서  $A \sim D$ 는 경계조건에서 결정되어야 할 미

지 복소상수를 말한다.

### 2.2 고유함수에 의한 응력표현

복소고유치  $\lambda$ 에 대한 응력표현으로서 식 (2)를 식 (1)에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= \lambda r^{\lambda-1} [A \lambda e^{i\theta(\lambda-1)} + B e^{i\theta(\lambda+1)} \\ &\quad + \overline{C} e^{-i\theta(\lambda-1)}] + \overline{\lambda} r^{\overline{\lambda}-1} [\overline{A} e^{-i\theta(\overline{\lambda}-1)} \\ &\quad + C \overline{\lambda} e^{i\theta(\overline{\lambda}-1)} + D e^{i\theta(\overline{\lambda}+1)}] \\ \frac{\tau_r}{r} &= \lambda r^{\lambda-1} [A(2-\lambda) e^{i\theta(\lambda-1)} - B e^{i\theta(\lambda+1)} \\ &\quad + \overline{C} e^{-i\theta(\lambda-1)}] + \overline{\lambda} r^{\overline{\lambda}-1} [\overline{A} e^{-i\theta(\overline{\lambda}-1)} \\ &\quad + C(2-\overline{\lambda}) e^{i\theta(\overline{\lambda}-1)} - D e^{i\theta(\overline{\lambda}+1)}] \end{aligned} \quad (4)$$

한편 실수고유치에 대한 응력은 식 (3)을 식 (1)에 대입함으로써 Carpenter<sup>(5,6)</sup>와 일치하는 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= \lambda r^{\lambda-1} [A \lambda e^{i\theta(\lambda-1)} + \overline{A} e^{-i\theta(\lambda-1)} \\ &\quad + B e^{i\theta(\lambda+1)}] \\ \frac{\tau_r}{r} &= \lambda r^{\lambda-1} [A(2-\lambda) e^{i\theta(\lambda-1)} + \overline{A} e^{-i\theta(\lambda-1)} \\ &\quad - B e^{i\theta(\lambda+1)}] \end{aligned} \quad (5)$$

### 2.3 경계조건식

Fig. 1은 노치각  $\Omega = [\omega + \gamma]$ 인 비대칭 V-노치 균열을 그린 것으로, 노치선단을 원점으로 택할 때 수평축  $x_1$ 과 노치 상하면이 각  $\theta = \omega, -\gamma$ 을 각각 이루고 있다. 상하 노치면이 자유면일 때, 이들 노치면에 대한 경계조건은 다음으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= 0 \quad \text{for } \theta = \omega, \\ \tau_\theta &= 0 \quad \text{for } \theta = -\gamma \end{aligned} \quad (6)$$

이들 경계조건을 만족하는 응력식을 복소수 및 실수고유치에 대하여 나누어 구한다.

## 3. 복소수 고유치에 대한 응력 일반식

### 3.1 특성식과 미지함수

응력식 (4)를 경계조건식 (6)에 각각 적용하여 실수부와 허수부의 항등조건을 연립하면, 다음의 특성방정식이 유도되고, 이는 기존 연구자의 결과와 일치한다.<sup>(5,6)</sup>

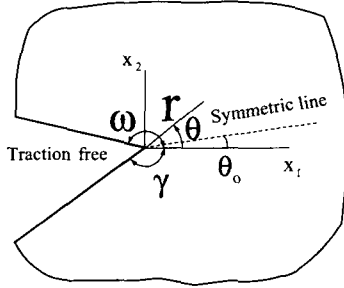


Fig. 1 Configuration with finite opening crack

$$\lambda \sin(\omega + \gamma) = \pm \sin(\omega + \gamma) \lambda \quad (7)$$

그리고 이 과정에서 식 (4)의 미지함수  $B \sim D$ 는  $A$ 의 함수로 표현이 된다. 식 (7)은 두 개 그룹 식으로 구성되어 있는데, 이 두 그룹은 4.3절에서 설명하겠지만 각각 모드 I, II 에 대한 특성방정식임을 알 수 있다.

식 (7)를 각 그룹으로 분리하여 나타내면 다음과 같다. 먼저 첫 번째 식인

$$\lambda \sin(\omega + \gamma) = -\sin(\omega + \gamma) \lambda \quad (8)$$

의 근은 모드 I의 고유치가 되고, 이들  $\lambda$ 에 대해 미지상수  $B \sim D$ 는  $A$ 의 함수로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{C} &= A e^{i(\omega - \gamma)(\lambda - 1)} \\ B &= -\lambda A e^{-2i\omega} - \bar{A} e^{-i[\omega(\lambda + 1) + \gamma(\lambda - 1)]} \\ D &= -\bar{A} e^{-2i\omega\bar{\lambda}} - \bar{A} \bar{\lambda} e^{-i[\omega(\bar{\lambda} + 1) - \gamma(\bar{\lambda} - 1)]} \end{aligned} \quad (9)$$

한편 나머지 그룹의 근을  $\lambda = \zeta$ 로 나타내면 그 식은

$$\zeta \sin(\omega + \gamma) = \sin(\omega + \gamma) \zeta, \quad (10)$$

이 되고,  $\zeta$ 는 모드 II의 고유치에 해당한다. 이때 미지함수는 다음으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{C} &= -A e^{i(\omega - \gamma)(\zeta - 1)} \\ B &= -\zeta A e^{-2i\omega} + \bar{A} e^{-i[\omega(\zeta + 1) + \gamma(\zeta - 1)]} \\ D &= -\bar{A} e^{-2i\omega\bar{\zeta}} + \bar{A} \bar{\zeta} e^{-i[\omega(\bar{\zeta} + 1) - \gamma(\bar{\zeta} - 1)]} \end{aligned} \quad (11)$$

### 3.2 응력의 일반해

특성방정식 (8), (10)의 근, 즉 고유치  $\lambda, \zeta$  중에서 실수부가 영보다 큰 무한개의 근이 모두 응력의 해가 되는 바, 결국 응력의 일반해는 이들 고유치의 급수형이 된다. Carpenter<sup>(6)</sup>는 응력식을 단순히 여러개의 행렬 곱으로 표현하였지만, 본 연구에서는 순차적인 계산을 진행함으로써 폐형으로 주어지는 일반식을 구할 수 있었다. 즉, 식 (9), (11)을 식 (4)에 대입하여 계산하면 복소 미지상수  $A, A'$ 로 표현되는 다음의 일반식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= \sum_\lambda e_1(\theta, \lambda) A + e_2(\theta, \lambda) \bar{A} \\ &+ \sum_\zeta e'_1(\theta, \zeta) A' + e_2(\theta, \zeta) \bar{A}', \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_1(\theta, \lambda) \\ e'_1(\theta, \lambda) \end{bmatrix} &= r^{\lambda-1} \lambda^2 [e^{i\theta(\lambda-1)} - e^{-2i\omega + i\theta(\lambda+1)}] \\ &\pm r^{\lambda-1} \lambda [e^{i(\omega - \gamma - \theta)(\lambda-1)} \\ &- e^{i(-\omega + \theta)(\lambda+1) - \gamma(\lambda-1)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_2(\theta, \lambda) \\ e'_2(\theta, \lambda) \end{bmatrix} &= \pm r^{\bar{\lambda}-1} \bar{\lambda}^2 [e^{-i(\omega - \gamma - \theta)(\bar{\lambda}-1)} \\ &- e^{i(-\omega + \theta)(\bar{\lambda}+1) + i\gamma(\bar{\lambda}-1)}] \\ &+ r^{\bar{\lambda}-1} \bar{\lambda} [e^{-i\theta(\bar{\lambda}-1)} - e^{-2i\omega\bar{\lambda} + i\theta(\bar{\lambda}+1)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_r &= \sum_\lambda f_1(\theta, \lambda) A + f_2(\theta, \lambda) \bar{A} \\ &+ \sum_\zeta f'_1(\theta, \zeta) A' + f'_2(\theta, \zeta) \bar{A}', \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1(\theta, \lambda) \\ f'_1(\theta, \lambda) \end{bmatrix} &= r^{\lambda-1} \lambda^2 [-e^{i\theta(\lambda-1)} + e^{-2i\omega + i\theta(\lambda+1)}] \\ &+ r^{\lambda-1} \lambda [\pm e^{i(\omega - \gamma - \theta)(\lambda-1)} \\ &- e^{i(-\omega + \theta)(\lambda+1) - \gamma(\lambda-1)} + 2e^{i\theta(\lambda-1)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_2(\theta, \lambda) \\ f'_2(\theta, \lambda) \end{bmatrix} &= \pm r^{\bar{\lambda}-1} \bar{\lambda}^2 [-e^{-i(\omega - \gamma - \theta)(\bar{\lambda}-1)} \\ &+ e^{i(-\omega + \theta)(\bar{\lambda}+1) + i\gamma(\bar{\lambda}-1)}] \\ &+ r^{\bar{\lambda}-1} \bar{\lambda} [e^{-i\theta(\bar{\lambda}-1)} \\ &+ e^{-2i\omega\bar{\lambda} + i\theta(\bar{\lambda}+1)} \\ &\pm 2e^{-i(\omega - \gamma - \theta)(\bar{\lambda}-1)}] \end{aligned}$$

여기서 복부호는 복호동순을 말하고, 복소 미지상수  $A, A'$ 는 다음과 같이 둘 수 있다.

$$A = \alpha - i\alpha', \quad A' = \beta - i\beta' \quad (14)$$

### 4. 실수 고유치에 대한 응력 일반식

## 4.1 경계조건 적용

고유치  $\lambda$ 가 실수가 되면,  $\lambda = \bar{\lambda}$ 가 되어 식 (2)의 2개항 멱급수는 식 (3)과 같이 1개항의 멱급수로 압축되는 바, 식 (3)을 사용하여 식 (5)를 얻었다. 식 (5)를 경계조건 식 (6)에 대입하면 다음의 등식을 얻는다.

$$B = -A\lambda e^{-2i\omega} - \bar{A}e^{-2i\omega\lambda} \quad (15)$$

$$A\lambda[e^{2i\gamma} - e^{-2i\omega}] + \bar{A}[e^{2i\gamma\lambda} - e^{-2i\omega\lambda}] = 0 \quad (16)$$

미지상수  $A$ 에 실수 및 허수부로 분리한 식 (14)를 대입하면, 식 (16)의 또다른 표현식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \alpha' \end{pmatrix} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} h_{11}(\lambda) &= \lambda(\sin 2\gamma + \sin 2\omega) + (\sin 2\gamma\lambda + \sin 2\omega\lambda) \\ h_{12}(\lambda) &= -\lambda(\cos 2\gamma - \cos 2\omega) + (\cos 2\gamma\lambda - \cos 2\omega\lambda) \\ h_{21}(\lambda) &= \lambda(\cos 2\gamma - \cos 2\omega) + (\cos 2\gamma\lambda - \cos 2\omega\lambda) \\ h_{22}(\lambda) &= \lambda(\sin 2\gamma + \sin 2\omega) - (\sin 2\gamma\lambda + \sin 2\omega\lambda) \end{aligned}$$

식 (17)이 유용해될 것을 조건에서 특성방정식을 얻고, 그 식은 기존 연구자와 같이 복소고유치와 동일한 결과식 (7)이 되는 바, 두 개 그룹의 식으로 분리된다. 각 그룹의 근을  $\lambda, \zeta$ 라고 각각 표현하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda \sin(\omega + \gamma) &= -\sin(\omega + \gamma)\lambda, \\ \zeta \sin(\omega + \gamma) &= \sin(\omega + \gamma)\zeta \end{aligned} \quad (18)$$

## 4.2 응력의 일반식

특성방정식 (18)의 근  $\lambda$  ( $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ) 및  $\zeta$  ( $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \dots$ )는 각각 모드 I 및 II에 대한 고유치임을 다음 절에서 알 수 있다. 한편 이들 두 그룹의 근을 동시에 비교해 보면  $[0 < \lambda_1 < \zeta_1 < \zeta_2 (=1) < \lambda_2 < \dots]$ 의 크기순서로 이어진다. 응력특이성을 나타내는 근은  $0 < \lambda, \zeta < 1$ 인 근이 되고, 모드 I의 응력특이치가 모드 II 보다 큰 값이 됨을 알 수 있다.

각 모드에 대한 정의는 Fig. 1의 노치각을 균등분할하는 대칭선각  $\theta_0 \equiv (\omega - \gamma)/2$  상의 응력이  $\sigma_{\theta\theta} \neq 0, \sigma_{r\theta} = 0$ 일 때를 모드 I 상태라고 하며,

이와 반하는 상태를 모드 II라고 정의한다.

응력에 대한 표현식을 구하기 위해 식 (18)의 근  $\lambda, \zeta$ 에 대응되는 미지상수를 각각  $A, A'$ 로 표기하자. 그러면 식 (14)의 실수 및 허수부 관계는 식 (17)를 만족하므로, 결국 독립 미지상수는 실수 혹은 허수중 한 개만이 됨을 알 수 있다. 즉 식 (17)로부터 다음을 얻는다.

$$\alpha' = -\frac{h_{21}(\lambda)}{h_{22}(\lambda)} \alpha, \quad \beta' = -\frac{h_{12}(\zeta)}{h_{11}(\zeta)} \beta \quad (19)$$

식 (15), (19)를 식 (5)에 각각 대입하여 정리하면 다음의 응력에 대한 일반 표현식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \tau_{\theta} &= \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [I_1(\theta, \lambda) + iI_2(\theta, \lambda)] \alpha \\ &\quad + \sum_{\zeta} r^{\zeta-1} [I'_1(\theta, \zeta) + iI'_2(\theta, \zeta)] \beta', \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I_1(\theta, \lambda) h_{22}(\lambda) \\ I'_2(\theta, \lambda) h_{11}(\lambda) \end{bmatrix} \\ &= 4\lambda^2 \sin(\omega - \theta) \sin(\gamma + \omega) \lambda [\sin(\theta\lambda - \gamma) \\ &\quad + \sin((\theta + \gamma - \omega)\lambda - \omega)] \pm 4\lambda \sin(\omega - \theta) \lambda \\ &\quad \times \sin(\gamma + \omega) \lambda [-\sin(\omega\lambda + \omega - \gamma - \theta) \\ &\quad \quad - \sin(\gamma\lambda - \theta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I_2(\theta, \lambda) h_{22}(\lambda) \\ I'_1(\theta, \lambda) h_{11}(\lambda) \end{bmatrix} \\ &= \pm 4\lambda^2 \sin(\omega - \theta) \sin(\gamma + \omega) \lambda [-\cos(\theta\lambda - \gamma) \\ &\quad - \cos((\theta + \gamma - \omega)\lambda - \omega)] + 4\lambda \sin(\omega - \theta) \lambda \times \\ &\quad \sin(\gamma + \omega) \lambda [-\cos(\omega\lambda + \omega - \gamma - \theta) - \cos(\gamma\lambda - \theta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_r &= \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [J_1(\theta, \lambda) + iJ_2(\theta, \lambda)] \alpha \\ &\quad + \sum_{\zeta} r^{\zeta-1} [J'_1(\theta, \zeta) + iJ'_2(\theta, \zeta)] \beta' \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} J_1(\theta, \lambda) h_{22}(\lambda) \\ J'_2(\theta, \lambda) h_{11}(\lambda) \end{bmatrix} \\ &= 4\lambda^2 \sin(\omega - \theta) \sin(\gamma + \omega) \lambda [-\sin(\theta\lambda - \gamma) \\ &\quad - \sin((\theta + \gamma - \omega)\lambda - \omega)] \pm 4\lambda \cos(\omega - \theta) \lambda \times \\ &\quad \sin(\gamma + \omega) \lambda [-\cos(\gamma\lambda - \theta) - \cos(\omega\lambda - \theta + \omega - \gamma)] \\ &\quad + 4\lambda \sin(\gamma + \omega) \lambda [-\cos(\theta\lambda + \omega - \gamma - \theta) \\ &\quad - \cos((\theta + \gamma - \omega)\lambda - \theta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} J_2(\theta, \lambda) h_{22}(\lambda) \\ J'_1(\theta, \lambda) h_{11}(\lambda) \end{bmatrix} \\ &= \pm 4\lambda^2 \sin(\omega - \theta) \sin(\gamma + \omega) \lambda [\cos(\theta\lambda - \gamma) \\ &\quad + \cos((\theta + \gamma - \omega)\lambda - \omega)] + 4\lambda \cos(\omega - \theta) \lambda \times \\ &\quad \sin(\gamma + \omega) \lambda [\sin(\gamma\lambda - \theta) + \sin(\omega\lambda - \theta + \omega - \gamma)] \\ &\quad \pm 4\lambda \sin(\gamma + \omega) \lambda [-\sin(\theta\lambda + \omega - \gamma - \theta) \\ &\quad - \sin((\theta + \gamma - \omega)\lambda - \theta)] \end{aligned}$$

## 4.3 대칭선상의 응력과 응력확대계수

하중모드와 고유치간의 관련성, 그리고 응력확

대계수를 구하기 위하여, 먼저 대칭선 각  $\theta_o \equiv (\omega - \gamma)/2$  에 대한 함수값의 계산이 필요하다. 식 (18)을 식 (20),(21)에 대입하면 함수들은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} I_1(\theta_o, \lambda) &= C_o(\lambda) [\lambda - \lambda \cos(\omega + \gamma) \\ &\quad + 1 - \cos(\omega + \gamma)\lambda] \\ I_2 &= I'_1 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$I'_2(\theta_o, \zeta) = C_o(\zeta) [-\zeta + \zeta \cos(\omega + \gamma) + 1 - \cos(\omega + \gamma)\zeta],$$

$$\begin{aligned} J_1(\theta_o, \lambda) &= C_o(\lambda) [-\lambda + \lambda \cos(\omega + \gamma) \\ &\quad + 3 + \cos(\omega + \gamma)\lambda] \\ J_2 &= J'_1 = 0 \\ J'_2(\theta_o, \zeta) &= C_o(\zeta) [\zeta - \zeta \cos(\omega + \gamma) \\ &\quad - 1 + \cos(\omega + \gamma)\zeta], \end{aligned} \quad (23)$$

$$C_o(\lambda) = \frac{2 \lambda \cos \theta_o (\lambda + 1)}{\cos 2\theta_o + \cos 2\theta_o \lambda}$$

식 (22)를 응력성분식 (20)에 대입하면

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(\lambda, \theta_o), \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}(\zeta, \theta_o) \quad (24)$$

로 표현되는 바, 하중모드의 정의를 고려할 때 근  $\lambda$  는 모드 I 정보를 표현하고,  $\zeta$  는 모드 II를 나타내는 고유치임을 알 수 있다.

식 (22)를 (20)에 적용하여 급수형으로 나타내면 대칭선상의 응력은 다음으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{r\theta} &= r^{\lambda_1 - 1} K_I + i r^{\zeta_1 - 1} K_{II} \\ &\quad + (a_2 r^{\lambda_2 - 1} + \dots) + i(b_3 r^{\zeta_3 - 1} + \dots) \end{aligned} \quad (25)$$

for  $\theta = \theta_o$

식 (25)에서  $K_I, K_{II}$ 는 다음으로 정의되는 모드 I, II의 응력확대계수를 말한다.

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} r^{1 - \lambda_1} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta_o), \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} r^{1 - \zeta_1} \sigma_{r\theta}(r, \theta_o) \end{aligned} \quad (26)$$

식 (20),(25),(26)을 연립하면 응력확대계수는 미지 독립상수와 다음의 폐형으로 결정된다.

$$\begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(\theta_o, \lambda_1) & 0 \\ 0 & I'_2(\theta_o, \zeta_1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta'_1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

여기서 우변 두 번째 행렬인 고유벡터 성분  $\alpha_1, \beta'_1$ 은 고유치  $\lambda_1, \zeta_1$ 에 대응되는 미지상수로서, 식 (14)로 주어지는 값의 실수부 및 허수부 값이고, 이들값이 수치적인 해석을 통하여 결정된다면 또한 응력확대계수는 식 (27)에 의해 주어진다. 특별한 경우로  $\gamma = \omega$ 일 때 식 (27)의 결과는 대칭 노치균열에 대한 Carpenter<sup>(5)</sup>의 결과로 회복된다.

#### 4.4 직선균열 응력

노치균열의 특별한 경우로서 직선균열은, Fig.1에서 보는 바와 같이 노치각  $\omega = \gamma = \pi$ 이고 대칭선각  $\theta_o = 0$ 에 해당하는 경우가 된다. 이때 직선균열의 고유치는

$$\lambda_n = \zeta_n = \frac{n}{2}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (28)$$

인 실수값이 되고, 이를 식 (22),(23)과 함께 응력식 (20),(21)에 대입하여 정리하면, 그 결과는 직선균열에 대한 응력표현식과 일치함을 보임이 가능하다.<sup>(13)</sup> 특히 직선 균열선상인 각  $\theta = 0$ 에 대한 응력의 점근거동은 다음으로 알려져 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{r}} (K_I + iK_{II}) + O(r) \\ \sigma_{rr} &= \frac{1}{\sqrt{r}} K_I + T_o + O(r) \quad \text{as } r \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (29)$$

여기서 상수  $T_o$ 는 T응력이라고도 하며 균열성장 궤적의 안정성과 소성역의 크기에 기여하는 파괴변수로 알려져 있다.<sup>(13)</sup> 이와같은 직선균열선상의 응력을 본 연구의 식 (20), (21)에서 계산하면 다음과 같다.

$$\sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{r}} (\alpha_1 + i\beta'_1) + 6\sqrt{r} (\alpha_3 + i\beta'_3) + \dots$$

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{r}}(\alpha_1 - i\beta'_1) + 4\alpha_2 + 6\sqrt{r}(\alpha_3 - i\beta'_3) + \dots$$

for  $r \rightarrow 0, \omega = \gamma = \pi, \theta = 0$  (30)

따라서 식 (29),(30)을 비교하면, 응력확대계수와 T응력  $T_o$ 는 다음으로 주어진다.

$$K_I + iK_{II} = \alpha_1 + i\beta'_1, \quad T_o = 4\alpha_2 \quad (31)$$

### 5. 고유벡터계수와 파괴변수의 결정

노치균열에 대한 응력의 일반식은 식 (12),(13) 및 식 (20),(21)과 같은 무한 급수식으로 유도되었고, 복소수 및 실수 고유치에 대해 모드 I,II의 선형조합으로 표현되었다. 이들 식을 사용하여 Carpenter<sup>(5,6)</sup>가 제시한 방법으로 경계배치법 프로그램을 작성하고 고유벡터를 결정한다. 방법은 유한요소해석으로 얻은 노치주변의 응력성분 정보를 유도한 응력식에 적용하여, 식의 수  $N_e$ 와 미지상수 수  $N_u$ 인 행렬을 구성한다.  $N_e \geq N_u$ 인 경우에 최소 자승법을 도입하여 역행렬을 취하면 고유벡터에 대한 해를 구할 수 있고, 이 결과로부터 응력확대계수 혹은 T응력 등 파괴변수를 계산할 수 있다. 이에 대한 설명과 몇가지 문제를 해석하여 본다.

#### 5.1 최소 자승법

해석에 사용된 기존연구자<sup>(5,6)</sup>의 최소자승법을 간략히 설명한다. 가령 n개의 입력값  $x_i$ 에 대해  $Y_i$ 개의 출력값을 가지는 문제를 생각하자. 이들 입출력의 관계는

$$y(x) = a_1 e_1(x) + a_2 e_2(x) + \dots + a_m e_m(x) \quad (32)$$

인 급수형으로 표현된다고 하자.  $x_i$ 에서 함수값을  $y_i$ , 실제값을  $Y_j$ 라고 할 때 이를 만족하는 계수  $a_j(j=1, m)$ 의 근사값을 최소 자승법으로 구할 수 있다. 즉 오차를 M이라고 두면

$$M = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 \quad (33)$$

로 구성된다. M을 최소화하는 계수는

$$\frac{\partial M}{\partial a_k} = 0 \quad (k=1, m) \quad (34)$$

을 만족하므로 이를 행렬성분으로 나타내면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} E_{ik} E_{ij} a_j &= E_{jk} Y_j, \\ E_{ij} &= e_j(x_i) \end{aligned} \quad (35)$$

입력수와 미지수가  $n \geq m$ 인 경우에 Pivoting에 의한 가우스 소거법을 적용하면 미지값  $a_j(j=1, m)$ 이 결정된다.

#### 5.2 중앙 균열문제의 파괴변수

직선균열의 경우는 모두 실수 고유치를 가지므로, 응력의 표현식은 식 (20)으로 주어지고, 유한요소해석으로 구한 응력  $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ 에 대한 임의점의 정보를 입력값으로, 경계배치법을 프로그래밍하여 미지상수인 고유벡터의 수치해를 구하여 보았다.

Carpenter<sup>(5,6)</sup>는 응력을 입력정보로 사용한 고유벡터 수치해는 수렴성이 좋지못함을 지적한 바 있지만, 본 연구에서는 응력정보로도 무리없이 수렴성이 좋은 결과를 얻을 수 있었다. Fig. 2는 해석의 대상으로 삼은 중앙균열모양이며, 해석 과정을 설명하면 다음과 같다. 최소 자승법으로 구성된 행렬식은 식 (35)와 같은데, 보다 구체적으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [E]^T [E] [X] &= [Y], \\ [X]^T &= [\alpha_1 \beta'_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta'_3 \dots \alpha_j \beta'_j \dots], \\ [Y]^T &= [(\sigma_{\theta\theta})_1 (\sigma_{r\theta})_1 \dots (\sigma_{\theta\theta})_m (\sigma_{r\theta})_m] \end{aligned} \quad (36)$$

여기서 행렬  $[X]$ 는 응력식 내의 미지상수에 해당하는  $N_u$  개의 고유벡터를 말하고,  $[Y]$ 는 m개 점에서 얻은  $N_e (= 2m)$ 개의 응력성분 입력값을 말하며,  $N_e \geq N_u$ 인 경우가 된다. 미지상수  $\beta'_2$ 은

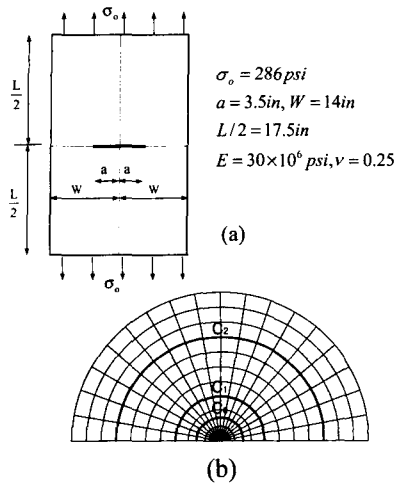


Fig. 2 (a) Plate with straight centered crack ; (b) Finite element model around crack tip for the straight crack

강체 회전(rigid body rotation)에 해당하는 값으로 응력에는 기여하지 않는 양이 되는 바, Carpenter<sup>(5,6)</sup> 문헌과 같이 배제하였다. [E]는 응력식 (20)에서 주어지는 행렬을 말한다.

응력의 정보를 얻기 위해서, Fig. 2(a)의 문제를 대칭성을 고려하여 4등분된 사각판을 택하고 ANSYS 프로그램으로 유한요소해석을 수행하였다. 균열선단 주변을 원주방향으로 18등분하고, 반경방향으로 유한 등분하여 요소를 구성하였다. 해의 수렴성을 조사하기 위해 균열선단 주위에 다수의 동심원을 넣어 해석하였으며, Fig. 2(b)는 균열선단의 유한요소 메쉬를 참고로 보인다. 반경  $r=0.0875, 0.175, 0.6125in$ 인 균열주위의 경로를  $C_0, C_1, C_2$ 로 구분하였다.

Table 1은 각 경로의 원주방향 노드점 갯수  $m=19$ 에 대한 응력데이터를 가지고서 식 (36)을 수치적으로 구한 고유벡터의 계수를 나타낸 것이다.  $C_0$ 경로에서 고유벡터 수  $N_u=7$ 을 미지상수로 택하고, 이들 고유벡터를 수치적으로 구해 보면  $\alpha_1=410.3, \beta_1=-1.0, \alpha_3=-71.0, \dots$ 을 보인다. 고유벡터의 갯수를 달리하여 얻은 결과를 서로 비교해 보면,  $N_u=7,5$ 의 경우  $\alpha_1$ 은 0.5%이내의 오차를 보이고,  $\alpha_1$ 기준으로 볼 때  $\beta_1$ 는 매우 작은 값이 됨을 보인다. 이 두 상수

Table 1 Predicted coefficients using stress data for the straight centered crack

Contour			$C_0$	$C_1$	$C_2$
Radius r (in)			0.0875	0.175	0.6125
Number of Collocation m			19	19	19
Nu	roots				
7	$\lambda_1$	$\alpha_1$	410.3	411.0	413.9
7	$\zeta_1$	$\beta_1$	-1.09	-1.73	-2.06
7	$\lambda_2$	$\alpha_2$	-71.0	-73.9	-75.6
7	$\lambda_3$	$\alpha_3$	-25.7	2.08	19.0
7	$\zeta_3$	$\beta_3$	4.85	3.50	0.98
7	$\lambda_4$	$\alpha_4$	13.8	5.15	0.43
7	$\zeta_4$	$\beta_4$	-4.36	-1.44	1.48
5	$\lambda_1$	$\alpha_1$	409.7	410.3	410.8
5	$\zeta_1$	$\beta_1$	3.33	2.93	0.54
5	$\lambda_2$	$\alpha_2$	-61.7	-66.9	-72.9
5	$\lambda_3$	$\alpha_3$	-26.3	1.91	20.7
5	$\zeta_3$	$\beta_3$	-10.4	-4.51	1.67
3	$\lambda_1$	$\alpha_1$	403.9	412.3	448.6
3	$\zeta_1$	$\beta_1$	-1.27	-1.82	-3.55
3	$\lambda_2$	$\alpha_2$	-74.2	-72.3	-66.1

는 응력확대계수가 됨을 식 (31)에서 언급하였다. 따라서 고유벡터의 미지수를  $N_u=7,5$  정도로 택하면 수렴성이 좋은 수치결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 또한 균열선단에서 다소 먼거리인 반경  $r=0.175, 0.6125in$ 인 경로  $C_2, C_3$ 에서도 경로  $C_1$ 과 비교해 볼 때  $N_u=7,5$ 의 결과는 수렴성이 좋은 결과가 됨을 알 수 있다. 이 결과와 식 (31)로부터 응력확대계수와 T응력을 구할 수 있다.

Table 2는 Table 1의 결과를 식 (31)에 대입하여 모드 I, II의 응력확대계수와 T응력을 구한 것을 나타낸 것이다.  $N_u=7$ 의 결과를 보면

$$\begin{aligned}
 K_I &= \alpha_1 = 410.3 \text{ psi}\sqrt{in} \\
 K_{II} &= \beta_1' = -1.0 \text{ psi}\sqrt{in}, \\
 T_o &= 4\alpha_2' = -284.1 \text{ psi}
 \end{aligned} \quad (37)$$

임을 알 수 있다. 식 (37)의 결과에서  $K_{II}$ 는  $K_I$ 에 비해 매우 작은 값을 보이고 있으며, 또한  $K_I=410 \text{ psi}\sqrt{in}$ 의 결과는 유한판의 기존 해석결과에서 확인할 수 있다. 탄소강의 항복응력을

**Table 2** Stress intensity factors(SIF) and T stress by using predicted coefficients given in Table 1

Contour		C <sub>0</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>
Nu		SIF( $\text{psi}\sqrt{\text{in}}$ ), To( $\text{psi}$ )		
7	K <sub>I</sub>	410.3	411.0	413.9
	K <sub>II</sub>	-1.09	-1.73	-2.06
	To	-284.1	-295.6	-302.4
5	K <sub>I</sub>	409.7	410.3	410.8
	K <sub>II</sub>	3.33	2.93	0.54
	To	-247.0	-267.9	-291.6
3	K <sub>I</sub>	403.9	412.3	448.6
	K <sub>II</sub>	-1.27	-1.82	-3.55
	To	-296.8	-289.2	-264.5

$\sigma_y = 50 \text{ ksi}$ 라고 볼 때 식 (37)의 T응력은  $T_o/\sigma_y \approx 0.06$ 인 매우 작은 값을 알 수 있다. Table 2에서  $N_u = 7, 5$  및 각 경로의 T응력을 서로 비교하면 서로간에 값의 차이가 있지만, 이들 값은 항복응력에 비해 매우 작은 값이 되므로, 항복응력을 기준으로 할 때 서로 잘 일치하는 수치결과임을 알 수 있다. 이와 같은 T응력 값은 무한판의 결과로부터 대강의 결과를 예측할 수 있다. 즉, 무한판에 수직응력  $\sigma_o = 286 \text{ psi}$ 가 작용하는 문제의 이론해는 다음과 같다.<sup>(13)</sup>

$$K_I = \sigma_o \sqrt{a/2} = 378.3 \text{ psi}\sqrt{\text{in}}, \quad K_{II} = 0, \quad (38)$$

$$T_o = -\sigma_o = -286 \text{ psi}$$

본 문제는 판폭  $W = 4a$ 이므로 비교적 무한판에 근접한 문제가 된다. 실제로 식 (37),(38)을 비교하면 그 값이 비슷한 관계에 있음을 알 수 있다. 특히 본 문제는  $K_{II} = 0$ 인 모드 I 문제인데, 실제로 수치결과에서도  $K_{II}/K_I \approx 0$ 이 되므로 이를 확인할 수 있다.

이로부터 반경비  $r/a = 0.025 \sim 0.175$  구간의 응력정보로서 신뢰성 있는 파괴변수를 수치적으로 결정할 수 있음을 알 수 있다.

5.3 비대칭 노치균열 문제

임의의 둔각 노치균열은 실수 및 복소수 고유

**Table 3** First 7 eigenvalues of eq.(18) for a given angle  $\omega = 180^\circ, \gamma = 120^\circ$

No. of roots	roots of Eq.(18a) $\lambda_n$	roots of Eq.(18b) $\zeta_n$
1	0.51222	0.73090
2	1.47102+ 0.14185 i	1.00000
3	2.67761+ 0.28490 i	2.07482+ 0.22942 i
4	3.88148+ 0.36049 i	3.27976+ 0.32669 i
5	5.08408+ 0.41364 i	4.48290+ 0.38898 i
6	6.28596+ 0.45489 i	5.68509+ 0.43540 i
7	7.48740+ 0.48868 i	6.88672+ 0.47254 i

치를 함께 가지게 된다. 노치선단에서 응력특이성은  $r^{-1/2}$  인 직선균열 특이성과는 다르며, 모드 I과 모드 II의 응력특이치도 상이한 값을 보인다.<sup>(5)</sup> 이때 모드 I이 모드 II 보다 큰 응력특이치를 보이고 있다. 3.4장에서 언급한 바와 같이 모드 I,II의 고유치인  $\lambda, \zeta$  즉 복소수 및 실수근을 구하는 식은 별개 방법으로 유도되었지만, 결과식은 서로 동일한 특성방정식 (8),(10) 혹은 식 (18)로 표현되었다. 이들 식의 무한개 근을 각각  $0 < \text{Re}[\lambda_1] < \text{Re}[\lambda_2] < \dots$  및  $0 < \text{Re}[\zeta_1] < \text{Re}[\zeta_2] < \dots$  라고 둘 때, 첫 몇개 근은 실수근이고 나머지는 복소수근이 됨을 알 수 있다. Table 3는 상하 노치각이  $\omega = 180^\circ, \gamma = 120^\circ$  인 V-노치에 대해 얻은 고유치를 차례대로 몇개 보인 것이다.  $\lambda_1, \zeta_1, \zeta_2$ 는 실수 고유치를 가지고 나머지는 모두 복소수 고유치를 보인다.

이와같은 고유치를 가지고서 고유벡터를 구하는 방법은 직선균열과 동일하다. 다만 행렬을 구성함에 있어서 실수 및 복소수 고유치에 대해 각각 응력식 (12)와 식 (20)을 동시에 사용해야 하고, 이를 행렬로 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$[E]^T [E] [X] = [Y],$$

$$[X]^T = [\alpha_1 \beta_1' \quad \alpha_2 \alpha_2' \quad \beta_3 \beta_3' \quad \alpha_3 \alpha_3' \dots], \quad (39)$$

$$[Y]^T = [(\sigma_{\theta\theta})_1 (\sigma_{r\theta})_1 (\sigma_{\theta\theta})_2 (\sigma_{r\theta})_2 \dots]$$

여기서  $[X]$  는 미지고유벡터 행렬이고,  $[Y]$  는 각점에 대응되는 응력 행렬로서, 직선균열해석에서 설명한 식 (36)과 대등하다.

Fig. 3(a)는 노치각  $\omega = 180^\circ, \gamma = 120^\circ$  인 비대칭 V-노치균열 판을 나타낸 것이다. 판규격이 상이할 뿐 재질은 직선균열과 동일하다. 고유벡



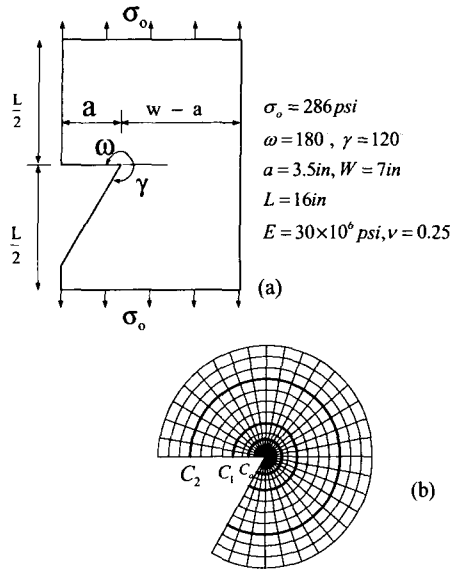


Fig. 3 (a) Plate with unsymmetric V-notched crack ; (b) Finite element model around V-notched tip

터 해석에 필요한 입력정보를 얻기 위해 유한요소 해석을 수행하였고, Fig. 3(b)는 노치 주위의 메쉬모양을 나타낸 것으로 노치 주변을 노드점 갯수  $m=31$ 로 요소분할한 것이다. 반경  $r=0.0875, 0.18564, 0.6125$  in인 경로를 각각  $C_0, C_1, C_2$ 로 두었다. Table 4는 각 경로에 대한 응력데이터를 가지고서 수치적으로 구한 고유벡터 계수를 나타낸 것이다. 이들의 결과 역시 많지 않은 미지상수로서도 신뢰성 있는 결과를 얻음을 보인다. 이를 보다 구체적으로 설명하면 다음과 같다.  $C_0$  경로에서 고유벡터 성분수  $N_u=8$ 인 경우에 각 고유벡터값은  $\alpha_1=886.6, \beta_1'=389.2, \alpha_2=-49.8, \alpha_2'=-143.1, \dots$ 임을 보인다. 이들 값의 신뢰성 조사를 위해  $N_u=6, 4, 2$ 인 경우와  $N_u=8$ 의 결과를 서로 비교해 보면,  $N_u=6, 4$ 의  $\alpha_1, \beta_1'$ 은 0.65% 내에서 오차를 보이고,  $N_u=2$ 는 4%의 다소 큰 오차를 보이지만,  $C_0$  경로를 택할 경우 이들 모든  $N_u$ 에 대해 믿을 만한 결과임을 알 수 있다. 한편 반경이 큰 경로 즉  $C_2$ 에서는  $N_u=2$ 로서 얻은 결과는 큰 오차를 포함하고 있음을 보인다. 그러나 이 경로에서도  $N_u=8, 6$

Table 4 Predicted coefficients using stress data for the V-notched crack with the value of  $\omega=180^\circ, \gamma=120^\circ$

Contour			$C_0$	$C_1$	$C_2$
radius r (in)			0.0875	0.18564	0.6125
number of collocation m			31	31	31
Nu	roots	coeff.			
8	$\lambda_1$	$\alpha_1$	886.6	881.8	885.9
8	$\zeta_1$	$\beta_1'$	389.2	388.1	384.2
8	$\lambda_2$	$\alpha_2$	-49.87	-30.3	-20.25
8	$\lambda_2$	$\alpha_2'$	-143.1	-114.1	-94.48
8	$\zeta_3$	$\beta_3$	24.24	5.30	1.33
8	$\zeta_3$	$\beta_3'$	5.515	0.851	-0.92
8	$\lambda_4$	$\alpha_4$	-8.986	-8.27	-7.428
8	$\lambda_4$	$\alpha_4'$	5.371	4.460	3.521
6	$\lambda_1$	$\alpha_1$	883.2	877.5	871.4
6	$\zeta_1$	$\beta_1'$	389.2	388.1	384.2
6	$\lambda_2$	$\alpha_2$	-44.1	-27.80	-18.24
6	$\lambda_2$	$\alpha_2'$	-125.8	-104.0	-87.75
6	$\zeta_3$	$\beta_3$	-8.98	-8.27	-7.42
6	$\zeta_3$	$\beta_3'$	5.37	4.46	3.52
4	$\lambda_1$	$\alpha_1$	883.2	877.5	871.4
4	$\zeta_1$	$\beta_1'$	386.7	381.2	350.2
4	$\lambda_2$	$\alpha_2$	-44.12	-27.80	-18.2
4	$\lambda_2$	$\alpha_2'$	-125.8	-104.0	-87.7
2	$\lambda_1$	$\alpha_1$	851.4	820.8	687.5
2	$\zeta_1$	$\beta_1'$	386.7	381.2	350.2

인 경우를 택하면 적절한 결과를 얻음을 알 수 있다

Table 5는 Table 4의 고유벡터 계수를 식 (27)에 대입함으로써 얻은 응력확대계수  $K_I, K_{II}$ 를 나타낸 것이다.  $N_u=8, 6$ 을 택할 경우 경로  $C_0, C_1, C_2$ 에 대해 모두  $K_I=1010 \text{ psi in}^{0.4878}, K_{II}=610 \text{ psi in}^{0.2691}$  정도의 응력확대계수를 얻을 수 있다. 이 결과로부터 대칭선 상의 노치선단 응력거동을 다음으로 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta_0) + i\sigma_{r\theta}(r, \theta_0) = K_I r^{-0.4878} + iK_{II} r^{-0.2691}, \quad (40)$$

$$K_I = 1010 \text{ psi in}^{0.4878}, K_{II} = 610 \text{ psi in}^{0.2691}$$

이로부터 반경비  $r/a=0.025 \sim 0.175$  정도의 구간에 대한 응력정보를 입력값으로 택하면 신뢰

**Table 5** Stress intensity factors(SIF) by using predicted coefficients given in Table 4

Contour		C <sub>0</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>
Nu	SIF	$K_I [psi in^{0.4878}], K_{II} [psi in^{0.2691}]$		
8	K <sub>I</sub>	1010.2	1004.8	1009.5
	K <sub>II</sub>	614.83	613.02	606.97
6	K <sub>I</sub>	1006.5	999.89	992.97
	K <sub>II</sub>	614.83	613.02	606.97
4	K <sub>I</sub>	1006.5	999.89	992.97
	K <sub>II</sub>	610.88	602.16	553.19
2	K <sub>I</sub>	970.18	935.28	783.43
	K <sub>II</sub>	610.88	602.16	553.19

성있는 응력확대계수를 수치적으로 얻을 수 있다고 생각된다.

이상의 결과로부터 균열선단에서 밀접한 점은 물론 다소 떨어진 점에 대한 응력을 입력값으로 취하더라도, 수렴성이 좋은 고유벡터 값을 얻을 수 있음을 확인하였고, 이로부터 응력확대계수는 물론 역으로 임의의 점에 대한 응력성분을 구하는 데 적용될 수 있다고 본다. 이들 값은 균열성장 방향의 결정과 응력상태를 아는 데 기본 자료로 사용될 수 있다. Carpenter<sup>(5,6)</sup>는 응력을 경계배치법의 입력자료로 사용할 때 응력확대계수를 구하는데 무리가 있음을 언급한 바 있지만, 본 연구의 결과를 두고 보면 응력성분으로도 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있었다. 다만 유한요소 해석시에 노치선단 주변의 요소분할을 비교적 세분화 할 필요가 있지만, 이는 해석과정에서 문제가 되지 않았다. 본 연구 결과는 유한요소해석 결과를 입력자료로 사용함으로 임의형태 결합균열이 내재된 평판문제 해석에 사용될 수 있고, 또한 타 방법으로 해석이 어려운 문제해석에 적용될 수 있다.

6. 결 론

임의 비대칭 V-노치 균열문제를 복소응력함수를 적용하여 응력식을 얻고, 이를 이용하여 경계배치법으로 고유벡터를 구하고 파괴변수를 결정하는 연구를 수행하였다. 구체적으로 다음과 같

은 결과를 얻었다.

(1) 직선균열 및 임의 V-노치균열에 대해서도 해가 되는 응력의 일반해를 폐형으로 구하였으며, 복소수 및 실수 고유치에 대해 그 식은 각각 식 (12),(13) 및 식 (20),(21)과 같다. 일반해는 각각 모드 I,II의 선형조합으로 구성되고, 각 모드는 별개의 특성방정식에서 주어지는 고유치문제의 해에서 결정되었다.

(2) 유도된 응력식을 사용하여 고유벡터에 대응되는 미지상수와 응력확대계수의 일반화된 관계식 (27)을 얻었다. 특별한 경우로서 대칭 노치 경우의 관계식은 선행 연구자의 결과로 회복되었다.

(3) 응력의 일반식을 사용하여 기존 연구자들의 방법을 따라 경계배치법 프로그램을 구성하였다. 이 프로그램으로 직선 중앙균열문제에 대한 응력확대계수와 T응력을 구하였다. 그 결과를 보면 노치선단에서 다소 떨어진 점(반경비  $r/a=0.025\sim 0.175$ )의 응력성분을 입력값으로 택해도 수렴성이 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 선행연구자에 의하면 응력값으로는 파괴변수를 구하는 데 많은 오차가 동반됨을 언급하였지만, 본 연구의 결과 이러한 반경에서 정보를 택할 때 문제가 되지 않음을 알 수 있었다. 이때 고유벡터의 미지 성분수는 6개 내외로 충분하였다.

(4) 비대칭 V-노치균열문제를 해석하는 경계배치법 프로그램을 구성하고, 노치균열 선단의 파괴변수를 구하였다. 직선균열과 유사하게 6개 정도의 미지고유벡터 성분수로 신뢰성있는 모드 I,II의 응력확대계수를 얻었다.

(5) 수치적으로 얻은 고유벡터들은, 응력식에 역 대입함으로써 노치선단 주변의 응력분포를 구할 수 있고, 균열 성장 방향 예측등 실험적인 연구에도 활용될 수 있다.

후 기

이 논문은 2001년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

(1) Williams, M.L.,1957, "On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack," *Journal of*

- Applied Mechanics*, Vol. 19, pp. 526~528.
- (2) England, A.H., 1971, "On Stress Singularities in Linear Elasticity," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 9, pp. 571~585.
- (3) Gross, B. and Mendelson, A., 1972, "Plane Elastostatic Analysis of V-Notched Plates," *International Journal of Fracture*, Vol. 8(3), pp. 267~276.
- (4) Lin, K.Y. and Tong, P., 1980, "Singular Finite Elements for the Fracture Analysis of V-Notched Plate," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, pp. 1343~1354.
- (5) Carpenter, W.C., 1984, "A Collocation Procedure for determining Fracture Mechanics Parameters at a Corner," *International Journal of Fracture*, Vol. 24, pp. 255~266.
- (6) Carpenter, W.C., 1985, "The Eigenvector Solution for a General Corner or Finite Opening Crack with Further Studies on the Collocation Procedure," *International Journal of Fracture*, Vol. 27, pp. 63~74.
- (7) Carpenter, W.C., 1984, "Calculation of Fracture Mechanics Parameters for a General Corner," *International Journal of Fracture*, Vol. 24, pp. 45~58.
- (8) Carpenter, W.C., 1984, "Mode I and Mode II stress Intensities for Plates with Cracks of Finite Opening," *International Journal of Fracture*, Vol. 26, pp. 201~214.
- (9) Carpenter, W.C. and Byers, C., 1987, "A Path Independent Integral for Computing Stress Intensities for V-notched Cracks in a Bi-Material," *International Journal of Fracture*, Vol. 35, pp. 245~268.
- (10) Sang Bong Cho, Hwi Won Jeong and Jin Kwang Kim, 2000, "Determination of Stress Intensity Factors for Interface Cracks in Dissimilar Materials Using the RWCIM," *Journal of the Korean Society of Precision Engineering*, Vol. 17, pp. 180~185.
- (11) Hong-Rae Roh, Jin-Kwang Kim and Sang-Bong Cho, 2000, "A Study On the Eigenvector Analyses for V-notched Cracks in Anisotropic Dissimilar Materials by the Reciprocal Work Contour Integral Method," *Proceedings of the KSME 2000 Spring Meeting A*, pp. 115~120.
- (12) Muskhelishvili, N.I., *Some Basic Problems of the mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, 1963.
- (13) Suresh, S., *Fatigue of Materials*, Cambridge Univ., 1991.