

전자력을 받는 외팔보의 비선형진동

최연선[†] · 서경석* · 우영주*

(2002년 2월 18일 접수, 2002년 12월 2일 심사완료)

Nonlinear Vibration of a Cantilever Beam Subjected to Electromagnetic Forces

Yeon Sun Choi, Kyung Seok Seo and Young Joo Woo

Key Words: Nonlinear Vibration(비선형 진동), Electromagnetic Force(전자력), Cantilever Beam(외팔보), Jump Phenomenon(도약현상), Air Gap(간극)

Abstract

This study presents nonlinear vibration of a cantilever beam subjected to electromagnetic forces. The dynamic responses of the beam show various nonlinear phenomena with the variation of the system parameters, such as the jump phenomenon, multiple solutions, and the movement of the natural frequency. In this study the nonlinear stiffness due to electromagnetic forces which depends on air gap size is measured experimentally, and the system is modeled by a single degree of freedom nonlinear dynamic system and solutions are solved numerically. The numerical results show good agreements with the experimental results, which demonstrate the nonlinearity of electromagnetic force. Finally the occurrences of the jump phenomenon and the first, second and fourth harmonic components are confirmed in using the method of multiple scales.

1. 서론

전자력은 쉽게 발생시킬 수 있어 모터, 자기베어링 등 기계장치에 널리 사용되고 있다. 실제 전자력을 이용한 기계 장치 설계에서는 이론 해석과 더불어 실험적 검증이 필요하다. 이는 전자력의 크기가 이론과는 다르게 제작 방법에 따라 달라질수 있으며, 전자력은 전자석과 물체 사이의 간극의 제곱에 반비례하는 비선형성이 있기 때문이다. 전자석에 의한 비선형성은 전자력에

의해 구동되는 기계계에 비선형 동적응답을 유발하는 바, 선형이론으로는 그 응답을 예측할 수 없다. 이에 본 연구에서는 전자력을 받는 외팔보 실험장치를 제작하여 전자력에 의한 비선형 동적응답을 실험적으로 관찰하고, 비선형 운동방정식을 유도하여 전자력에 의한 외팔보의 비선형 동특성을 검증하고자 하였다.

전자력이 작용하는 상태에서의 대상 기계계는 전자력이 없는 상태보다 고유진동수가 변화하거나, 모드형상이 변화함은 이미 타 연구자들에 의해 관찰되었다.^(1,2) 본 연구에서는 전자기장내에서 외팔보를 가진기(exiter)로 가진한 상태에서 외팔보의 비선형 동적거동을 관찰하고자 하였다. 외팔보가 같은 극(same pole)의 두 전자석 사이에

[†] 책임저자, 회원, 성균관대학교 기계공학부

E-mail : yschoi@yurim.skku.ac.kr

TEL : (031)290-7440 FAX : (031)290-5849

* 성균관대학교 대학원 기계공학과

위치할 때와 서로 다른 극(different pole) 사이에 위치할 때, 각각에 대해 전자력에 의한 비선형 강성값을 유도하고, 이러한 비선형 강성변화에 의한 외팔보의 비선형 동적응답을 규명하고자 하였다. 이를 위해 전자석과 외팔보 사이의 간극의 변화에 의한 외팔보의 강성변화와 가진주파수의 증가에 따른 외팔보의 동적응답을 실험적으로 관찰하였다. 실험적으로 관찰된 현상을 규명하기 위해 전자력을 고려한 외팔보의 강성변화와 외팔보의 설계변수를 이용하여 비선형 운동방정식을 유도한 후 수치해석을 수행하였고, 다중시간법을 이용하여 실험적으로 나타난 1, 2, 4차 성분의 존재와 도약현상을 설명하였다.

2. 기반가진에 의한 외팔보의 진동

길이가 길고 두께가 얇은 보는 오일러-베르누이(Euler-Bernoulli)보 이론을 적용할 수 있으며 감쇠를 무시한 운동방정식은 식 (1)과 같다.

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}] = f(x, t) \quad (1)$$

가진기로 가진되는 보의 운동은 보 자체의 운동과 가진기에 의한 운동 $x_{base}(t)$ 의 합으로 나타나므로 보의 실제 응답 $w_{total}(x, t)$ 은 다음과 같다.⁽³⁾

$$w_{total}(x, t) = \sum \phi_i(x) u_i(t) + x_{base}(t) \quad (2)$$

여기서 i 번째 모드형상함수 $\phi_i(x)$ 은 보가 일단 고정-일단 자유의 경계조건을 갖는 경우이다. 가진기에 의한 운동이 단일 주파수 성분으로 조화가진 된다면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\therefore x_{base}(t) = -\frac{1}{\Omega^2} a_{base} \sin \Omega t \quad (3)$$

여기서 Ω 는 가진주파수를 나타내며 a_{base} 는 가진기에 의한 가속도의 진폭을 나타낸다. 가진주파수가 1차 고유주파수 영역에서 작동하는 경우, 식 (2)에서 1차 모드만 고려하면 된다, 즉 식 (2)에서 1차 모드만을 고려하여 식 (1)에 대입하고 외팔보 길이에 대하여 적분하면, 가진기 가진에 의한 외팔보 운동은 아래와 같은 1자유도 운동방정식이 된다.

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = Q \sin \Omega t \quad (4)$$

여기서

$$Q = \frac{a_{base} \int_0^l \phi_1(x) dx}{\int_0^l \phi_1^2(x) dx}$$

3. 전자력의 비선형특성

전자력을 이용하여 시스템을 구축하고자 하면 먼저 전자석이 설계, 제작되어야 한다. 전자석은 금속에 코일을 감고, 코일 양단에 전류를 흐르게 하면 전자석이 된다. 이때 발생한 전자력의 크기는 권선수와 유효단면적에 비례하고, 코일에 흐르는 전류의 제곱에 비례하며, 전자력을 받는 물체와의 거리의 제곱에 반비례한다.

전자석에 의해 발생된 자계에 의한 힘 F 는 다음과 같다.⁽⁴⁾

$$|F| = \frac{i^2}{2} \frac{N^2}{R^2} \frac{dR}{dx} \quad (5)$$

여기서 자기저항

$$R(x) = \frac{l}{\mu_0 A}$$

A 는 전자석 끝단의 면적이고, μ_0 는 자유 공간의 투자율(permeability), N 은 전자석 코일의 권선수, i 는 전류, l 은 공극의 길이를 나타낸다.

본 연구에서 공극의 길이 l 은 전자석과 외팔보와의 간격이 된다. Fig. 1은 본 연구를 위해 제작된 전자석으로 규소강판 여러장을 겹쳐 끝단을 용접하고 절연지로 규소강판을 감은 뒤에 코일을 감았다. 제작된 전자석의 설계변수는 Table 1과 같다. 전자 저울 위에 추를 올리고 추 위쪽에 전자석을 설치한 후 전자석과 추의 간극을 변화시키면서 추의 무게 변화로 전자력을 실험적으로 구하였다. 실험과 이론을 통하여 구해진 간극과 전자력의 관계는 Fig. 2와 같다. 이때 입력 전압은 13 V이다. Fig. 2에서 x축은 일정한 간극내 외팔보의 운동에 따른 간극의 변화량을 나타내는 바, 이는 전자석에 의한 전자력은 이격거리, 즉 전자석과 자성체 사이의 간극의 제곱에 반비례함을 알 수 있다. 실험과 이론 해석에 의한 전자력의 차이는 저항, 전자석 코일, 마찰에 의한 손실

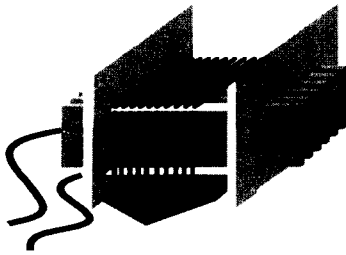


Fig. 1 Model of electromagnet

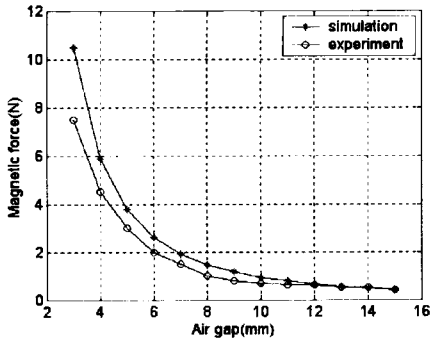


Fig. 2 Magnetic force vs. air gap

Table 1 Parameters of an electromagnet

Length (mm)	Cross-sectional area (mm)	No. of turns	Diameter of wire (mm)
60	15 × 10	1000	0.6

이 발생하기 때문이고, 간극이 증가함에 따라 오차는 커짐을 알 수 있다.⁽⁵⁾

전자석은 자성체를 잡아당기기만 하고 밀지는 못한다. 그러나 두 개의 전자석은 극에 따라 서로 잡아당기는 힘과 미는 힘이 작용하므로 자성체를 두 전자석 사이에 위치시키기 전에 전자석의 극이 확인되어야 한다.

같은 크기의 전자력을 발생하는 전자석 두 개가 Fig. 3과 같이 일정한 간격을 가지고 작용하고 있고, 그 사이에 외팔보가 있는 경우, 두개의 전자석의 마주보는 극이 같은 극인 경우와 서로 다른 극인 경우가 있을 수 있다. 두개의 전자석이 서로 S극으로 같은 경우에는 전자석 사이에 서로 미는 힘이 작용하고 전자기장이 서로 영향을 주지 않게 대칭 되게 형성되어 외팔보가 전자석의

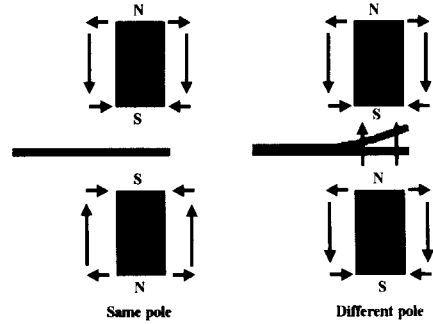


Fig. 3 Directions of magnetic forces



Fig. 4 Photo of the experimental set-up

Table 2 Dimensions of the beam

l (length)	150mm
h (thickness)	1mm
b (width)	15mm
ρ (density)	7800kg/m ³
E (Young's modulus)	250GPa

중심에 위치하고, 서로 반대되는 극일 때, 즉 두개의 전자석이 서로 당기는 경우는 Fig. 3과 같이 자기장이 서로 영향을 주게된다. 따라서 전자기장이 비대칭적으로 형성되고, 그에 따라 외팔보는 중심에서 벗어나 전자기장 방향에 따라 S극 쪽으로 이동된다.⁽⁶⁾

4. 전자력의 영향을 받는 외팔보의 진동실험

Table 3 System parameters of the cantilever beam

Natural frequency, ω_n	34.5 Hz
Damping ratio, ξ	0.0175
Mass, m	0.0047 kg
Damping constant, c	0.0181 N · s/m
Spring constant, k	228.8 N/m

4.1 실험장치

본 연구를 위하여 Fig. 4와 같이 실험장치를 준비하였다. 본 연구에 사용된 외팔보는 탄소강을 사용하였으며 재료상수와 규격은 Table 2와 같다. 가진기에 보의 한쪽 끝을 나사로 고정하여 외팔보 형태가 되도록 하였으며 자유단에 전자석을 설치하여 외팔보와 전자석 사이의 간극의 크기를 조정함으로써 전자력의 변화를 유도하였다.

보에 가해지는 가진력은 고정단의 상단에 부착한 가속도계(B&K Type 4373)로 측정하고, 이에 대한 외팔보의 응답은 레이저센서(Graham&White laser sensor M5L/20)를 이용하여 측정하였다. 함수발생기(function generator)에서 나온 정현파(sine) 신호를 전력증폭기를 통하여 증폭시킨 후, 가진기(B&K Type 4890)를 구동하였다.

4.2 시스템 매개변수

충격실험을 통해 외팔보의 1차 고유진동수와 감쇠비를 구했으며, 정적하중과 변위관계로부터 외팔보의 스프링상수를 구하였다. 여기서 구해진 스프링 상수는 1차 모드형태로 실험이 되므로 1차 모달질량은 스프링 상수와 1차 고유진동수를 이용하여 계산하였다.

4.3 실험방법

외팔보의 1차 고유진동수는 34.5 Hz이고, 실험 구간인 20 Hz~40 Hz에서는 2차 모드의 영향을 거의 받지 않는다고 가정한다. 따라서 본 실험장치는 1자유도계로 모델링할 수 있다. 실험구간 내에서 외팔보의 비선형 동특성을 분석하고, 전자력이 작용하지 않는 경우와 전자력이 작용하는 경우에 대해 각각의 진동레벨의 변화를 비교하기 위하여 외팔보의 자유단에 일정한 간극을 두고

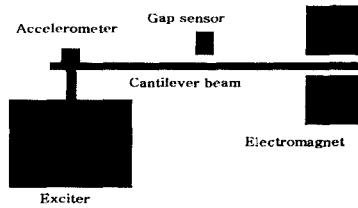


Fig. 5 Schematic diagram of experimental apparatus

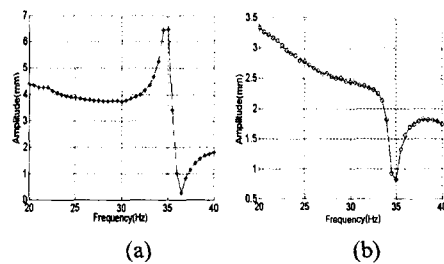


Fig. 6 Responses of cantilever beam(a) and exciter(b)

상하 두 개의 전자석을 설치하였다.

가진주파수를 증가시키면서 외팔보의 응답을 측정하였고, 또한 같은 조건에서 전자석의 극이 서로 같은 경우와 다른 경우에 대하여 각각 실험을 수행하였으며, 전자석에 입력되는 전압을 변화시키면서도 실험을 하였다.

4.4 실험결과

Fig. 5와 같이 전자석이 외팔보의 자유단끝에 위치함으로 외팔보 자유단끝의 변위를 직접 측정할 수 없어 외팔보 중앙에서 변위를 측정하였다. 가진신호는 가진기 위에 가속도계를 부착하여 측정하였다. 전자석이 없는 순수 외팔보의 응답은 식 (2)로부터 실제 레이저센서로 외팔보 중앙에서 측정된 변위응답 Fig. 6 (a)에서 가진기의 변위신호인 Fig. 6 (b)를 빼고 외팔보의 1차 모드만 고려하면 외팔보의 1차 모드 응답 $u_1(t)$ 을 구할 수 있다. Fig. 7은 가진주파수별 1차 모드 응답의 rms값이다. Fig. 6 (a)는 외팔보의 고유주파수 부근에서 진폭이 커지고, 고유주파수를 지나면서 위상이 바뀌어 변위가 급격히 감소하는 현상을 볼 수 있다. Fig. 6 (b)는 가진기에 부착한 가속도계로 측정된 신호를 두 번 적분한 결과로 가진기의 특성에 따라 가진주파수가 증가하면 진폭이 작아지고 외팔보의 고유주파수 영역에서 변위가

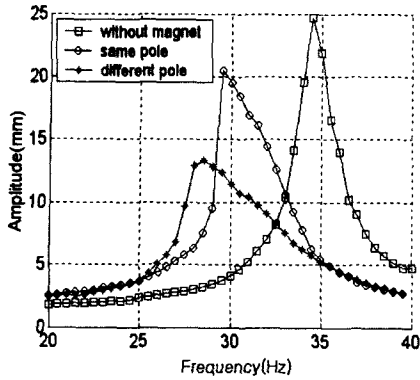


Fig. 7 First modal responses of the cantilever beam with an electromagnetic force

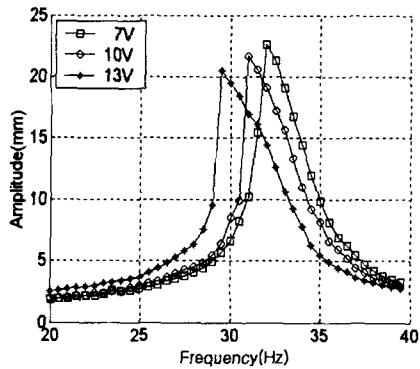


Fig. 8 Responses with the variation of input voltage

급격히 커짐에 따라 외팔보가 가진기에 영향을 주어 가진기의 응답변위는 작아짐을 확인할 수 있었다.

실제 응답인 Fig. 7에서 보는 바와 같이 전자력이 작용하면 고유진동수는 작아진다. 외팔보의 고유진동수 34.5 Hz부터 자극이 서로 같은 경우 고유진동수는 29.5 Hz로 감소하였으며, 다른 극인 경우에는 28 Hz로 감소하였다. 진동레벨도 자극이 같은 경우에 비해 다른 경우가 더 크게 감소하는 것을 알 수 있었다.

Fig 8은 전자석의 입력전압 변화에 따른 응답으로 전자석에 입력전압을 증가시키면 입력전류가 증가되고, 식 (5)에서 보는 바와 같이 전자력은 전류의 제곱에 비례하여 커지게 되며 이 경우 고유진동수와 진동레벨은 작아짐을 확인할 수 있었다. Fig. 9는 함수발생기를 이용하여 가진주파수를 증가 혹은 감소시키면서 진동레벨을 측정한

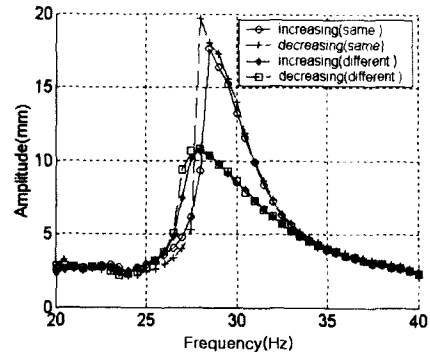


Fig. 9 Jump phenomenon

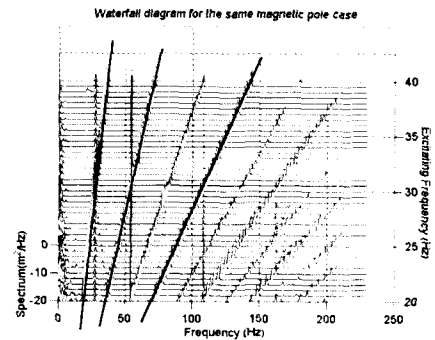


Fig. 10 Waterfall diagram for the same magnetic pole case

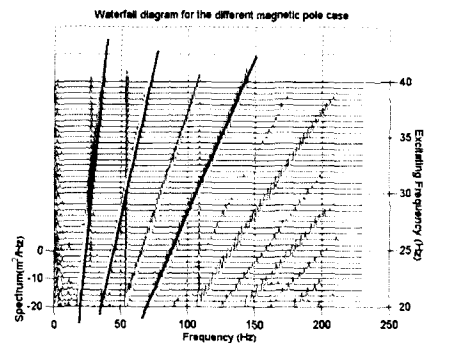


Fig. 11 Waterfall diagram for the different magnetic pole case

결과이다. 증가와 감소 때의 진동레벨의 크기 변화가 다름을 알 수 있고, 각 공진영역에서 도약 현상(jump phenomenon)이 발생한 것을 알 수 있었다. 이 경우 도약현상은 연성스프링에 기인하는 경우로서 응답곡선이 저주파 방향으로 휘는 것을 볼 수 있다.

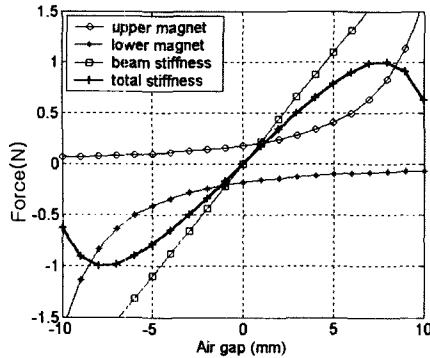


Fig. 12 System stiffness of the same pole case

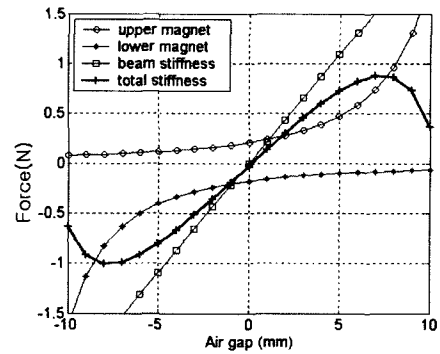


Fig. 13 System stiffness of the different pole case

전자력의 영향을 받는 외팔보의 변위응답을 Figs. 10, 11과 같이 같은 극과 다른 극을 갖는 경우에 대해 각각 Waterfall diagram을 그려보면 잡음과 전자석의 비선형성으로 인하여 여러 조화 성분들이 발생함을 알 수 있다. 다만 1차 성분과 함께 2, 4차 등 가진주파수의 짝수 배에 해당하는 배수성분이 주요 성분임을 확인할 수 있다.

5. 시스템강성과 운동방정식

4절에서 측정된 실험결과를 이해하기 위해서는 시스템의 운동방정식을 유도하여야 한다. 이를 위해서는 먼저 전자력에 의한 시스템의 강성변화를 알아야 한다. 시스템의 강성은 두 전자석이 같은 방향으로 위치할 때와 반대로 위치할 때 Figs. 12, 13에서 보는 바와 같이 달라진다. Figs. 12, 13에서 시스템의 강성은 외팔보 자체의 강성에 상하 두 개 전자석에 의한 강성 효과를 더해 준 것이다. 전자석에 의해 발생하는 힘이 식 (5)와 같이 간극의 제곱에 반비례하는 경향을 가지므로 전자력과 외팔보의 간극이 커지면서 외팔보만의 강성이 전자석에 의한 강성보다 커지고 전체적으로 시스템 강성은 작아짐을 알 수 있다. Fig. 12는 Fig. 3에서의 두 전자석이 같은 극을 갖는 경우로서 전자기장이 상하 대칭을 형성하고, 전체시스템 강성곡선이 외팔보가 중심에 위치할 때의 0을 기준으로 상하 대칭을 이룬다. Fig. 13은 Fig. 3에서의 두 전자석이 서로 다른 극을 갖는 경우로서 전자기장이 상하 영향을 주게되어 대칭을 이루지 못하고, + 변위에서의 강성곡선의

기울기가 더 급함을 알 수 있다. 이것은 가진기가 작동하지 않는 상황에서 외팔보가 자기장의 영향으로 중심에서 벗어나 약간 위로 올라가는 원인이 된다.

Figs. 12, 13에서 외팔보의 강성 (beam stiffness)은 외팔보 자체의 강성이고, upper magnet과 lower magnet은 식 (6)과 (7)의 전자력에 의한 가진항을 변위의 함수로 표시한 것이며, total stiffness는 beam stiffness, upper magnet, lower magnet에 의한 강성을 모두 더한 것이다.

앞에서 유도한 외팔보의 1자유도 운동방정식에 전자력에 의한 비선형 강성값을 더해 비선형 1자유도 운동방정식을 서로 같은 극인 경우와 극이 서로 다른 경우, 각각에 대해 구해보면 식 (6)과 식 (7)과 같이 된다. 식 (6)은 두 전자석의 극이 같은 경우로서 전자력이 상하 대칭을 이루고, 식 (7)은 서로 극이 다른 경우로서 전자장의 영향으로 상하 다른 전자력이 생기게 된다.

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = Q\sin\Omega t + \left\{ \frac{c_1}{(d+u)^2} - \frac{c_1}{(d-u)^2} \right\} \quad (6)$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = Q\sin\Omega t + \left\{ \frac{c_1}{(d+u)^2} - \frac{c_2}{(d-u)^2} \right\} \quad (7)$$

$$c_1 = 4.069 \times 10^{-5}, c_2 = 5.135 \times 10^{-5}, d = 15\text{mm}$$

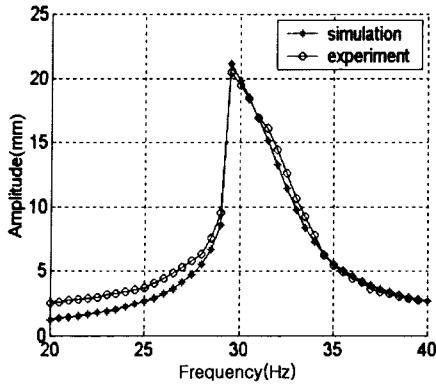


Fig. 14 Vibration levels of the same pole case

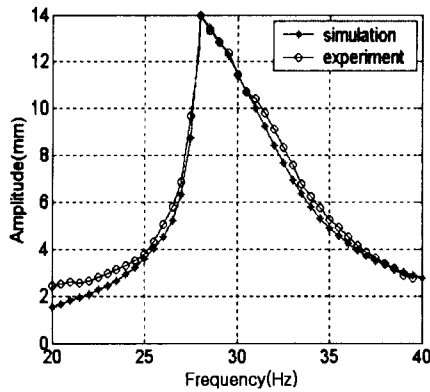


Fig. 15 Vibration levels of the different pole case

식 (6)과 (7)은 전자력이 외팔보의 변위의 제곱에 반비례하는 값을 갖는 비선형 운동방정식이 되었다. 이러한 비선형 운동방정식으로 부터 Runge-Kutta 방법을 이용하여 시간 영역의 응답을 확인하고, 각 가진주파수에서의 최대 진폭을 구해볼 수 있다. Figs. 14와 15에서 보는 바와 같이 수치해석결과와 실험결과가 잘 일치하고 있다. 따라서 식 (6)과 (7)은 전자력을 받는 외팔보 실험장치의 운동을 정확히 기술한 식임을 알 수 있다. 전자력은 간극의 제곱에 반비례하는 형태를 갖는다. 즉 전자력을 받는 외팔보의 1차 모드는 공진영역에서 도약현상을 일으키며 자국이 서로 같은 경우가 다른 경우보다 더 큰 진폭을 유발함을 알 수 있다. 다만 25 Hz 이하에서는 실험과 수치해석 사이에 약간의 오차가 발생하였는 바, 이는 실험에 사용한 가진기가 외팔보의 영향으로 저주파 영역에서 잡음에 기인한 것이다.

6. 다중시간법 해석

실험적으로 나타난 응답의 크기와 도약현상은 5절에서 측정된 시스템 강성과 유도된 운동방정식을 수치해석함으로써 증명할 수 있었다. 다만 Figs. 10과 11의 Waterfall diagram에서 나타난 응답의 주요 1, 2, 4 배수성분의 존재를 증명해 볼 필요가 있다. 이에 본 장에서는 약비선형 진동해석법의 하나인 다중시간법(method of multiple scales)을 이용하여 도약현상과 전자력의 제곱항의 특성에 의한 짝수배 해의 존재를 증명해 보고자 한다.⁽⁷⁾ 식 (6)에 무차원 매개 변수 $\tau = \omega_n t$ 을 이용하여 무차원화하고 섭동량 ϵ 을 대입하면 다음의 식 (8)과 같이 된다.

$$\ddot{u} + 2\epsilon\xi\dot{u} + u - \frac{\epsilon}{(b-u)^2} + \frac{\epsilon}{(b+u)^2} = F \sin \omega t \quad (8)$$

식 (8)에 해를 구하기 위해 $T_0 = t, T_1 = \epsilon t$ 의 다중시간을 이용하고, $F = \epsilon f$ 로 변환하면 식 (9)가 된다.

$$D_0^2 u + 2\epsilon D_0 D_1 u + 2\epsilon\xi D_0 u + u - \frac{\epsilon}{(b-u)^2} + \frac{\epsilon}{(b+u)^2} = \epsilon f \sin \omega T_0 \quad (9)$$

식 (9)를 정리하면 아래와 같이 된다.

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (10)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2 D_0 D_1 u_0 - 2\xi D_0 u_0 + \frac{1}{(b-u)^2} - \frac{1}{(b+u)^2} + f \sin \omega T_0 \quad (11)$$

윗 식에서 조정변수(detuning parameter) σ 을 1차 공진 영역에서의 응답을 고려하기 위해 섭동량 ϵ 을 대입하면 $\omega = 1 + \epsilon\sigma$ 로 놓을 수 있다. 이 경우 일반해는 식 (12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$u_0 = A(T_1) e^{i T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i T_0} \quad (12)$$

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\theta} \quad (13)$$

여기서 \bar{A} 는 A의 공액복소수이다.

식 (12)를 식 (11)에 대입하고 풀면 식 (14)의 결과를 얻을 수 있다.

$$2i\dot{A} + 2i\epsilon\dot{A} + \frac{1}{bA} - \frac{1}{2} f e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (14)$$

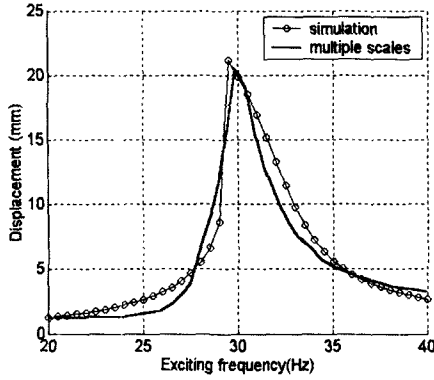


Fig. 16 Multiple scales & simulation

식 (14)에 식 (13)을 대입하고 실수와 허수를 나누어 정리하면 아래와 같다.

$$\dot{a} = -a\xi + \frac{1}{2} f \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (15)$$

$$a\dot{\beta} = \frac{2}{ab} - \frac{1}{2} f \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (16)$$

식 (15), (16)에서 $r = \sigma T_1 - \beta$ 로 치환하면 식 (17)과 같은 주파수응답식을 얻을 수 있다.

$$\xi^2 a^2 + (\sigma - \frac{2}{a^2 b})^2 a^2 = \frac{1}{4} f^2 \quad (17)$$

식 (17)의 σ 는 가진주파수이고 a 는 진폭에 해당한다.

위 식을 이용하여 a 와 γ 에 대한 Jacobian matrix를 구하면 식 (18)과 같다.

$$D_x F = \begin{bmatrix} -\xi & -a(\sigma - \frac{2}{a^2 b}) \\ \frac{1}{a}(\sigma + \frac{2}{a^2 b}) & -\xi \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\lambda^2 + 2\xi\lambda + \xi^2 + (\sigma - \frac{2}{a^2 b})(\sigma + \frac{2}{a^2 b}) = 0 \quad (19)$$

여기서 고유값의 합은 -2ξ 이다. ξ 값이 양의 정수이므로 고유값의 합인 -2ξ 는 항상 음수이다. 결과적으로 적어도 하나의 고유값은 항상 음의 정수 값을 갖게 된다. 그러므로 1차 공진 영역에서 안정해(stable solution)가 존재한다는 것을 알 수 있다.

Fig. 16은 각각 이론해석과 수치해석을 통해 얻은 결과를 비교하면 두 그림의 형상이 상당히 비슷한 것을 알 수 있다. 이론해석과 수치해석 모

두 공진점을 기준으로 좌측의 기울기가 우측의 기울기 보다 심함을 알 수 있었다. 즉 도약현상의 가능성을 알 수 있다.

2차 공진(secondary resonance) 영역에서의 해는 $\omega = 2 + \epsilon\sigma$ 에 해당하고 수식은 식 (20)과 (21)로 나누어 볼 수 있다.

$$D_0^2 u_0 + u_0 = F \sin \omega T_0 \quad (20)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2 D_0 D_1 u_0 - 2\xi D_0 u_0 + \frac{1}{(b-u)^2} - \frac{1}{(b+u)^2} \quad (21)$$

이 때의 일반해는 식 (22)와 같다.

$$u_0 = A(T_1) e^{i T_0} + \Lambda e^{i \omega T_0} + cc \quad (22)$$

$$\Lambda = \frac{F}{2(1-\omega^2)} \quad (23)$$

식 (21)에 식 (22)를 대입하여 전개하면 식 (24)와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$2i\dot{A} + 2i\xi A + \frac{1}{2bA - 2A\Lambda} e^{-i\sigma T_1} + \frac{1}{2bA + 2A\Lambda} e^{-i\sigma T_1} = 0 \quad (24)$$

식 (24)에 식 (13)과 (23)을 대입하여 전개하면 식 (25), (26)과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\xi a = -\frac{\Lambda \sin \gamma}{a(b^2 + \Lambda^2)} \quad (25)$$

$$\frac{\sigma a}{2} = \frac{2(b - \Lambda \cos \gamma)}{a(b^2 + \Lambda^2)} \quad (26)$$

위 식을 이용하여 a 와 γ 에 대한 Jacobian matrix를 구하면 식 (27)과 같다.

$$D_x F = \begin{bmatrix} -\xi & \frac{\sigma a}{2} - \frac{4b}{2a(b^2 + \Lambda^2)} \\ -\frac{\sigma}{2a} & -\xi \end{bmatrix} \quad (27)$$

2차 공진 영역에서의 주파수응답식은 식 (28)과 같다.

$$\xi^2 a^4 + \frac{\sigma^2 a^4}{16} = \frac{1}{(b^2 + \Lambda^2)} \quad (28)$$

식 (28)의 σ 는 가진주파수이고 Λ 는 진폭에 해당한다.

$$\lambda^2 + 2\xi\lambda + \xi^2 + (\frac{1}{2a})(\sigma a^2 - \frac{4b}{(b^2 + \Lambda^2)}) = 0 \quad (29)$$

여기도 고유값의 합은 -2ξ 이다. 그러므로 2차 공진 영역에서도 안정해가 존재한다는 것을 알 수 있다.

3차 공진(thirdly resonance) 영역에서의 해는 $\omega=3+\varepsilon\sigma$ 이고 2차 공진과 같은 식 (20), (21)로 나눌 수 있다. 이 때의 일반해는 식 (22)와 같다. 식 (22)를 식 (21)에 대입하고 $\omega=3+\varepsilon\sigma$ 를 대입하면 식 (30)과 같은 결과를 얻을 수 있다

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2i(A + \mu A) e^{i\tau_0} - \frac{e^{i\tau_0}}{bA} \quad (30)$$

위 식에 식 (13)을 대입하고 전개하면 식 (31), (32)와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\dot{a} = -\mu a \quad (31)$$

$$\gamma = \frac{6}{a^2 b} - \sigma \quad (32)$$

위 식을 이용해서는 a 와 γ 에 대한 Jacobian matrix를 구할 수 없다. 즉 3차 공진 영역에서의 해는 존재하지 않는다. 4차 공진 영역에서의 해는 2차 때와 같은 방법으로 식을 유도할 수 있고, 같은 형태가 되어 해가 존재함을 알 수 있다. 이로서 다중시간법에 의해 구한 주파수 응답식으로부터 1차, 2차, 4차 등 짝수 배수 성분이 발생함을 확인할 수 있었다.

7. 결론

본 연구에서는 자기장내에서 운동하는 외팔보의 비선형 동적응답을 살펴보았다. 이를 위해 전자장에서의 외팔보 가진 실험장치를 구성하고, 외팔보와 전자석의 설계변수를 실험으로 측정하고, 가진실험을 수행하였다. 또한 측정된 설계변수를 이용하여 시스템을 1자유도 비선형 시스템으로 모델링하여 수치해석을 수행하고, 실험결과와 비교, 분석하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 두 개의 전자석에 자극을 같이하거나, 혹은 서로 다르게 하여 실험한 결과, 응답이 각각 다르게 나타나며 이는 전자력에 의한 시스템 강성이 변화하는데 기인함을 알 수 있었다.

(2) 전자력은 간극 변화에 따른 비선형 강성을 갖게되며 이는 외팔보의 실제 강성을 작게하는

효과가있어 외팔보의 고유진동수를 감소시키는 결과를 초래하였다.

(3) 전자력이 변위의 제곱에 반비례하고, 비선형 강성을 유발함으로써 외팔보의 응답은 1차 성분과 함께 2차, 4차의 배수 성분이 유도됨을 확인할 수 있었다.

(4) 자기장내 외팔보의 동적응답에 도약현상이 존재함을 보여줌으로서, 전자력이 있는 경우, 주어진 하나의 가진진동수에서 2개의 응답이 존재함을 확인할 수 있었다.

(5) 자극의 방향이 서로 같을 경우는 시스템 전체 강성곡선이 상하 대칭을 이루고, 자극의 방향이 서로 다른 경우는 비대칭임을 알 수 있었다.

(6) 전자력을 변화시키면서 외팔보의 응답을 보면 전자력이 클수록 고유진동수와 진동레벨의 감소 폭이 크고, 특히 자극이 서로 다른 경우에 감소 폭이 더욱 커졌다.

(7) 다중시간법으로 간극의 제곱에 반비례하는 전자력에 의해 1차, 2차, 4차 성분이 발생함을 확인할 수 있었다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(2000-2-30200-004-3) 지원으로 수행되었음.

참고문헌

- (1) Takag, T., Tani, J., Ruatto P., Krevet B., and Boccaccini L., 1996, "Numerical Evaluation of Natural Frequency Change of a Ferromagnetic Plate due to Magnetic Stiffness Effect," *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. 32, No. 3, pp. 1054~1057.
- (2) Takagi, T., Tan, J., Matsuda, S., and Kawamura S, 1992, "Analysis and Experiment of Dynamic Deflection of a Thin Plate with a Coupling Effect," *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. 28, No. 2, pp. 1259~1262.
- (3) Choi, Y. S., Lee, B. H., 2000, "Nonlinear Analysis of Beam with Impact," *Proc. KSNVE Autumn Annual Conference*, pp. 598~605.
- (4) Son, T. K., Kim, K. Y., You, W. H., and Park, Y. P., 1994, "A Study of Active Vibration

Isolation Using Electro-Magnetic Actuator," *Trans. KSME*, Vol. 18, No. 5, pp. 1169~1181.

- (5) Yohj. O, Kou-ich M, and Ken-ich. M, 1998, "Vibration Control of Thin Steel Sheet Using Flux Feedback Magnetic Actuator," *MOVIC, '98, Zurich, Switzerland*, Vol. 3, pp. 1057~1062.
- (6) Keisuke F., Takatsugu U., Kiyoshi W., 1996, "Electromagnets Applied to Thin Steel Plate," *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. 32, No. 5, pp. 5058~5060.
- (7) Nayfeh A., Balachandran B., 1995, "Applied Nonlinear Dynamics," John-Wiley, New York.