

# 회전관성과 전단변형을 고려한 수평 곡선보의 자유진동

## Free Vibrations of Horizontally Curved Beams with Rotatory Inertia and Shear Deformation

이 병 구<sup>†</sup> · 모 정 만\* · 이 태 은\*\* · 안 대 순\*\*\*

Lee Byoung Koo, Mo Jeong Man, Lee Tae Eun and Ahn Dae Soon

(2002년 9월 5일 접수 : 2002년 12월 18일 심사완료)

**Key Words** : Rotatory Inertia(회전관성), Torsional Inertia(비틀림관성), Horizontally Curved Beam(수평 곡선보), Shear Deformation(전단변형), Free Vibration(자유진동), Natural Frequency(고유진동수)

### ABSTRACT

The ordinary differential equations governing free vibrations of elastic horizontally curved beams are derived, in which the effects of rotatory inertia and shear deformation as well as the effects of both vertical and torsional inertias are included. Frequencies and mode shapes are computed numerically for parabolic curved beams with the hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped ends. Comparisons of natural frequencies between this study and ADINA are made to validate the theories and numerical methods developed herein. The lowest three natural frequency parameters are reported, with and without the effects of rotatory inertia and shear deformation, as functions of the three non-dimensional system parameters: the horizontal rise to span length ratio, the slenderness ratio and the stiffness parameter.

### 1. 서 론

수평 곡선보는 보, 기둥, 평판 등과 더불어 구조물을 형성하는 구조요소로서 기능적, 미적 측면이 함께 고려되어야 하는 각종 구조공학 관련분야에서 단위구조로 이용되고 있다. 특히 토목, 건축구조물 설계시에 주변 경관과 조화를 이루는 미관 설계가 대두되고 있는 현대사회에서는 많은 구조물에서 수평 곡선보의 이용이 날로 증가하는 추세이다. 지난 수십 년 동안 수평 곡선보에 대한 정적, 동적 거동에 관한 많은 연구가 이루어졌다. 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연

구는 회전관성, 비틀림관성 및 전단변형의 고려여부에 따른 해석모형의 정식화 과정을 다룬 연구,<sup>(1-3)</sup> 동일한 수학적 모형을 효율적으로 해석하기 위한 해석방법을 제시한 연구,<sup>(4-6)</sup> 수평 곡선보의 선형변화에 따른 해석모형의 정식화를 다룬 연구<sup>(7-9)</sup> 등으로 구분할 수 있다.

이 연구는 수평 곡선보의 해석모형의 정식화를 다룬 연구이다. 앞에서 언급한 이 등<sup>(3)</sup>의 논문은 원호형 수평 곡선보를 연구대상으로 하며, 본 연구에서는 변화곡률 수평 곡선보를 연구대상으로 한다. 따라서 이 연구는 문헌<sup>(3)</sup>의 미분방정식에 변화곡률 항을 추가한 매우 개선된 모형이다.

구조물이 자유진동하는 근본적인 요인은 관성력이다. 수평 곡선보의 자유진동 해석에서 가장 기본이 되는 관성력은 보의 면외 방향으로 발생하는 수직변위 관성력이다. 수평 곡선보는 변위에 의하여 단면회전과 축 비틀림이 발생하므로 자유진동 해석에서 회전관성과 비틀림관성은 자유진동의 정식화에 중요한

† 책임저자, 정회원, 원광대학교 토목환경도시공학부

E-mail : bkleest@wonkwang.ac.kr

Tel : (063) 850-6718, Fax : (063) 857-7204

\* 전주농림고등학교

\*\* 정회원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과

\*\*\* 정회원, 신한개발기술대 대표이사

요소들이다. 정확한 고유진동수를 산정하기 위해서는 이 두 관성력을 고려하는 것이 바람직하다. 자유진동 해석에서 중요한 요소 중에 하나인 전단변형은 정확한 응력-변위 관계를 자유진동 해석에 적용하려는 노력이다. 전단변형은 변위의 증가를 초래하여 고유진동수를 감소시키는 요인으로 알려져 있으므로, 전단변형을 고려하여 자유진동을 해석하는 것이 바람직하다. 이러한 관점에서 이 연구는 회전관성과 전단변형이 수평 곡선보의 자유진동에 미치는 영향을 분석하는데 연구목적이 있다.

보의 미소요소에 발생하는 합응력과 관성력들 사이의 동적 평형방정식을 이용하여 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도한다. 미분방정식에서 비틀림관성을 무시하면 비틀림 모드가 생략되므로 수직변위관성과 비틀림관성은 기본적으로 고려하고 여기에 회전관성과 전단변형의 효과를 추가로 도입한다. 유도된 상미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수와 진동형을 산출한다. 연구의 결과를 검증하기 위하여 구조해석용 범용 프로그램인 ADINA와 무차원 고유진동수를 비교한다. 변수연구를 통하여 보의 변수와 무차원 고유진동수사이의 관계를 토의하고, 전형적인 진동형에 대하여 고찰한다.

## 2. 수학적 모형

Fig. 1은 직교좌표계  $(x, y, v)$ 에 놓여있는 수평 곡선보의 형상과 제 변수를 나타낸다. 수평 곡선보는  $(x, y)$  평면 위에 있고 양단부는 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있다. 그림 하단에 나타낸 기호들은 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하는데 필요한 변수들이다.

Fig. 2는 자유진동하는 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력을 나타낸다.  $M$ 은 휨 모멘트,  $T$ 는 비틀림 모멘트,  $Q$ 는 전단력의 합응력을 나타내고,  $F_v$ 는 수직변위관성,  $C_\psi$ 는 회전관성,  $C_\phi$ 는 비틀림관성을 나타낸다. 미소요소에서 합응력과 관성력사이의 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$Q' - \rho F_v = 0 \quad (1)$$

$$M' - \rho Q + T + \rho C_\psi = 0 \quad (2)$$

$$M - T' + \rho C_\phi = 0 \quad (3)$$

위의 식에서 (')는 미분연산자  $d/d\theta$ 이다.

보의 미소요소는 질량을 갖고 있기 때문에 자유진동을 하면 관성력이 발생한다. 자유진동을 조화진동으로 가정하였으므로, 보의 동적 항들은  $\sin(\omega_i t)$ 에 비례한다. 여기서  $\omega_i$ 는 고유각진동수(rad/s)이고  $i$ 는 모드 번호이다. 자유진동에 의한 조화진동으로 인하여 질량을 갖고 있는 미소요소에 발생하는 보 축의 단위 길이당 관성력  $F_v$ ,  $C_\psi$ ,  $C_\phi$ 는 다음과 같다.

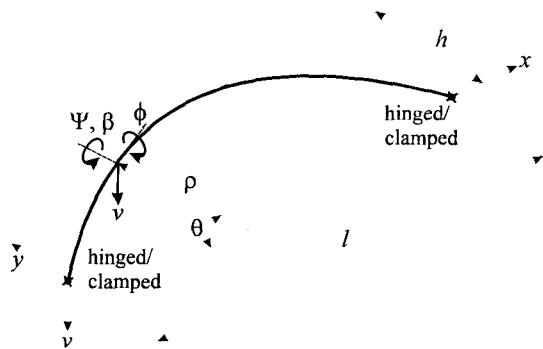
$$F_v = -\gamma A \omega_i^2 v \quad (4)$$

$$C_\phi = -\gamma I_p \omega_i^2 \phi \quad (5)$$

$$C_\psi = -R \gamma I \omega_i^2 \Psi \quad (6.1)$$

$$R = 1 : \text{회전관성을 고려하는 경우} \quad (6.2)$$

$$R = 0 : \text{회전관성을 무시하는 경우}$$



- $l$ : 지간길이
- $h$ : 수평높이
- $v$ : 수직변위
- $\Psi$ : 휨에 의한 단면 회전각
- $\beta$ : 전단변형 (전단에 의한 단면 회전각)
- $\phi$ : 비틀림 각
- $\rho$ : 곡률반경
- $\theta$ : 곡률반경과 수평축이 이루는 각도

Fig. 1 Geometry of beam and its variables

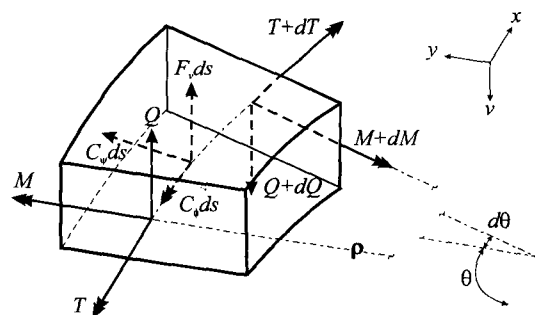


Fig. 2 Stress resultants and inertia forces

여기서  $\gamma$ 는 보 재료의 질량밀도,  $A$ 는 단면적,  $I_p$ 는 단면 극관성모멘트,  $I$ 는 단면 2차모멘트이다. 식 (6.1)에서  $R$ 은 회전관성의 고려여부를 나타내는 지표이며 그 내용은 위의 식 (6.2)와 같다.

변위에 의하여 단면에 발생하는  $M$ 과  $T$ 를  $\psi$ 와  $\phi$ 를 이용하여 응력-변위 관계를 나타내면 다음과 같다.<sup>(9)</sup>

$$M = EI\rho^{-1}(\phi - \psi') \quad (7)$$

$$T = GJ\rho^{-1}(\phi' + \psi) \quad (8)$$

여기서  $E, G$ 는 탄성계수, 전단탄성계수이고,  $J$ 는 비틀림 상수이다. 따라서  $EI$ 와  $GJ$ 는 각각 휨 강성과 비틀림 강성이다.

전단변형을 미분방정식에 고려하기 위하여  $\beta$ 를 이용하여  $Q$ 의 응력-변위 관계식을 유도한다. 전 단면 회전각  $dv/ds$ 는 순수 휨에 의한 단면 회전각  $\psi$ 와 전단변형  $\beta$ 로 이루어지므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{\rho d\theta} = \psi + \beta \quad (9)$$

식 (9)를  $\beta$ 에 대하여 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\beta = \rho^{-1}v' - \psi \quad (10)$$

전단력  $Q$ 는 식 (10)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q = kAG\beta = SkAG(\rho^{-1}v' - \psi) \quad (11.1)$$

$$\begin{aligned} S = 1 &: \text{전단변형을 고려하는 경우} \\ S = 0 &: \text{전단변형을 무시하는 경우} \end{aligned} \quad (11.2)$$

위에서  $k$ 는 단면형상계수이고,  $kAG$ 는 전단강도이다. 전단변형의 고려여부를 나타내는 지표를  $S$ 로 표시하고, 그 내용은 식 (11.2)와 같다.

식 (7), (8), (11.1)을  $\theta$ 에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$M' = EI\rho^{-1}[(\phi' - \psi'') - \rho^{-1}\rho'(\phi - \psi')] \quad (12)$$

$$T' = GJ\rho^{-1}[(\psi' + \phi'') - \rho^{-1}\rho'(\psi + \phi')] \quad (13)$$

$$Q' = SkAG(\rho^{-1}v'' - \rho^{-2}\rho'v' - \psi'') \quad (14)$$

미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \delta = v/l \quad (15 \sim 17)$$

$$f = h/l, \quad \zeta = \rho/l \quad (18,19)$$

$$\lambda = l/\sqrt{I/A}, \quad \lambda_p = l/\sqrt{I_p/A} \quad (20,21)$$

$$\varepsilon = GJ/(EI), \quad \mu = kG/E \quad (22,23)$$

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{\gamma A / (EI)} \quad (24)$$

여기서, 직교좌표계  $(x, y, v)$ , 수평높이  $h$ , 곡률반경  $\rho$ 는 지간길이  $l$ 로 정규화하였고,  $\lambda, \lambda_p$ 는 세장비 관련변수들,  $\varepsilon$ 은 강성변수,  $\mu$ 는 전단변수,  $c_i$ 는 무차원 고유진동수이다.

이상의 식들을 이용하여 회전관성과 전단변형을 고려한 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도한다. 식 (1)에 식 (4), (14)를 대입한 후에 무차원 변수식 (15)~(24)를 이용하고 고차항  $\delta''$ 에 대하여 정리하면 다음의 무차원 상미분방정식을 얻는다.

$$\delta'' = a_1 \delta' + Sa_2 c_1^2 \delta + a_3 \psi' \quad (25)$$

식 (2)에 식 (6.1), (8), (11.1), (12)를 대입한 후에 무차원 변수식 (15)~(24)를 이용하고 고차항  $\psi''$ 에 대하여 정리하면 다음의 무차원 상미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \psi'' = & Sa_1 \delta' + a_1 \psi' + (\varepsilon + Sa_5 \\ & + Ra_6 c_7^2) \psi + (1 + \varepsilon) \phi' + a_7 \phi \end{aligned} \quad (26)$$

식 (3)에 식 (5), (7), (13)을 대입한 후에 무차원 변수식 (15)~(24)를 이용하고 고차항  $\phi''$ 에 대하여 정리하면 다음의 무차원 상미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \phi'' = & -(1 + \varepsilon^{-1}) \psi' + a_1 \psi + a_1 \phi' \\ & + \varepsilon^{-1} (1 + a_8 c_7^2) \phi \end{aligned} \quad (27)$$

위의 무차원 상미분방정식 (25)~(27)에서  $R, S$ 는 회전관성 및 전단변형의 고려여부를 나타내는 지표이며 식 (6.2), (11.2)에 이미 정의하였다. 식 (25)~(27)에서 상미분방정식의 계수  $a_1 \sim a_8$ 은 다음과 같다.

$$a_1 = \zeta'/\zeta \quad (28.1)$$

$$a_2 = -\zeta^2/(\mu\lambda^2) \quad (28.2)$$

$$a_3 = \zeta \quad (28.3)$$

$$a_4 = -\mu\lambda^2\zeta \quad (28.4)$$

$$a_5 = \mu \lambda^2 \zeta^2 \quad (28.5)$$

$$a_6 = -\zeta^2 / \lambda^2 \quad (28.6)$$

$$a_7 = -\zeta' / \zeta \quad (28.7)$$

$$a_8 = -\zeta^2 / \lambda_p^2 \quad (28.8)$$

수평 곡선보가 원호형이면  $\zeta' = 0$  이므로 이를  $a_1 \sim a_8$  에 대입하면 Laskey<sup>(2)</sup>가 유도한 회전관성과 전단변형을 고려한 원호형 수평 곡선보의 상미분방정식으로 환원되어, 이 연구의 이론적 방법이 타당한 것을 알 수 있다.

보의 양단부는 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있으므로 이를 이용하여 경계조건을 유도한다. 회전지점 ( $x=0$  또는  $l$ )에서  $v = \phi = M = 0$ 임으로 무차원 변수를 이용하면 다음과 같은 무차원 경계조건들을 얻을 수 있다.

$$\delta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (29)$$

$$\phi = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (30)$$

$$\Psi' = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (31)$$

위의 식 (31)은 식 (7)로 표시된 휨 모멘트  $M=0$  을 나타낸다.

고정지점 ( $x=0$  또는  $l$ )에서  $v = \Psi = \phi = 0$ 이므로 무차원 변수를 이용하면 다음의 무차원 경계조건식을 얻는다.

$$\delta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (32)$$

$$\Psi = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (33)$$

$$\phi = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (34)$$

### 3. 형상함수

Fig. 1에 보인 직교좌표계 ( $x, y$ ) 위에 놓인 수평 곡선보의 선형은 일반 함수식  $y = y(x)$ 로 주어진다. 선형식이 주어지면 변수  $\theta$  및 계수  $a_1 \sim a_8$  에 포함되어 있는 형상함수  $\zeta$ 와  $\zeta'$ 를  $\xi$ 의 변수로 나타내어야 상미분방정식을 수치해석할 수 있다.

주어진  $y = y(x)$ 의 선형식은 식 (15), (16)의 무차원 변수를 이용하면 다음과 같은 무차원 선형식을 얻을 수 있다.

$$\eta = \eta(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (35)$$

위의 선형식에서 곡률반경과  $\xi$ 축이 이루는 각도  $\theta$

와 곡률반경  $\zeta$  및 미분  $\zeta'$ 은 수학적 정의에 의하여 다음 식들과 같이 산출할 수 있다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right) \quad (36)$$

$$\zeta = \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right]^{3/2} \left( \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right)^{-1} \quad (37)$$

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{d\xi} \frac{d\xi}{d\theta} \quad (38)$$

수평 곡선보의 선형식으로는 매우 다양한 식들이 가능하지만 자유진동의 수치해석 예제를 위하여 포물선 보를 택하였다. 수평높이  $h$ , 지간길이  $l$ 을 갖는 식 (35)와 같은 포물선의 무차원 선형식은 다음과 같다.

$$\eta = -4f\xi(\xi - 1), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (39)$$

식 (39)를 식 (36)~(38)에 적용하면 포물선 보에 대한 형상함수들을 다음과 같이  $\xi$ 의 변수로 나타낼 수 있다.

$$\theta = \pi/2 - \tan^{-1}[-4f(2\xi - 1)] \quad (40)$$

$$\zeta = 0.125f^{-1}[1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (41)$$

$$\zeta' = 1.5(2\xi - 1)[1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (42)$$

이상에서 포물선 보의 형상함수들을 이용하면, 임의  $\xi$ 좌표에서 계수  $a_1 \sim a_8$ 을 계산할 수 있다. 마찬가지로 이 연구에서 채택한 포물선 보 이외에 정현, 타원, 나선형 등의 형상함수들도 식 (35)~(38)을 이용하여 산정할 수 있다.

### 4. 수치해석 예제 및 토의

위에서 상미분방정식의 계수  $a_1 \sim a_8$ 이 계산되었으므로 상미분방정식 (25)~(27)과 경계조건식 (29)~(31) 또는 (32)~(34)를 이용하여 무차원 고유진동수  $c_i$  및 진동형  $\delta = \delta_i(\xi)$ ,  $\Psi = \Psi_i(\xi)$ ,  $\phi = \phi_i(\xi)$ 를 수치해석적 방법으로 산출할 수 있다.

이 연구에서 상미분방정식의 수치적분은 다른 방법과 비교하여 정확성이 매우 우수한 Runge-Kutta법을 이용하였고, 무차원 고유진동수  $c_i$ 를 산출하기 위해서는 행렬값 탐사법과 비선형 방정식의 해석법 중 하나인 Regula-Falsi법을 이용하였다. 자유진동 해석에서 이와 같은 수치해석 방법은 다수의 문헌들<sup>(9-11)</sup>

에서 이미 그 적합성이 입증되었다.

본 연구 결과의 타당성을 검증하기 위하여 구조해석용 범용 프로그램인 ADINA의 무차원 고유진동수와 본 연구의 결과를 Table 1에 수록하였다. 이 표의 하단에 수치해석에 사용한 수평 곡선보의 제원을 나타내었다. 이 표에서와 같이 두 결과의 차이는 약 2% 미만을 보이고 있어 본 연구의 이론적, 수치적 방법이 모두 타당함을 알 수 있다.

Table 2는 회전관성 ( $R$ )과 전단변형 ( $S$ )이 무차원 고유진동수  $c_i$ 에 미치는 영향을 나타낸 표이다. 회전관성과 전단변형의 고려여부를 나타내는 지표  $R, S$

는 식 (6.2), (11.2)에 정의되어 있다. 이 표의 하단에 수치해석에서 사용한 보의 제원을 나타내었다. 이 표에 나타난 바와 같이 회전관성과 전단변형은 고유진동수를 감소시키는 요인임을 알 수 있으며, 고차 모드보다는 저차 모드에서 그 영향력이 더 큰 것을 알 수 있다. 한편 이 표로부터 회전관성의 영향보다는 전단변형의 영향이 더 큰 것을 알 수 있어 자유진동 해석에서 전단변형 효과를 반드시 고려하여야 한다.

Fig. 3은  $\lambda=50, \lambda_p=22.5, \epsilon=1.06, \mu=0.32, R=S=1$ 인 경우에  $c_i$ 와  $f$ 의 관계곡선이다. 이 그림에서 수평높이 비  $f$ 가 증가하면 무차원 고유진동

Table 1 Comparisons of  $c_i$ \* between this study and ADINA

End constraint	$i$	Frequency parameter, $c_i$		Error (%)**
		This study	ADINA	
Both hinged ends	1	4.78	4.79	0.21
	2	28.35	28.38	0.11
	3	67.22	67.25	0.05
Hinged clamped ends	1	10.16	10.14	0.20
	2	37.15	36.96	0.51
	3	79.72	79.00	0.91
Both clamped ends	1	16.31	16.20	0.68
	2	46.83	46.23	1.30
	3	93.12	91.37	1.92

\*  $f=0.2, \lambda=75, \lambda_p=67, \epsilon=0.26, \mu=0.32, R=S=1$

\*\* Error(%)= $|1 - (\text{this study}/\text{ADINA})| \times 100$

Table 2 Effects of rotatory inertia ( $R$ ) and shear deformation ( $S$ ) on  $c_i$  for hinged-clamped ends\*

$f$	$R$	$S$	Frequency parameter, $c_i$		
			$c_1$	$c_2$	$c_3$
0.1	0	0	20.79	67.29	74.19
	1	0	20.69	66.29	73.27
	0	1	13.93	45.55	73.09
	1	1	13.90	45.22	73.09
0.2	0	0	16.46	56.57	73.98
	1	0	16.39	55.82	73.97
	0	1	11.05	38.41	73.20
	1	1	11.03	38.16	73.13
0.3	0	0	12.42	45.30	73.35
	1	0	12.38	44.78	73.27
	0	1	8.32	30.78	63.84
	1	1	8.31	30.61	63.25

\*  $\lambda=50, \lambda_p=22.5, \epsilon=1.06, \mu=0.32$

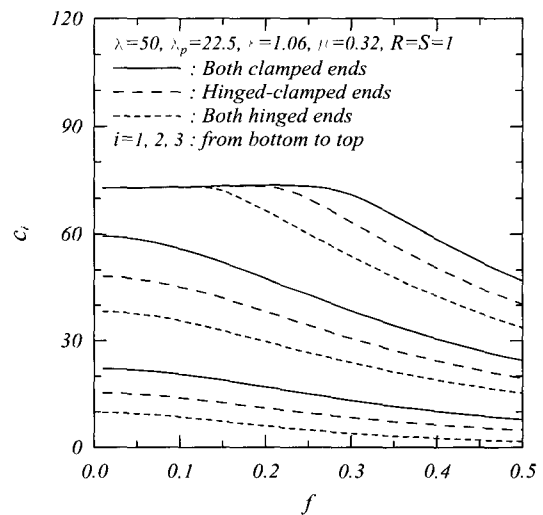


Fig. 3  $c_i$  versus  $f$  curves

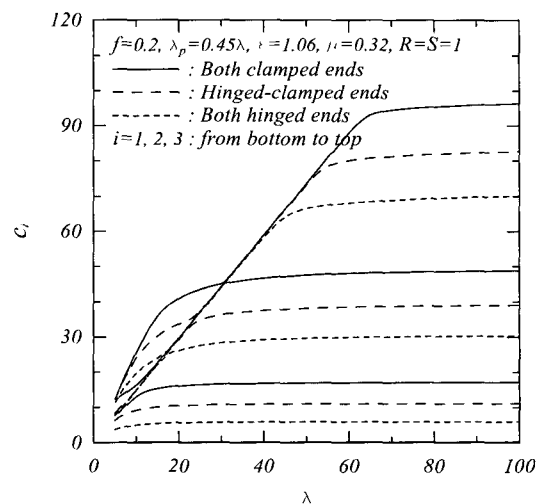


Fig. 4  $c_i$  versus  $\lambda$  curve

수  $c_i$ 는 감소한다. 이는  $f$  값이 증가하면 진동에 대한 수평 곡선보의 강성이 감소하기 때문으로 사료된다.

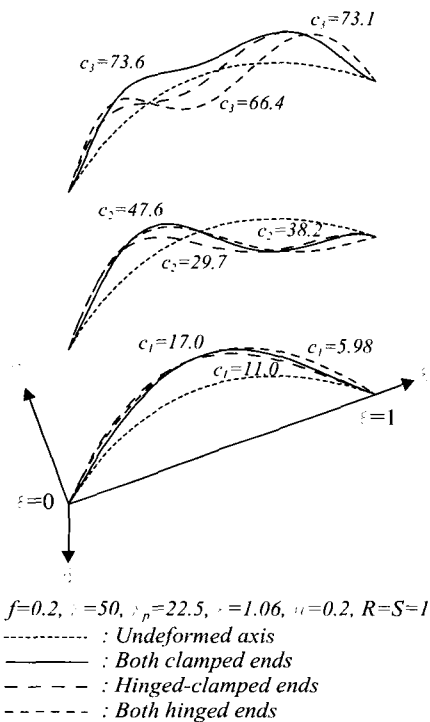
Fig. 4는  $f=0.2$ ,  $\lambda_p=0.45\lambda$ ,  $\epsilon=1.06$ ,  $\mu=0.32$ ,  $R=S=1$ 인 경우에  $c_i$ 와  $\lambda$ 의 관계곡선이다. 이 그림에서 세장비  $\lambda$ 가 증가하면 무차원 고유진동수  $c_i$ 는 증가하며,  $\lambda$ 가 일정 값에 도달하면 그 증가율은 0에 근접하여  $c_i$  값의 증가가 거의 없다. 또한 이상의

**Table 3** Effect of shear parameter  $\mu$  on  $c_i$  for both clamped ends\*

$\mu$	Frequency parameter, $c_i$			Ratio**
	$c_1$	$c_2$	$c_3$	
0.20	16.93	47.04	73.42	0.9962
0.25	16.94	47.32	73.51	0.9974
0.30	16.96	47.51	73.58	0.9983
0.35	16.96	47.64	73.62	0.9989
0.40	16.97	47.74	73.65	0.9993
0.45	16.98	47.82	73.68	0.9997
0.50	16.98	47.89	73.70	1.0000

\*  $f=0.2$ ,  $\lambda=50$ ,  $\lambda_p=22.5$ ,  $\epsilon=1.06$ ,  $R=S=1$

\*\* Ratio of each  $c_i$  to  $c_3$  of  $\mu=0.5$



**Fig. 5** Example of mode shapes

Table 1 및 Fig. 3, 4로부터 모든 무차원 고유진동수  $c_i$  값은 고정-고정, 회전-고정, 회전-회전 보의 순서로 크다.

Table 3은 전단변수  $\mu$ 가 무차원 고유진동수  $c_i$ 에 미치는 영향을 분석한 표이다. 이 표의 하단에 수치해석에 사용한 보의 제원을 나타내었다. 이 표에 보인 바와 같이  $\mu$ 가 증가하면  $c_i$ 도 증가하지만 그 영향력은 매우 작다. 즉, 이 표에서  $\mu=0.5$ 에 대한  $\mu=0.2$ 의  $c_3$ 의 비율은 0.9962에 불과하여 약 0.4% 영향을 보이고 있다. 따라서 자유진동해석에서 전단변수의 영향은 매우 크나  $\mu$  값의 크기는 무시하여도 좋다고 생각한다.

Fig. 5는  $f=0.2$ ,  $\lambda=50$ ,  $\lambda_p=22.5$ ,  $\epsilon=1.06$ ,  $\mu=0.32$ ,  $R=S=1$ 인 경우에 수직변위  $\delta$ 의 진동형을 나타낸다. 이러한 진동형으로부터 최대진폭 및 무변위의 위치 등을 알 수 있으므로 자유진동 특성 파악에서 매우 중요한 동적 자료 등을 제공해준다.

### 5. 결 론

이 논문은 회전관성과 전단변형을 고려한 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구이다. 보의 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력들 사이의 동적 평형방정식을 이용하여 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도 하였다. 상미분방정식을 수치해석하여 무차원고유진동수와 진동형을 산출하였다. 수치해석 예에서는 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 포물선 보를 택 하였다. 이 논문을 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

- (1) 이 논문에서 산출한 고유진동수는 ADINA의 결과와 매우 근접하였다.
- (2) 고유진동수는 고정-고정, 회전-고정, 회전-회전 보의 순서로 크다.
- (3) 회전관성과 전단변형은 고유진동수를 감소시키는 요인이다.
- (4) 전단변형이 회전관성보다 고유진동수에 미치는 영향이 더 크다.
- (5) 수평높이 비의 증가는 진동에 대한 강성을 감소시켜 고유진동수를 감소시킨다.
- (6) 세장비의 증가는 고유진동수를 증가시킨다.
- (7) 전단변수의 크기가 고유진동수에 미치는 영향

은 무시할 만하다.

이 연구에서 얻어진 결과들은 곡선 교량 등과 같은 구조물의 동적 해석에서 고유진동수와 진동형을 산출하는 데 그 유용성이 매우 기대된다.

### 참 고 문 헌

(1) Shore, S. and Chaudhuri, S., 1971, "Free Vibration of Horizontally Curved Beam," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 98, No. ST3, pp. 793 ~ 796.

(2) Laskey, A. J., 1981, *Out-of-plane Vibration of Continuous Circular Curved Beams Considering Shear Deformation and Rotatory Inertia*, M. S. Thesis, University of New Hampshire, USA.

(3) 이병구, 박광규, 오상진, 모정만, 1996, "회전관성과 전단변형을 고려한 연속곡선보의 자유진동 해석," *한국강구조학회논문집*, 제 8 권, 제 1 호, pp. 197 ~ 206.

(4) Howson, W. P., Jemah, A. K. and Zhou, J. Q., 1995, "Exact Natural Frequencies for Out-of-plane Structures Composed of Curved Members," *Computers & Structures*, Vol. 55, No. 6, pp. 989 ~ 995.

(5) Kang, K., Bert, C. and Striz, A., 1996, "Vibration Analysis of Horizontally Curved Beams

with Waping Using DQM," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 122, No. 6, pp. 657 ~ 662.

(6) 이병구, 1998, "직교좌표계에 의한 수평 현수 곡선보의 자유진동," *대한토목학회논문집*, 제 18 권, 제 3 호, pp. 303 ~ 311.

(7) Wang, T. M., 1975, "Fundamental Frequency of Clamped Elliptic Arcs for Vibration Outside the Plane of Initial Curvature," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 42, No. 4, pp. 515 ~ 519.

(8) Maurizi, M. J., Belles, P. M., Rossi, R. E. and Rossa, M. A., 1993, "Free Vibrations of Three-centered Arc Clamped at the Ends," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 161, No. 1, pp. 87 ~ 189.

(9) 이병구, 진태기, 이태은, 2002, "완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 자유진동," *한국소음진동공학회 논문집*, 제 12 권, 제 1 호, pp. 82 ~ 88.

(10) Lee, B. K., Oh, S. J. and Park, K. K., 2002, "Free Vibrations of Shear Deformable Circular Curved Beams Resting on Elastic Foundation," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 2, No. 1, pp. 77 ~ 97.

(11) Lee, B. K. and Wilson, J. F., 1989, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 1, pp. 75 ~ 89.