

## A Tight Bound for PDA-AI Performance

金國珉\* · 宋澤烈\*\* · 安祚榮\*\*\*

(Kook-Min Kim · Taek-Lyul Song · Jo-Young Ahn)

**Abstract** - In this paper, We propose a new target tracking filter which utilizes PDA-AI for data association in a clutter environment and also propose an analytic solution for ideal filter covariance which accounts for all the possible events in PDA-AI. Monte Carlo simulation for the proposed filter in a clutter environment indicates that the proposed analytic solution forms a tight lower bound for the error covariance of PDA-AI filter.

**Key Words** : Target tracking, PDA-AI, Monte Carlo simulation, Tight lower bound, Analytic solution

### 1. 서론

클러터가 있는 환경에서 validation gate 내에 존재하는 측정신호와 표적의 트랙을 결합하는 data association 방법 중에서 신호의 세기를 이용하는 방법으로 Strongest Neighbor(SN), Probabilistic Strongest Neighbor(PSN), Probabilistic Data Association with Amplitude Information (PDA-AI)방법이 있다. 이 중에서 SN방법은 측정신호 중에서 가장 신호의 세기가 큰 것을 표적으로 간주하여 트랙을 update하는 방법으로 SN을 표적신호로 단정적으로 선택하는 것이 되어 선택이 틀릴 경우에 다음주기에서 표적의 예상위치의 추정과 validation gate의 위치 및 크기 추정에 오류가 발생하여 트랙의 유지에 문제점이 발생할 수 있다. PSN방법은 SN을 표적으로 선택하면서 SN이 표적이 될 확률을 구해서 표적 트랙을 update하는데 가중치로 활용하는 방법이다. 또한 PDA-AI방법은 validation gate내의 모든 측정치의 위치와 신호의 세기를 이용하여 그 신호가 표적이 맞을 확률을 모두 구해서 트랙의 update에 가중치로 활용하여 표적의 상태변수 추정치는 물론 추정오차의 공분산을 계산하는 방법이다. 이들 중에서 PDA-AI가 알고리즘의 구현에 소요되는 계산량은 많으나 트랙유지성능은 우수한 것으로 알려져 있다. SN은 가장 적은 계산량을 가지나 트랙유지성능이 그다지 우수하지 않으며 PSN은 SN보다 계산량은 조금 증가하나 트랙유지성능은 우수한 것으로 알려져 있다. 이러한 성능 비교에는 다수의 몬테칼로 시뮬레이션을 통해

자료결합에 따른 표적추정오차의 공분산을 통해서 구하게 되며 이런 방법은 클러터의 공간밀도와 같은 변화에 대해서 많은 수의 시뮬레이션을 수행해야 하는 단점이 있다. 신호의 세기를 사용하지 않는 PDA 방법[4]의 해석적 방법에 의한 트랙유지성능분석을 제시한 논문이 발표되었으나[5,6] 확률의 계산이나 필터 공분산의 계산과정에서 gate내에 측정치가 한 개도 없을 경우를 고려치 않거나 필터 공분산의 계산에 필요한 수정항이 결여되어 있다. 이 논문은 gate가 유한하고 탐지확률이 1보다 작은 실제의 상황을 고려한 완벽한 자료결합을 수행할 경우에 얻을 수 있는 표적상태변수 추정오차 공분산의 크기를 해석적으로 구하는 방법을 제시하고 현재까지 가장 우수한 자료결합 방법으로 알려진 PDA-AI의 성능과 비교하고자 한다. 제안하는 방법은 지금까지 알려진 모든 자료결합방식으로 얻어지는 오차 공분산의 lower bound를 제공하게 되며 특히 PDA-AI에 대해서는 tight한 lower bound를 제공하게 된다. 따라서 이 방법은 실제의 클러터 환경에서 PDA-AI를 표적추적에 사용하기 전에 성능을 미리 유추해 볼 수 있는 자료를 제공한다.

### 2. PDA-AI

측정신호의 세기를 이용하여 gate내에 각각의 측정치가 표적이 맞을 확률을 구해서 트랙의 update 하는데 가중치로 사용되는 PDA-AI방법은 기존의 PDA[7]에서 사용하는 표적과 클러터의 위치정보에 부가하여 표적과 클러터 신호의 세기정보를 이용하여 확률적 가중치를 구하게 된다. 일반적으로 validation gate는 타원체  $R_r = [\nu_k : \nu_k^T S_k^{-1} \nu_k \leq \gamma]$  를 사용하며  $\nu_k = z_k - \bar{z}_k$ 의 필터잔여치(residual)로서  $n$ 개의 원소를 가지며 평균이 0이고 공분산이  $S_k$ 인 Gaussian 분포를 갖는다. validation gate의 부피  $V_G$ 는 위치추정치 차수  $n$ 에 따라

\* 準 會 員 : 漢陽大學校 工大 電子電氣制御計測工學科 碩士課程

\*\* 正 會 員 : 漢陽大學校 工大 電子컴퓨터工學部 教授, 工博

\*\*\* 正 會 員 : 國防科學研究所 策任研究員

接受日字 : 2002年 11月 4日

最終完了 : 2003年 5月 20日

$$V_G = C_n |S_k|^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{n}{2}} \quad (1)$$

으로 여기서  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = \pi$ ,  $C_3 = \frac{4}{3} \pi$  가 된다. 이러한 조건을 만족하는 validation gate를  $\sqrt{\gamma}$ 의 gate size를 갖는다고 한다. 다음과 같은 가정들이 PDA-AI의 유도에 사용된다.

A1) 측정신호의 세기  $a$ 는 센서의 matched filter의 출력으로써  $\chi^2$ 분포를 가지며 표적일 경우에는 SNR  $\rho$ 에 대해 확률밀도함수는

$$f_1(a) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{a}{1+\rho}} \quad (2)$$

로 표현되며 클러터일 경우에는

$$f_0(a) = e^{-a} \quad (3)$$

로 표현된다고 가정한다.

A2) 표적이 탐지될 확률은  $P_D$ 이며 gate내에 존재할 확률은  $P_G$ 로 나타내고 표적의 개수  $m^T$ 는 기껏해야 1개이다.

A3) gate 내의 클러터의 개수  $m^F$ 는 Poisson 분포를 가진다.

$$P(m^F = m) = \mu(m) = \frac{(\lambda V_G)^m}{m!} e^{-\lambda V_G} \quad (4)$$

여기서  $V_G$ 는 gate의 부피를 뜻한다.

A4) 표적의 예측상태변수 추정오차  $\bar{e}_k = x_k - \hat{x}_k$ 는 평균이 0이고 공분산이  $\bar{P}_k$ 인 가우시안 프로세스이다.

A5) 클러터들은 gate내에서 서로 독립적이며 uniform분포를 한다.

A6) 클러터의 위치와 신호세기는 표적신호와 확률적으로 독립이며 다른 시간대의 측정신호와 독립적이다.

A7) 신호의 세기는 위치와 독립적이다.

A8) 표적은 perceivable 하다

참고로 신호의 세기가 (2)와 (3)의 확률밀도함수로 표현될 때에는 표적의 신호가 정해진 문턱값  $\tau$ 를 넘어서 탐지될 확률인  $P_D = \exp(-\tau/(1+\rho))$ 가 되며 클러터가 gate내에 측정치로 탐지될 확률  $P_{fa} = \exp(-\tau)$ 이다.

A1)~A7)의 가정하에 gate내의  $m$ 개의 측정치들이 표적이 될 확률을 구하여 표적상태변수의 update 과정에서 확률적인 자료결합방법인 PDA-AI를 사용하는 추적필터 알고리즘을 소개하고자 한다. 이 추적필터의 알고리즘은 기존의 필터알고리즘[4]과 달리 표적이 존재하며 탐지될 수 있다는 Perceivability[8]의 가정 A8)이 추가되어 gate내에 측정치가 한 개도 존재하지 않을 경우 ( $M_0$ )나 gate내에서  $m$ 개의 측정치가 모두 클러터일 경우 ( $M_F$ )에 기존의 알고리즘에서처럼 update과정에서 예측오차 공분산을 그대로 사용하지 않는다. 이는 표적이 perceivable하다는 것은 표적이 존재하지 않거나 장애물에 의해 일시적으로 탐지불능 상태에 있는

경우와는 달리 표적이 gate내부에 존재하지만 탐지되지 않았을 경우와 gate외부에 존재하는 경우를 모두 나타내기 때문이다.[1,2,3] Validation gate 내부에 존재하는  $m$ 개의 측정치들은 각각 위치와 세기정보로 구성되어 있으며 PDA-AI의 확률산출에는 위치와 세기정보를 모두 사용하게 되고 필터에서 추정하는 표적의 상태변수에 update 하는데는 위치정보만을 잔여치 계산에 사용한다.  $k$ 순간의 측정치  $y_k$ 는 위치  $z_k$ 와 신호의 세기  $a_k$ 로 구성되어 있으며 이러한  $y_k$ 가 validation gate내에  $m$ 개 존재하고 있다. 즉

$$y_{k,i} = \begin{pmatrix} z_{k,i} \\ a_{k,i} \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (5)$$

$i$ 번째 측정치의 residual을  $\nu_{k,i}$ 라 표현하면 이  $\nu_{k,i}$ 는 그 측정치가 표적으로부터 얻어졌다는 가정 하에서는 평균이 0이고 공분산이  $S_k$ 인 가우시안 분포를 하게 되어  $\nu_{k,i} \sim N(\nu_{k,i}; 0, S_k)$ 로 나타낼 수 있다. 이러한 내용을 배경으로  $i$ 번째의 측정치가 표적일 확률  $\beta_i$ 는 PDA-AI[4]에서는 다음 식을 만족한다.(현재의 시간을 나타내는  $k$ 는 특별히 지칭하지 않는 한 생략함)

$$\beta_i = \frac{P_D N(\nu_i; 0, S) \Lambda_i}{\lambda(1 - P_D P_G) + P_D \sum_{j=1}^m N(\nu_j; 0, S) \Lambda_j} \quad (6)$$

여기서

$$\Lambda_j = \frac{P_{fa} f_1(a_j)}{P_D f_0(a_j)} \quad (7)$$

또한 모든  $m$ 개의 측정치가 클러터일 확률  $\beta_0$ 는  $\beta_0 = 1 - \sum_{i=1}^m \beta_i$ 가 된다. PDA는 PDA-AI와는 달리 신호의 세기정보를 자료결합에 사용하지 않아서 PDA의  $\beta_i$ 는 (6)식의  $\Lambda_j$ 나  $\Lambda_i$ 대신에 1을 대입한 것과 같다. 따라서 PDA-AI는 현재시간  $t=k$ 에서의 신호의 세기 특성을 자료결합에 사용하여 신호의 세기에 대해서 단순히 탐지가 될 확률만을 고려하는 PDA보다 현재의 실제 상황에 더욱 적용된 확률을 얻을 수 있는 장점이 있으며 PDA를 사용할 때보다 트랙유지성능이 개선된다는 점이 알려져 있다.

이러한 PDA-AI를 사용하고 표적이 perceivable하다는 A8)의 가정으로 update과정에서 표적상태변수 추정오차 공분산을 기존의 알고리즘[4]으로부터 수정한 필터 알고리즘은 다음과 같이 요약될 수 있다. 이 필터는 [2,3]의 방법으로 공분산을 수정하는 것이지만 PDA-AI와 연계한 결과를 제시하는 것은 이 논문이 처음이라고 판단된다. 여기서  $\Phi$ 는 상태전이행렬,  $Q$ 는 공정잡음의 공분산,  $H$ 는 측정행렬)

### PDAF-AI 알고리즘

#### Prediction step

$$\bar{X}_k = \Phi X_{k-1}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_k &= \Phi P_{k-1} \Phi^T + Q_{k-1} \\ K &= \bar{P}_k H^T (H \bar{P}_k H^T + R_k)^{-1} = \bar{P}_k H^T S^{-1} \end{aligned}$$

**Update step**

① validation gate내에 측정치가 한 개도 없을 경우 ( $M_0$ )

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k$$

$$P_k = \bar{P}_{k, M_0} = \bar{P}_k - KSK^T + \frac{(1 - P_D P_G C_r)}{1 - P_D P_G} KSK^T \quad (8)$$

$$C_r = \frac{\int_0^r q^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{q}{2}} dq}{n \int_0^r q^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{q}{2}} dq} \quad (9)$$

$$P_G = \frac{n C_n}{2^{\frac{n}{2}+1} \pi^{\frac{n}{2}}} \int q^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{q}{2}} dq \quad (10)$$

②  $m \neq 0$ 일 때 ( $\bar{M}_0$ )

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K \sum_{i=1}^m \beta_i \nu_i$$

$$\bar{P}_{k, M_F} = \bar{P}_k - KSK^T + \frac{(1 - P_D P_G C_r)}{1 - P_D P_G} KSK^T$$

$$P_k = \beta_0 \bar{P}_{k, M_F} + (1 - \beta_0) (\bar{P}_k - KSK^T) + K \left[ \sum_{i=1}^m \beta_i \nu_i \nu_i^T - \nu \nu^T \right] K^T \quad (11)$$

$$\nu = \sum_{i=1}^m \beta_i \nu_i$$

**3. 해석적 방법에 의한 공분산 산출**

Validation gate내의  $m$ 개의 측정치를 나열하는데 편의상 Normalized Distance Squared(NDS)가 가장 작은값을 가지는 측정치부터 1번부터  $m$ 번까지의 번호를 부치자. NDS는 그 측정치의 위치정보  $z$ 와 gate의 중심인  $\bar{z}$ 로부터 얻어지는 잔여치  $\nu$ 와 그의 공분산  $S$ 를 이용하여

$$D = \nu^T S^{-1} \nu \quad (12)$$

로 정의한다.  $D$ 로 둘러싸이는 타원체의 부피  $V_D$ 는  $V_D = C_n |S|^{\frac{1}{2}} D^{\frac{n}{2}}$  으로 표현된다.  $1 \leq m < \infty$  개의 측정치 중에서 NDS가 가장 작은 첫 번째 측정치가 표적이 맞다는 가설 ( $M_T^1$ )하에서  $D$ 와  $a$ 의 조건부 확률밀도 함수는[1]과 A7)로부터 (과거의 위치정보의 집합을 모은  $Z_{k-1}$ 이 주어졌다는 조건은 지칭하지 않는 한 생략함)

$$\begin{aligned} f(D_1, a_1 | M_T^1) &= \frac{1}{P(M_T^1)} f(D_1, a_1, M_T^1) \\ &= \frac{1}{P(M_T^1)} \frac{n V_{D_1}}{2 D_1} N(D_1) f_1(a_1) \mu_{D_1}(0) 1(\gamma - D_1) 1(a_1 - \tau) \quad (13) \end{aligned}$$

으로 표현되며 (13)에서  $\mu_{D_1}(0)$ 는 첫 번째 측정치의 NDS인  $D_1$ 로 형성되는 타원체의 부피  $V_{D_1}$ 내에 클러터가 한 개도

없다는 것을 나타내며 이는 (4)로부터  $\mu_{D_1}(0) = e^{-\lambda V_{D_1}}$  임을 알 수 있다.  $N(D)$ 는  $\nu$ 의 함수인  $N(\nu; 0, S)$ 의 가우시안 확률밀도함수를 NDS인  $D$ 의 함수로 변환시킨 것이다.  $1(x)$ 는 단위 step함수로서  $x \geq 0$ 일 때 1, 그렇지 않으면 0의 값을 갖는다. 또한  $P(M_T^1)$ 은  $1 \leq m < \infty$ 의 측정치들 중 첫 번째 측정치가 표적으로부터 얻어졌다는 가설  $M_T^1$ 이 맞을 확률을 나타내며 이는 (13)의  $f(D_1, a_1, M_T^1)$ 이 정의된 모든 영역에 대해 적분을 함으로 얻을 수 있다. 즉  $P(M_T^1)$ 은

$$P(M_T^1) = \int_0^r \int_r^\infty f(D_1, a_1, M_T^1) da_1 dD_1 \quad (14)$$

임을 알 수 있다.

일반적으로  $1 \leq m < \infty$ 의 측정치들 중에서  $l$ 번째 측정치가 표적이 맞다는 가설 ( $M_T^l$ )하에서  $D_l$ 과  $a_l$ 의 조건부 확률밀도함수는

$$\begin{aligned} f(D_l, a_l | M_T^l) &= \frac{1}{P(M_T^l)} f(D_l, a_l, M_T^l) \\ &= \frac{1}{P(M_T^l)} \frac{n V_{D_l}}{2 D_l} N(D_l) f_1(a_l) \mu_{D_l}(l-1) 1(\gamma - D_l) 1(a_l - \tau) \quad (15) \end{aligned}$$

이 된다. 여기서  $\mu_{D_l}(l-1) = \frac{(\lambda V_{D_l})^{l-1}}{(l-1)!} e^{-\lambda V_{D_l}}$  이며  $P(M_T^l)$ 은 (14)와 같은 방법으로 얻을 수 있다. 이와 같은 방법으로 gate내에 존재할 수 있는  $1 \leq m < \infty$ 개의 측정치가 표적이 맞을 확률  $P(M_T^l)$ ,  $l=1, 2, \dots, \infty$ 가 얻어진다.

**정리 1 :**  $P(M_T^l)$ ,  $l=1, 2, \dots, \infty$  를 모두 합한 확률  $P(M_T)$ 는  $P_D P_G$ 가 되며 gate내에 있는  $1 \leq m < \infty$  개의 모든 측정치가 모두 클러터일 가설  $M_F$ 가 맞을 확률은  $P(M_F) = (1 - P_D P_G)(1 - \mu(0))$  를 만족하며, gate내에 측정치가 하나도 없는  $M_0$ 의 확률은  $P(M_0) = (1 - P_D P_G)\mu(0)$  를 만족한다.

**증명:** 부록 참조

위의 정리 1에 의해  $P(M_F)$ 와  $P(M_0)$ 를 합할 경우  $1 - P_D P_G$ 가 된다. 따라서  $P(M_T) + P(M_F) + P(M_0) = 1$ 이 되고 가능한 모든 경우를 고려한 것이 된다. 참고로 PDA나 PDA-AI는  $y_k$ 가 입수된 후에 gate내에 입수된 측정치의 개수  $m$ 으로  $M_0$ 나  $\bar{M}_0$ 로 판별한 후 그 시점에 해당하는 하나의 경우에 대해서만 update를 수행하는 과정을 거침으로 그 시점에 생길 수 측정치의 개수  $0 \leq m < \infty$ 를 취급할 수 없으며  $P(M_T) + P(M_F) + P(M_0) = 1$ 의 특성을 가질 수 없다. 따라서 PDA나 PDA-AI의 성능은 몬테칼로 시뮬레이션에 의존하는 것이 일반적인 방법이다. 이상을 내용을 바탕으로 표적상태변수의 예측추정치  $\bar{x}_k$ 와 update과정을 거친 추정치  $\hat{x}_k$ 의 오차 공분산을 구해보자. 우선  $\bar{e}_k = x_k - \bar{x}_k$ ,  $\hat{e}_k = x_k - \hat{x}_k$ 로 정의하고 다음의 정리 2, 3를 고려해보자.

**정리2** ; 가정 A1)-A8)을 만족하는 클러터 환경의 단수표적 추적상황에서 생길 수 있는 모든 경우의 확률인  $P(M_T^l)$ ,  $l=1,2,\dots,\infty$ ,  $P(M_F)$ ,  $P(M_0)$ 를 이용하여 자료결합을 하는 이상적인 표적추적필터의 예측오차 공분산은 아래 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \bar{P}_k &= E[\bar{e}_k \bar{e}_k^T | Z_{k-1}] \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \bar{P}_{k, M_T^l} P(M_T^l) + \bar{P}_{k, M_F} P(M_F) + \bar{P}_{k, M_0} P(M_0) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서  $\bar{P}_{k, M_T^l} = E[\bar{e}_k \bar{e}_k^T | M_T^l, Z_{k-1}]$

$$= \bar{P}_k - KSK^T + \alpha_l KSK^T$$

$$\alpha_l = \frac{P_D C_n}{P(M_T^l) 2^{\frac{n}{2}+1} \pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\tau} q^{\frac{n}{2}} e^{-(\lambda V_q + \frac{\alpha}{2})} \frac{\lambda^{l-1} V_q^{l-1}}{(l-1)!} dq$$

$$V_q = C_n |S|^{\frac{1}{2}} q^{\frac{n}{2}}. \quad (17)$$

**증명:** 부록 참조

정리 2의  $\sum_{l=1}^{\infty} \bar{P}_{k, M_T^l} P(M_T^l)$  을  $\bar{P}_k^{M_T}$ 로 표현하고 이를 계산하면

$$\bar{P}_k^{M_T} = (\bar{P}_k - KSK^T) P_D P_G + P_D P_G C_{\tau} KSK^T \quad (18)$$

가 됨을 알 수 있으며 여기서  $C_{\tau}$ 와  $\bar{P}_{k, M_F} = \bar{P}_{k, M_0}$ 은 (8)에 정의되어 있다.

**정리3** ; 가정 A1)-A8)을 만족하는 클러터 환경의 단수표적 추적상황에서 생길 수 있는 모든 경우의 확률인  $P(M_T^l)$ ,  $l=1,2,\dots,\infty$ ,  $P(M_F)$ ,  $P(M_0)$ 를 이용하여 자료결합을 하는 이상적인 표적추적필터의 update과정을 거친  $\hat{e}_k$ 의 공분산의  $Z_{k-1}$ 에 대한 조건부 기대치는 아래 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k, k} &= E[\hat{e}_k \hat{e}_k^T | Z_{k-1}] \\ &= (\bar{P}_k - KSK^T) P_D P_G + \bar{P}_{k, M_F} P(M_F) + \bar{P}_{k, M_0} P(M_0) \\ &= \bar{P}_k - P_D P_G C_{\tau} KSK^T \end{aligned} \quad (19)$$

**증명:** 부록 참조

정리 2에서 update과정후의 필터의 추정오차공분산을 구하는데  $Z_{k-1}$ 을 사용하는 것은 [1]  $z_k$ 가 주어졌을때의  $\hat{e}_k$ 의 공분산의 계산에는 (9)와 같이 PDA나 PDA-AI를 사용하는 추적필터 알고리즘에서 보듯이 측정치들의 잔여치  $v_l$ 들이 공분산의 계산에 나타나게 되어 어떠한 하나의 특별한 경우를 표현하는 것이 되고 그 상황이  $M_0$  또는  $\bar{M}_0$ 로 분리가 되어  $M_0$ 와  $\bar{M}_0$ 를 동시에 확률적으로 취급할 수 없으며 측정치의 개수로 한정적으로 정해지기 때문에 생길 수 있는 모든 개수를 취급할 수 없기 때문이다.  $Z_{k-1}$ 을 사용하는 경우는  $z_k$ 가 얻어진 후의 상황을 모두 고려하며  $Z_{k-1}$ 의

자료를 바탕으로 각각의 상황에서의 오차공분산을 구하여 이들을 확률적으로 결합시킨 것이다. 이 논문에서 제시하는 이상적인 표적추적필터의 공분산을 계산하는 과정을 요약하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \bar{P}_k &= \Phi \bar{P}_{k-1, k-1} \Phi^T + Q_{k-1} \\ K &= \bar{P}_k H^T (H \bar{P}_k H^T + R_k)^{-1} \\ \bar{P}_{k, k} &= \bar{P}_k - P_D P_G C_{\tau} KSK^T \end{aligned}$$

이 논문의  $\bar{P}_{k, k}$ 는 여러 형태의 필터의 성능을 분석할 때 사용되는 추정오차공분산의 계산에 표준칼만필터나 [1]이 제시하는  $P_D \neq 1$  때의 칼만필터의 공분산보다 더욱 실제 값에 가까운 bound를 제시하고 있다.

#### 4. 시뮬레이션 결과

이 장에서는 2차원의 클러터 환경에서 단수의 표적을 추적하는 경우에 대해서 몬테칼로 시뮬레이션에 의한 PDAF-AI의 표적위치추정오차의 공분산의 산출결과를 해석적 방법에 의해 얻어진  $\bar{P}_{k, k}$ 와 비교하고자 한다. 특히 이 논문이 제시한  $\bar{P}_{k, k}$ 가 여러 자료결합 방법 중에서 가장 우수한 트랙유지성능을 가지는 것으로 알려진 PDA-AI에 의한 추정오차 공분산의 tight한 lower bound의 역할을 할 수 있는지를 검토하고 표적추적의 변수인  $P_D, P_G, \lambda, \rho$  등의 변화에 대해 많은 수의 시뮬레이션을 수행해야 하는 몬테칼로 방법을 한번의 계산으로 결과를 얻는 해석적 방법으로 대체 가능한가를 검토하고자 한다.

표적추적 시나리오상의 표적은 초기위치 (7Km, 4Km)에서 380m/sec의 속도로 30°의 방향각으로 직선운동하고 있고 이를 기술하는 필터의 동력학 모델은 표적의 가속도를 Singer model로 구성한다. 따라서 표적의 위치, 속도, 가속도로 구성된 상태변수  $x$ 는

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 \\ 0_2 & 0_2 & -\frac{1}{\tau} I_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0_2 \\ 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} \quad (20)$$

를 만족하며 위 식에서  $1/\tau$ 는 표적가속도의 bandwidth이고  $(w_x, w_y)^T$ 는 공정잡음 프로세스로서 평균이 0이고 psd가  $0.533 I_2 m^2/sec^5$ 인 백색 가우시안이다. 위치 측정치는  $z_k = (I_2, 0_2, 0_2)x_k + v_k$ 으로 기술되며 측정잡음 시퀀스  $v_k$ 는 평균이 0이며 공분산이  $(20)^2 m^2 I_2$ 이다. 표적추적의 주기는 0.1sec.으로 가정했다. 그림 1~그림 4은  $P_D = 0.7$ ,  $SNR \rho = 10$ 의 경우에 클러터의 공간밀도  $\lambda$ 가 각각 0.00005, 0.0001, 0.0002, 0.0003일 때 300회의 몬테칼로 시뮬레이션의 결과로 얻어진 PDAF-AI의 표적의  $X$ 위치 추정오차 공분산값과 해석적 방법에 의한 상응한  $\bar{P}_{k, k}$ 를 나타낸 것으로  $\lambda$ 가 작을수록  $\bar{P}_{k, k}$ 가 tight한 lower bound를 형성하는 것을 보여주고 있다.

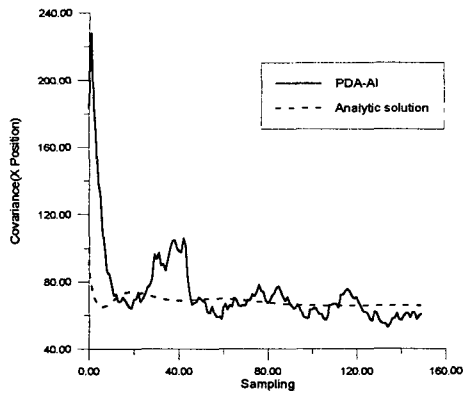


그림 1  $P_D=0.7, \rho=10, \lambda=0.00005$ 에 대한 오차공분산  
Fig. 1 Error Covariances for  $P_D=0.7, \rho=10, \lambda=0.00005$

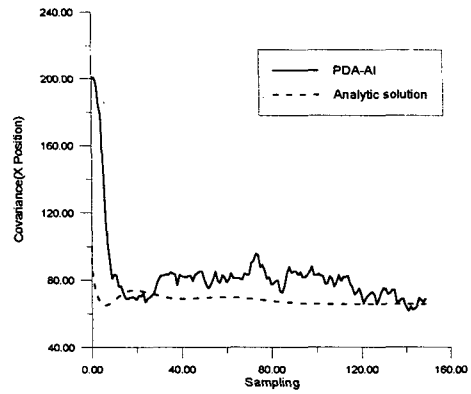


그림 4  $P_D=0.7, \rho=10, \lambda=0.0003$ 에 대한 오차공분산  
Fig. 4 Error Covariances for  $P_D=0.7, \rho=10, \lambda=0.0003$

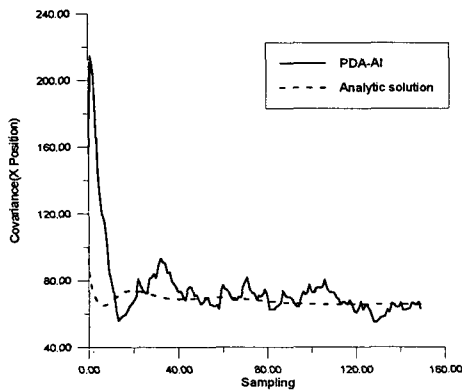


그림 2  $P_D=0.7, \rho=10, \lambda=0.0001$ 에 대한 오차공분산  
Fig. 2 Error Covariances for  $P_D=0.7, \rho=10, \lambda=0.0001$

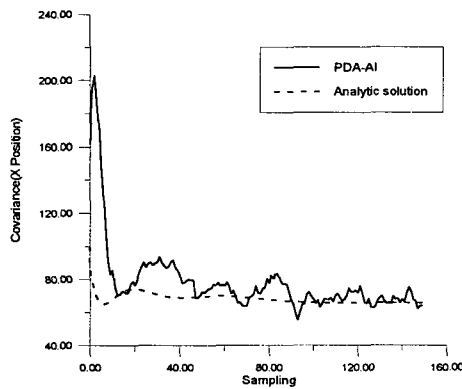


그림 3  $P_D=0.7, \rho=10, \lambda=0.0002$ 에 대한 오차공분산  
Fig. 3 Error Covariances for  $P_D=0.7, \rho=10, \lambda=0.0002$

그림 5~그림 6은  $\rho=10, \lambda=0.0003$ 인 경우에  $P_D=0.8, P_D=0.9$ 인 경우를 보여주는 것으로  $P_D$ 가 증가할수록 더욱 tight한 lower bound를 형성함을 알 수 있다. 참고로 PDA-AI의 공분산 계산 결과가 방법에 의해 계산된 공분산 보다 작아지는 경우가 있는 것은 몬테칼로 시뮬레이션 방법이 가지는 단점인 불충분한 시뮬레이션 횟수에 의한 오차로 판단된다. 여기에 수록하지는 않았지만 같은  $P_D, \lambda$ 에 대해서  $\rho$ 가 증가할수록 더욱 tight한 lower bound의 역할을 함을 알 수 있다. 이러한 결과들은 계산이 간단한  $\bar{P}_{k,k}$ 로써 실제 클러터 환경에 PDA-AI를 적용하지 전에 미리 PDA-AI의 트랙유지성능을 유추해 볼 수 있음을 나타내주고 있다.

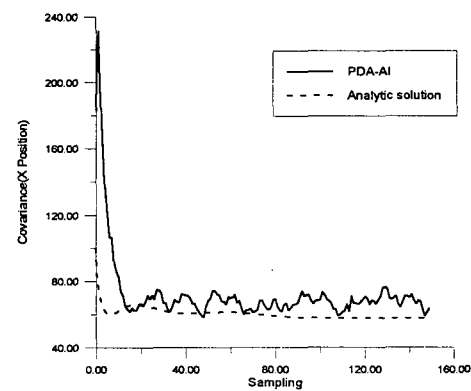


그림 5  $P_D=0.8, \rho=10, \lambda=0.0003$ 에 대한 오차공분산  
Fig. 5 Error Covariances for  $P_D=0.8, \rho=10, \lambda=0.0003$

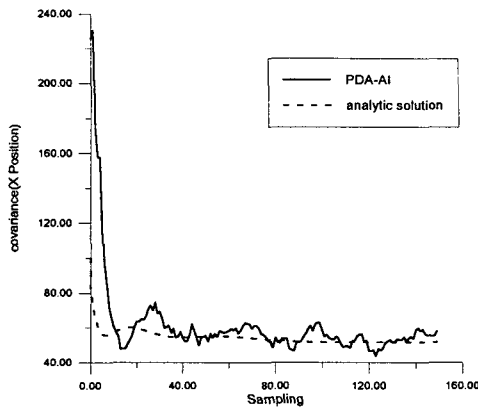


그림 6.  $P_D=0.9$ ,  $\rho=10$ ,  $\lambda=0.0003$ 에 대한 오차공분산

Fig. 6 Error Covariances for  $P_D=0.9$ ,  $\rho=10$ ,  $\lambda=0.0003$

### 3. 결 론

이 논문에서는 perceivable 표적이라는 가정하에서 update 과정에서의 기존의 필터들의 표적상태변수 추정오차 공분산을 수정하고 PDA-AI의 자료결합방법을 사용하는 PDAF-AI 알고리즘을 소개했다. 또한 클러터 환경에서 단수의 표적을 추적하는 경우에 발생할 수 있는 모든 경우를 확률로 산출하여 확률적인 자료결합을 수행하는 이상적인 표적추적필터의 오차공분산을 해석적으로 구하는 방법을 제안하여 트랙유지성능이 가장 우수하다고 알려진 PDA-AI의 몬테칼로 시뮬레이션에 의한 공분산 값과 비교했다. 시뮬레이션 결과 제시하는 해석적 방법이 PDA-AI의 tight한 lower bound를 형성함을 알 수 있으며 간단한 계산으로 추정오차 공분산의 계산이 가능한 해석적 방법을 통해서 클러터 환경에서 PDA-AI의 트랙유지성능을 유추해 볼 수 있음을 알 수 있었다.

### 부 록

#### A. 정리 1의 증명

$P(M_T')$ 은 (14)의  $P(M_T')$ 을 구하는 방법을 (15)의  $f(D_l, a_l, M_T')$ 에 적용하여 구하면

$$P(M_T') = \int_0^\tau \int_\tau^\infty f(D_l, a_l, M_T') da_l dD_l$$

$$= P_D \int_0^\tau \frac{nV_{D_l}}{2D_l} N(D_l) \mu_{D_l}(l-1) dD_l \quad (A-1)$$

이 된다. 그러면 이러한  $P(M_T')$ 을 모두 합한  $P(M_T)$ 는 아래 식을 만족한다.

$$P(M_T) = \sum_{l=1}^{\infty} P(M_T')$$

$$= P_D \int_0^\tau \frac{nV_D}{2D} N(D) \sum_{l=1}^{\infty} \mu_D(l-1) dD$$

$$= P_D \int_0^\tau \frac{nV_D}{2D} N(D) e^{-\lambda V_D} \left(1 + \frac{\lambda^2 V_D^2}{2!} + \frac{\lambda^3 V_D^3}{3!} + \dots\right) dD$$

$$= P_D \int_0^\tau \frac{nV_D}{2D} N(D) dD \quad (A-2)$$

$$= P_D P_G$$

여기서 적분의 dummy variable  $D_l$ 은  $D$ 로 바꾸어 표현했다.  $P(M_F)$ 는 표적이 gate외부에 있거나 내부에 있어도 탐지가 되지 않는 상황에서 클러터가 1개부터  $\infty$ 개까지 존재할 모든 경우를 나타낸 것으로

$$P(M_F) = (1 - P_D P_G)(\mu(1) + \mu(2) + \dots + \mu(\infty))$$

$$= (1 - P_D P_G)(1 - \mu(0)) \quad (A-3)$$

으로 표현할 수 있다. 여기서  $1 - P_D P_G$ 는 표적이 gate내부에 있으나 탐지되지 않을 확률  $(1 - P_D)P_G$ 와 표적이 gate외부에 있을 확률  $1 - P_D$ 를 합한 값이다. 또한  $P(M_0)$ 의 계산은  $M_0$ 의 경우와 같은 상태이고 클러터가 gate내에 없을 경우를 나타내는 것임을 고려하면  $P(M_0) = (1 - P_D P_G)\mu(0)$ 가 된다.

#### B. 정리 2의 증명

우선  $\bar{P}_{k, M_T'}$ 는 정의에 의해

$$\bar{P}_{k, M_T'} = E[\bar{e}_k \bar{e}_k^T | M_T', Z_{k-1}]$$

$$= \int_{\Omega_{\bar{e}}} \bar{e}_k \bar{e}_k^T f(\bar{e}_k | M_T', Z_{k-1}) d\bar{e}_k \quad (A-4)$$

이 되며 여기서  $f(\bar{e}_k | M_T', Z_{k-1})$ 은 Bayes' rule[9]로부터

$$f(\bar{e}_k | M_T', Z_{k-1})$$

$$= \int_{V_c} f(\bar{e}_k | \nu_l, M_T', Z_{k-1}) f(\nu_l | M_T', Z_{k-1}) d\nu_l \quad (A-5)$$

여기서  $\nu_l$ 은  $M_T'$  하에서  $l$ 번째 측정치의 잔여치를 나타내며  $\nu_l$ 은 NDS로 쉽게 전환시킬 수 있다.  $f(\nu_l | M_T', Z_{k-1})$ 은 (12)에서  $D_l$ 을  $\nu_l$ 로 전환하고  $a_l$ 에 대해서는  $\tau \leq a_l < \infty$ 의 구간에서 적분을 수행함으로써 구하게 된다. 결과는

$$f(\nu_l | M_T', Z_{k-1})$$

$$= \frac{P_D}{P(M_T')} N(\nu_l; 0, S) \mu_{D_l}(l-1) 1(\nu_l; R_\gamma) \quad (A-6)$$

가 된다. 여기서  $1(\nu_l; R_\gamma)$ 은 단위 step 함수로  $\nu_l$ 이 gate  $R_\gamma$  내에 있을 때 1의 값을 가지고 그렇지 않을 때 0의 값을 갖는다. (A-5)식에서  $f(\bar{e}_k | \nu_l, M_T', Z_{k-1}) \sim N(\bar{e}_k; K\nu_l, \bar{P}_k - KSK^T)$ 와 같게 되어 [1] (A-5)를 (A-4)

에 대입하여  $\bar{P}_{k, M_T}$  을 정리하면

$$\begin{aligned} & \bar{P}_{k, M_T} \\ &= \int_{V_G} (\bar{P}_k - KSK^T + K_l \nu_l \nu_l^T K^T) f(\nu_l | M_T, Z_{k-1}) d\nu_l \\ &= \bar{P}_k - KSK^T + \int_{V_G} K \nu_l \nu_l^T K^T f(\nu_l | M_T, Z_{k-1}) d\nu_l \quad (A-7) \end{aligned}$$

$f(\nu_l | M_T, Z_{k-1})$ 은  $\nu_l$  을  $V_G$  전체에 대해 적분 할 경우 1 이 되어  $\nu_l$  에 독립적인  $\bar{P}_k - KSK^T$  은 적분의 외부로 빠져나가게 되었고 (A-7)의 적분의 계산에는 다음과 같은 공식[1]이 이용된다.

$$\begin{aligned} & \int_{V_G} K \nu \nu^T K^T N(\nu; 0, S) d\nu \\ &= \left( \frac{1}{n} \int_{V_G} \nu^T S^{-1} \nu N(\nu; 0, S) d\nu \right) KSK^T \\ &= \frac{1}{n} \left[ \frac{n C_n}{2^{\frac{n}{2}+1} \pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^r q^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{q}{2}} dq \right] KSK^T \quad (A-8) \end{aligned}$$

따라서 (A-6)와 (A-8)을 (A-7)에 대입하면 (17)의  $\bar{P}_{k, M_T}$  이 얻어진다. 또한 이를 이용한  $\bar{P}_k^{M_T}$  는 (17)을 이용하여

$$\begin{aligned} \bar{P}_k^{M_T} &= \sum_{l=1}^{\infty} \bar{P}_{k, M_T} P(M_T^l) \\ &= (\bar{P}_k - KSK^T) \sum_{l=1}^{\infty} P(M_T^l) + \left( \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l P(M_T^l) \right) KSK^T \quad (A-9) \end{aligned}$$

을 얻는다. (9),(10)의  $C_{\tau}$ 와  $P_G$ 를 이용하면 위 식은 마지막 항을 정리

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l P(M_T^l) \\ &= P_D \frac{C_n}{2^{\frac{n}{2}+1} \pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^r q^{\frac{n}{2}} e^{-\left(\lambda V_G + \frac{q}{2}\right)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\lambda V_G)^{l-1}}{(l-1)!} dq \\ &= P_D \frac{C_n}{2^{\frac{n}{2}+1} \pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^r q^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{q}{2}} dq = P_D P_G C_{\tau} \quad (A-10) \end{aligned}$$

이 됨을 알 수 있고 정리 1의 결과를 이용하면 (A-9)의  $\bar{P}_k^{M_T}$ 는 (18)을 만족함을 알 수 있다. 따라서 정리 2의 (16)을 (18)과 (8)의  $\bar{P}_{k, M_0}, \bar{P}_{k, M_F} = \bar{P}_{k, M_0}$ 를 이용하면 예측 공분산  $\bar{P}_k$  가 됨을 알 수 있다.

**C. 정리 3의 증명**

우선  $M_T^l$ 의 경우 conditional expectation의 nesting property[9]에 의해

$$\begin{aligned} E[\hat{e}_k \hat{e}_k^T | M_T^l, Z_{k-1}] &= E[E[\hat{e}_k \hat{e}_k^T | M_T^l, Z_k] | Z_{k-1}] \\ &= \bar{P}_k - KSK^T \quad (A-11) \end{aligned}$$

임을 알고  $M_F$ 와  $M_0$ 의 경우에는  $\hat{e}_k = \bar{e}_k$ 이므로 각각  $E[\hat{e}_k \hat{e}_k^T | M_F, Z_{k-1}] = \bar{P}_{k, M_F}, E[\hat{e}_k \hat{e}_k^T | M_0, Z_{k-1}] = \bar{P}_{k, M_0}$ 를 만족한다. 따라서  $\bar{P}_{k, k}$ 는

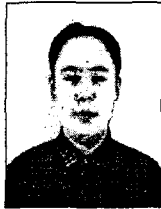
$$\begin{aligned} & \bar{P}_{k, k} \\ &= (\bar{P}_k - KSK^T) \sum_{l=1}^{\infty} P(M_T^l) + \bar{P}_{k, M_F} P(M_F) + \bar{P}_{k, M_0} P(M_0) \\ &= (\bar{P}_k - KSK^T) P_D P_G + \bar{P}_{k, M_F} P(M_F) + \bar{P}_{k, M_0} P(M_0) \quad (A-12) \end{aligned}$$

로서 (8)식의  $\bar{P}_{k, M_0}$ 와  $\bar{P}_{k, M_F}$ 는 같음을 이용하면 (A-12)는 (19)식과 같음을 보일 수 있다.

**참 고 문 헌**

- [1] X. R. Li, "Tracking in clutter with strongest neighbor measurements-Part I: Theoretical analysis," IEEE. Trans. on Automatic Control, Vol. 43, No. 11, Nov. 1998.
- [2] X. R. Li and X. Zhi "PSNF : A refined strongest neighbor filter for tracking in clutter," Proceedings of the 35th CDC, Kobe Japan, Dec. 1996.
- [3] K. J. Rhee and T. L. Song, "A probabilistic strongest neighbor filter algorithm based on numbers of validated measurements," JSASS, Yokohama, Oct. 2002.
- [4] D. Lerro and Y. Bar-Shalom, "Interacting multiple model tracking with target amplitude feature," IEEE Trans. on AES, Vol. 29, No. 2, Apr. 1993.
- [5] T. E. Fortmann et al, "Detection thresholds for tracking in clutter-a connection between estimation and signal processing," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-30, No. 3, Mar. 1985.
- [6] X. R. Li and Y. Bar-Shalom, "Stability evaluation and track life of the PDAF for tracking in clutter," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-36, No. 5, May. 1995.
- [7] Y. Bar-Shalom and T. E. Fortmann, "Tracking and Data Association," Academic Press, New York, 1988.
- [8] N. Li and X. R. Li, "Target perceivability and its applications," IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 49, No. 11, Nov. 2001.
- [9] A. Papoulis and S.U.Pillai, "Probability, Random Variables, and Stochastic Process," 4th ed., The McGraw Hill co., 2002.

저 자 소 개



**김 국 민 (金 國 珉)**

1975년 4월 11일생. 2001년 한양대 전자컴퓨터공학부 졸업. 2003년 동 대학원 전자전기제어계측공학과 석사과정 졸업  
Tel : 031-400-4051, Fax : 031-407-2756  
E-mail : kmkimkorea@hanmail.net



**송 택 렬 (宋 澤 烈)**

1952년 8월 28일생. 1974년 서울대 공학사. 1981년 Univ. of Texas at Austin 항공우주공학과 석사. 1983년 Univ. of Texas at Austin 항공우주공학과 박사. 1974~1995년 국방과학연구소. 1995년~현재 한양대 전자컴퓨터공학부 교수. 관심분야는 유도제어, 표적상대추정 등  
Tel : 031-400-5217, Fax : 031-407-2756  
E-mail : tsong@hanyang.ac.kr



**안 조 영 (安 祚 榮)**

1953년생. 1976년 서울대 공학사. 1987년 한국과학기술원(KAIST) 공학석사. 1976~현재 국방과학연구소. 관심분야는 추정이론과 응용, 제어시스템 설계 등  
Tel : 042-821-4412  
Fax : 042-821-2224  
E-mail : jyahn@add.re.kr