

새로운 블럭펄스 적분연산행렬을 이용한 비선형계 최적제어

論 文

52D-4-2

Optimal Control of Nonlinear Systems Using The New Integral Operational Matrix of Block Pulse Functions

曹永鎬* · 沈在先**

(Young-ho Cho · Jae-sun Shim)

Abstract - In this paper, we presented a new algebraic iterative algorithm for the optimal control of the nonlinear systems. The algorithm is based on two steps. The first step transforms nonlinear optimal control problem into a sequence of linear optimal control problem using the quasilinearization method. In the second step, TPBCP(two point boundary condition problem) is solved by algebraic equations instead of differential equations using the new integral operational matrix of BPF(block pulse functions). The proposed algorithm is simple and efficient in computation for the optimal control of nonlinear systems and is less error value than that by the conventional matrix. In computer simulation, the algorithm was verified through the optimal control design of synchronous machine connected to an infinite bus.

Key Words : BPF (block pulse function), integral operational matrix (적분연산행렬), TPBCP (2점 경계치 문제)

1. 서 론

현대 사회가 산업화됨에 따라 첨단기술이 복합된 시스템들이 운용되기 시작하면서 이들에 포함된 비선형 요소에 대한 정밀한 제어의 필요성이 대두되고 있기 때문에 비선형계의 제어이론에 대한 많은 연구가 진행되고 있다[1]-[6]. 비선형계의 제어를 위한 방법으로 비선형성의 영향을 허용할 수 있는 동작범위로 제한시켜 선형근사화하고 선형계 이론을 적용하여 최적제어를 구현하는 부분 선형화방법이 많이 연구되어 왔다. 이러한 선형화방법으로는 테일러 급수방법, 좌표변환방법, 제한 선형화방법 등이 있으나 이 또한 공칭점의 선정이 어렵고 공칭점에 따라서 해석 및 제어 결과가 달라지고 비선형성이 강한 시스템일 경우 효과적인 제어가 어려운 단점이 있다[2][4][5]. 따라서 준선형화기법, 경사기법, 극점변환기법 등 같은 2점 경계치문제로 경계조건을 초기치와 최종치로 나누어 어느 한 경계조건이나 궤적을 추정해서 수치해석방법으로 해를 구하여 비선형계의 최적제어를 설계하는 연구가 많이 이루어졌다. 특히 이 중에서 일반적으로 많이 이용되고 있는 비선형계의 최적제어기법은 수치해석에 바탕을 둔 준선형화기법을 들 수 있다. 그러나 기존의 방법은 비선형 해밀토니안 방정식에 준선형기법을 적용하여 방정식의 해를 구하여 최적화 문제를 해결하였다. 이러한 방법은 어느 한 경계조건으로 시스템의 상태와 상호상태(costate)의 궤적을 추측함으로써 비선형 방정식의 해를 구하게 됨으로 초기 상

태와 상호상태의 궤적을 어떻게 추측하느냐에 따라 이 알고리즘의 수렴성이 결정된다. 그러나 시스템의 상태는 제어 시스템 대상의 특성을 고려하여 추측할 수 있으나 상호상태의 궤적은 추측하기가 매우 어려운 것으로 알려져 있다. 또한 비선형 방정식을 풀기 위해 동차해(homogeneous solution)와 비동차해(nonhomogeneous solution)에 대한 궤적을 저장하게 됨으로 많은 컴퓨터 저장용량을 필요로 하는 문제점을 갖는다[1][11].

1970년대 이후 블럭펄스 함수는 월쉬(Walsh) 또는 하알(Haar)함수 등의 직교함수보다 연산이 간단하기 때문에 선형 시변계와 비선형계 등의 제어문제 등에 널리 이용되어 왔다[6]-[10]. 블럭펄스 함수를 이용하여 시스템 문제를 해결하는데 있어서 가장 중요한 문제중의 하나는 블럭펄스 함수의 적분 연산행렬에 의하여 적분된 함수 값이 실제 적분 함수 값에 근접하도록 오차를 줄이는 것이라 할 수 있다. 그러나 기존 적분 연산행렬에 의하여 얻어진 적분함수의 계수는 특정 구간에서 적분함수의 평균 면적과 같게 되므로 함수 값이 곡선인 구간에는 오차의 크기가 커지게 되는 단점이 있다[8][10].

본 논문에서는 기존의 블럭펄스 적분 연산행렬이 곡선 구간에서 갖는 오차를 줄이기 위하여 라그랑지 3차 보간법을 이용하여 적분된 함수에 대하여 근사함수를 얻으므로 기존의 행렬이 곡선부분에서 갖는 오차를 줄인 새로운 적분연산행렬을 이용하였다. 또한 준선형화 기법을 이용하여 비선형 시스템의 최적제어기를 설계시 해밀토니안 방정식에 적용함으로써 발생하였던 문제들을 없애기 위하여 주어진 비선형 최적화문제에 대하여 공칭 상태궤적과 공칭 제어입력을 중심으로 준선형화 기법을 이용하여 평가함수와 비선형 상태방정식을 전개하여 비선형 최적화 문제를 선형 시변 형태로

* 正 會 員 : 韓 國 航 空 宇 宙 產 業 (株) 先 任 研 究 員 · 工 博

** 正 會 員 : 三 陟 大 學 校 電 氣 工 學 科 教 授 · 工 博

接 受 日 字 : 2002 年 9 月 8 日

最 終 完 了 : 2003 年 2 月 15 日

표현된 최적화문제의 반복 형태로 변환시켰다. 그리고 선형 시변 시스템에 대한 최적제어의 구현에 있어서, 행렬 리카티 (Riccati) 미분방정식의 해를 구해야 하는 문제를 포함하고 있는데 본 연구에서는 라그랑지 보간법을 의하여 얻어진 새로운 블럭펄스 적분 연산행렬을 도입하여 리카티 방정식의 해를 대수 연립방정식으로부터 결정할 수 있는 알고리즘을 개발·합성하였다. 여기서 얻어진 상태와 입력에 대한 계수 값은 다음 단계의 준선형화 기법으로 평가함수와 비선형 상태방정식을 전개하는데 사용되어진다. 그러므로 예측하기 어려운 상호상태의 제적을 추측하거나 비선형 해밀토니안 방정식을 풀기 위해 필요했던 메모리 소모를 줄일 수 있는 새로운 비선형 최적제어 알고리즘을 제시하였다.

2. 블럭펄스 함수

블럭펄스 함수는 구형파의 형태로 1과 0의 값만을 취하는 함수의 집합으로 구성되며, 구간 $t \in [0, t_f]$ 에서 식(2.1)과 같이 정의되며 식(2.2)식(2.3)과 같은 특성을 갖고 있다 [6]-[10].

$$\psi_i(t) = \begin{cases} 1, & i\Delta t \leq t < (i+1)\Delta t \\ 0, & \text{그외 구간} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\psi_i(t) \psi_j(t) = \begin{cases} \psi_i(t), & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\int_0^{t_f} \psi_i(t) \psi_j(t) dt = \begin{cases} \Delta t, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.3)$$

단, $i, j = 1, 2, \dots, m$: m 은 전개항수, $\Delta t = \frac{t_f}{m}$ 구간 $t \in [0, t_f]$ 에서 적분 가능한 임의 함수 $f(t)$ 는 m 개의 블럭펄스 함수로 다음과 같이 유한급수 전개할 수 있다 [6]-[8].

$$f(t) \cong \sum_{i=1}^m f_i \psi_i(t) \quad (2.4)$$

$$f_i = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{t_f} f(t) \psi_i(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} f(t) dt \quad (2.5)$$

블럭펄스 함수의 적분 연산행렬은 다음과 같이 주어진다.[6]

$$\int_0^t \Psi(\tau) d\tau \cong P \Psi(t) \quad (2.7)$$

단, $\Psi(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{m-1}(t), \psi_m(t)]^T$ (2.8)

$$P = \frac{\Delta t}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

기존의 적분 연산행렬에 의하여 적분된 함수의 블럭펄스 계수는 구간 $(i-1)\Delta t$ 와 $i\Delta t$ 에서 적분된 함수의 평균값 이므로 커브인 구간에서는 오차가 커지게 된다[8]. 그러므로 라그랑지 보간법을 이용하여 $t_0 = (i-3)\Delta t, t_1 = (i-2)\Delta t, t_2 = (i-1)\Delta t, t_3 = i\Delta t$ 의 네 점을 지나는 적분함수에 대한 근사 함수를 구하고, 그 함수에 대한 블럭펄스 계수를 구함으로써 더 작은 오차를 갖는 새로운 적분 연산행렬을 아래와 같이 얻을 수 있다[10].

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = F^T \overline{P} \Psi(t) \quad (2.10)$$

여기서

$$F^T = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{m-1} \ f_m] \quad (2.11)$$

$$\overline{P} = \frac{\Delta t}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{23}{12} & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & \frac{9}{12} & \frac{7}{3} & \frac{23}{12} & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{12} & \frac{7}{3} & \frac{23}{12} & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{9}{12} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{9}{12} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

3. 블럭펄스 함수를 이용한 비선형 최적제어

3.1 비선형 최적제어

본 절은 준선형화 기법을 이용하여 비선형 최적화문제를 반복적인 선형 최적화 문제로 변환하는 과정을 기술하고자 한다. 다음과 같은 일반적인 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

여기서 $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$

위와 같은 시스템을 구속조건으로 최소화할 평가 함수는 다음과 같이 선정하였다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (3.2)$$

단, $Q \geq 0, R > 0$

공칭 상태궤적 (x^h)과 제어입력 (u^h)이 $t \in [0, t_f]$ 에서 알려진 궤적이라고 하면 준선형화에 의하여 다음과 같은 연속적인 선형 시스템 형태 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{x}^{(h+1)}(t) = A(t) x^{(h+1)}(t) + B(t) u^{(h+1)}(t) + G(t) \quad (3.3)$$

여기서,

$$x^{(h+1)}(0) = x_0$$

$$G(t) = f(x^h, u^h, t) - A(t)x^h(t) - B(t)u^h(t) \quad (3.4)$$

$$A(t) = \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x(t)} \Big|_{x^h, u^h} \quad (3.5)$$

$$B(t) = \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u(t)} \Big|_{x^h, u^h} \quad (3.6)$$

h 는 반복횟수를 나타낸다.

이때 또한 평가함수는 다음과 같이 선정하자.

$$J^{h+1} = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^{(h+1)T}(t) Q x^{(h+1)}(t) + u^{(h+1)T}(t) R u^{(h+1)}(t)) dt \quad (3.7)$$

h 번째 상태제적과 최적 입력은 공칭 제적이므로 식(3.3)의 시스템은 선형 시변 시스템이고 비선형 항인 $G(t)$ 가 시변 형태로 포함되어 있다. 이 항은 명령신호로 선형 시스템에 영향을 줌으로 비선형 특성을 추종하게 한다. 식(3.3)~식(3.7)의 형태로 표현된 시스템의 최적제어 입력을 결정하는 필요조건은 Euler-Lagrange 방정식에 의하여 다음과 같이 얻을 수 있다[1]-[7].

$$\dot{x}^{(h+1)}(t) = A(t)x^{(h+1)}(t) + B(t)u^{(h+1)}(t) + G(t) \quad (3.8)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -Qx^{(h+1)}(t) - A^T(t)\lambda(t) \quad (3.9)$$

$$u^{(h+1)}(t) = -R^{-1}B^T(t)\lambda(t) \quad (3.10)$$

여기서 $x(0) = x_0, \lambda(t_f) = 0$ 이다.

식(3.8)~식(3.10)을 이용하여 해밀토니안 방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^{(h+1)}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}B^T(t) \\ -Q & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(h+1)}(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

식(3.11)과 같이 주어진 2점 경계치 문제(two point boundary condition problem)를 풀어서 한시적인 최적입력인 식(3.10)을 구할 수 있다. 얻어진 최적상태와 입력이 다음과 같은 오차 식을 만족하면 비선형 시스템의 최적 상태와 제어입력으로 간주한다.

$$\text{Error} = \|x^{(h+1)} - x^{(h)}\| \leq \text{허용오차} \quad (3.12)$$

만약 식(3.12)의 오차 식을 만족하지 않으면 얻어진 상태와 입력을 다음 단계의 공칭제적으로 갱신한다. 그래서 새롭게 갱신된 공칭제적을 이용하여 다음 단계의 준선형화 기법에 적용하여 새롭게 개선된 선형 시변 형태의 상태방정식 식(3.3)을 만든다. McGill과 Kenneth는 식(3.1)이 연속이고, 식(3.5)와 식(3.6)이 Lipschitz조건을 만족하며 초기 추측 값이 실제 해에 충분히 가깝다면 식(3.12)의 오차는 수렴함을 증명하였다[1].

반복 횟수를 표시하는 첨자 h 는 표기상 간편을 위해 생략하고 식(3.8)과 식(3.9)를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\text{여기서 } L = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}B^T(t) \\ -Q & -A^T(t) \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

식(3.13)의 해를 구하기 위해서 상태전이 행렬을 다음과 같이 정의하자.

$$\Phi(t_f, t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_f, t) & \Phi_{12}(t_f, t) \\ \Phi_{21}(t_f, t) & \Phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

이 상태전이 행렬은 다음과 같은 특성을 갖는다.

$$\frac{d}{dt} \Phi(t_f, t) = -\Phi(t_f, t)L \quad (3.15)$$

$$\Phi(t_f, t_f) = I \quad (3.16)$$

상태전이 행렬을 이용하여 식(3.13)의 해를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t_f, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} G(\tau) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \quad (3.17)$$

여기서 적분 식으로 표현된 부분을 다음과 같이 표현하고

$$\begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} \triangleq \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} G(\tau) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \quad (3.18)$$

식(3.17)을 정리하면

$$x(t_f) = \Phi_{11}(t_f, t)x(t) + \Phi_{12}(t_f, t)\lambda(t) + V_1(t) \quad (3.19)$$

$$\lambda(t_f) = \Phi_{21}(t_f, t)x(t) + \Phi_{22}(t_f, t)\lambda(t) + V_2(t) \quad (3.20)$$

이고, 또한 경계 조건은 $\lambda(t_f) = 0$ 이므로 식(3.20)에 대입하여 $\lambda(t)$ 에 대하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= -\Phi_{22}^{-1}(t_f, t)\Phi_{21}(t_f, t)x(t) - \Phi_{22}^{-1}(t_f, t)V_2(t) \\ &\triangleq K(t)x(t) + s(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

여기서 $K(t)$ 는 Riccati 방정식의 해이면 $s(t)$ 는 개루프 보상 벡터이다. 또한 최적제어 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}B^T\lambda(t) \\ &= -R^{-1}B^TK(t)x(t) - R^{-1}B^Ts(t) \\ &\triangleq H(t)x(t) + T(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

여기서 $H(t)$ 는 케환이득 행렬이고 $T(t)$ 는 명령신호로써 시스템의 파라미터와 비선형항 $G(t)$ 에 영향을 받는다. 위에서 구한 식을 식(3.13)에 대입하면 식(3.23)과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + Z(t) \quad (3.23)$$

단,
$$F(t) = A(t) + B(t) R^{-1} B^T(t) K(t) \quad (3.24)$$

$$Z(t) = B(t) R^{-1} B^T(t) s(t) + G(t)$$

상태전이 행렬과 $V_2(t)$ 값으로부터 $K(t)$ 와 $s(t)$ 값을 구해서 식(3.23)의 해를 구함으로써 식(3.22)에 의하여 최적 제어 입력을 구할 수 있다.

3.2 블럭펄스 함수를 이용한 최적제어

앞 절에서 선형 시변 시스템에 대한 최적 상태와 입력을 얻기 위해서는 식(3.11)과 같은 2점 경계치 문제를 해결해야 한다. 그러므로 본 절에서는 블럭펄스 함수의 적분 연산행렬을 이용해 간단한 대수 반복 연산만으로 2점 경계치 문제를 해결할 수 있는 일반화된 반복 알고리즘을 제시하고자 한다.

식(3.15)의 양변에 역방향 적분을 취하면

$$I - \Phi(t_f, t) = L \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) d\tau \quad (3.25)$$

이고, $\Phi(t_f, t)$ 을 블럭펄스 함수로 전개하면 다음과 같다.

$$\Phi(t_f, t) \cong \sum_{k=1}^m \varphi_k \Psi_k(t) \quad (3.26)$$

단,
$$\varphi_k = \begin{bmatrix} \varphi_{11k} & \varphi_{12k} \\ \varphi_{21k} & \varphi_{22k} \end{bmatrix}$$

식(3.25)에 새로운 블럭펄스 적분연산행렬을 적용하면 다음과 같은 일반화된 반복 알고리즘으로부터 상태전이 행렬을 구할 수 있다.

$$\varphi_m = [I - \frac{1}{2} \Delta t L]^{-1} \quad (3.27)$$

$$\varphi_{m-1} = [I - \frac{9}{24} \Delta t L]^{-1} \quad (3.28)$$

$$\varphi_{m-2} = [I - \frac{9}{24} \Delta t L]^{-1} \left[I + \frac{28}{24} \Delta t L \varphi_{m-1} \right] \quad (3.29)$$

$$\varphi_k = [I - \frac{9}{24} \Delta t L]^{-1} \left\{ \left[I + \frac{19}{24} \Delta t L \right] \varphi_{k+1} - \frac{5}{24} \Delta t L \varphi_{k+2} + \frac{1}{24} \Delta t L \varphi_{k+3} \right\} \quad (3.30)$$

단, $k = m-3, m-4, \dots, 1$

비선형 항인 $G(t)$ 와 $V_2(t)$ 를 블럭펄스 함수로 전개하면

$$G(t) \cong \sum_{k=1}^m g_k \Psi_k(t) \quad (3.31)$$

$$V_2(t) \cong \sum_{k=1}^m v_{2k} \Psi_k(t) \quad (3.32)$$

이고, 식(3.18)에 블럭펄스 함수를 적용하면 다음과 같은 대수 형태의 식을 얻을 수 있다.

$$v_{2m} = \frac{1}{2} \Delta t \varphi_{21m} g_m \quad (3.29)$$

$$v_{2m-1} = \frac{3}{8} \Delta t \varphi_{21m-1} g_{m-1} \quad (3.30)$$

$$v_{2m-2} = \frac{1}{24} \Delta t (28 \varphi_{21m-1} g_{m-1} + 9 \varphi_{21m} g_m) \quad (3.31)$$

$$v_{2k} = v_{2k+1} + \frac{1}{24} \Delta t (\varphi_{21k+3} g_{k+3} - 5 \varphi_{21k+2} g_{k+2} + 19 \varphi_{21k+1} g_{k+1} + 9 \varphi_{21k} g_k) \quad (3.32)$$

단, $k = m-3, m-4, \dots, 1$

$K(t)$ 와 $s(t)$ 를 블럭펄스 함수로 전개하면

$$K(t) \cong \sum_{k=1}^m K_k \Psi_k(t) \quad (3.34)$$

$$s(t) \cong \sum_{k=1}^m s_k \Psi_k(t) \quad (3.35)$$

이고, 계수 값은 다음과 같이 상태전이 행렬의 계수 값들로 표현된다.

$$K_k = \phi_{22k}^{-1} \phi_{21k} \quad (3.36)$$

$$s_k = \phi_{22k}^{-1} v_k \quad (3.37)$$

$Z(t), F(t), A(t)$ 그리고 $B(t)$ 를 각각 블럭펄스 함수로 전개하면

$$F(t) \cong \sum_{k=1}^m f_k \Psi_k(t) \quad (3.38)$$

$$Z(t) \cong \sum_{k=1}^m z_k \Psi_k(t) \quad (3.39)$$

$$A(t) \cong \sum_{k=1}^m a_k \Psi_k(t) \quad (3.40)$$

$$B(t) \cong \sum_{k=1}^m b_k \Psi_k(t) \quad (3.41)$$

이고, 식(3.24)에 블럭펄스 함수를 적용하면 다음과 같이 된다.

$$f_k = a_k + b_k R^{-1} b_k^T K_k \quad (3.42)$$

$$z_k = g_k + b_k R^{-1} b_k^T s_k \quad (3.43)$$

결국 상태벡터인 식(3.23)의 해는 다음과 같은 일반화된 반복 알고리즘으로부터 얻을 수 있다.

$$X_1 = \left[I - \frac{1}{2} \Delta t f_1 \right]^{-1} \left[X_0 + \frac{1}{2} \Delta t z_1 \right] \quad (3.44)$$

$$X_2 = \left[I - \frac{3}{8} \Delta t f_2 \right]^{-1} \left[X_0 + \frac{3}{8} \Delta t z_2 \right] \quad (3.45)$$

$$X_3 = \left[I - \frac{3}{8} \Delta t f_3 \right]^{-1} \left[X_0 + \frac{7}{6} \Delta t f_2 z_2 + \frac{1}{24} \Delta t (28 z_2 + 9 z_3) \right] \quad (3.46)$$

$$X_k = \left[I - \frac{3}{8} \Delta t f_k \right]^{-1} \left[\frac{1}{24} \Delta t (f_{k-3} x_{k-3} - 5 f_{k-2} x_{k-2}) + \left(I + \frac{19}{24} \Delta t f_{k-1} \right) x_{k-1} + \frac{1}{24} \Delta t (z_{k-3} - 5 z_{k-2}) + \frac{1}{24} \Delta t (19 z_{k-1} + 9 z_k) \right] \quad (3.47)$$

단, $k = 4, 5, \dots, m-1$

식(3.44)~(3.47)로부터 $x(t)$ 의 해를 구할 수 있고 여기에 서 잠정적인 최적제어 벡터 $u(t)$ 를 식(3.22)로부터 구할

수 있게 된다. 이상에서와 같이 잠정적인 최적제어 입력이 비선형 시스템의 최적제어 입력인가는 식(3.12)의 오차 식을 이용하여 판별한다.

4. 시뮬레이션

다음과 같이 무한 모선에 연결된 동기기(Synchronous machine)를 고려한다[6].

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_1(t) &= y_2(t) \\ \frac{d}{dt} y_2(t) &= b_1 - a_1 y_2(t) - a_2 y_3(t) \sin y_1(t) - \frac{b_2}{2} \sin 2y_1(t) \\ \frac{d}{dt} y_3(t) &= u_1(t) - c_1 y_3(t) + c_2 \cos y_1(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

단,

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.2703, \quad a_2 = 12.0120, \quad b_1 = 39.1892, \quad b_2 = -48.0480 \\ c_1 &= 0.3222, \quad c_2 = 1.9000 \end{aligned}$$

각 상태변수, 제어변수의 물리적 의미는 다음과 같다.

- $y_1(t)$: 회전자 변위 δ , radians
- $y_2(t)$: 회전자 각속도 $\dot{\delta}$, rad/sec
- $y_3(t)$: 계자 쇄교자속 Ψ_f
- $u_1(t)$: 동기기 계자전압 V_f

식 (4.1)의 구속 조건하에 최소화할 평가함수는 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [(y_1 - 0.7461)^2 + y_2^2 + 100(y_3 - 7.7438)^2 + 100(u_1 - 1.1)^2] dt \quad (4.2)$$

시스템의 초기치와 동작점(equilibrium point)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y_0 &= [0.7347 \quad -0.2151 \quad 7.7443]^T \\ y_e &= [0.7461 \quad 0.0 \quad 7.7438]^T \\ u_e &= 1.1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

위 시스템에 대한 선형화 행렬 $A(t)$, $B(t)$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} A(t) &= \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & -0.2703 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & -0.3222 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

여기서 $a_{21} = -12.012 y_3(t) \cos y_1(t) + 48.048 \cos 2y_1(t)$
 $a_{23} = -12.012 \sin y_1(t)$
 $a_{31} = -1.9 \sin y_1(t)$

$$B(t) = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}(t)} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

비선형 항인 $G(t)$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$G(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 39.1892 + 24.024 \sin 2y_1(t) \\ + 12.012 y_3(t) y_2(t) \cos y_1(t) \\ - 48.048 y_1(t) \cos 2y_1(t) \\ 1.9 y_1(t) \sin y_1(t) + 1.9 \cos y_1(t) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

블럭펄스 함수 전개항수(m)을 100항, 오차를 1.0×10^{-3} 로 설정하여 시뮬레이션을 수행한 결과 4번의 반복 연산만으로 주어진 오차 값에 수렴하였다. 그림 4.2, 4.3, 4.4 그리고 4.5는 제안한 알고리즘을 이용한 최적제어기의 설계시의 최적과 제어입력을 나타내었는데 계단과의 형태로 얻어짐을 알 수 있다.

그림 4.6~그림 4.9에는 비선형계의 최적제어시 많이 이용되고 있는 준선형화법과 본 연구방법에 의한 최적 상태제적과 제어 입력을 비교하였다. $y_1(t)$, $y_2(t)$ 는 2가지 방법의 결과가 유사하지만 $y_3(t)$, $u(t)$ 는 개선된 결과를 얻을 수 있었다.

표 4.1는 기존의 블럭펄스 적분 연산행렬을 가지고 본 연구의 3장에서 제시된 알고리즘을 이용하여 비선형 시스템을 시뮬레이션하여 각 반복 횟수에서 발생하는 오차를 비교하였다. 새로운 블럭펄스 적분 연산행렬이 매 구간마다 작은 오차 값을 가지고 있음을 알 수 있다.

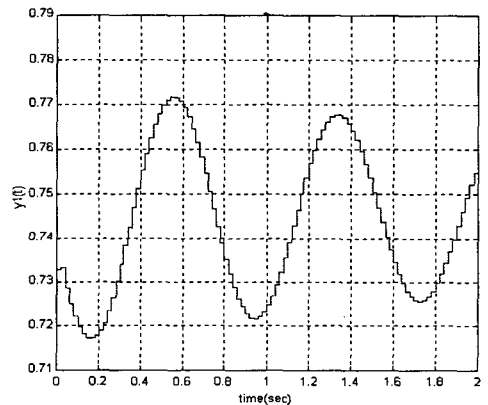


그림 4.2 최적 상태 $y_1(t)$
Fig. 4.2 Optimal state $y_1(t)$

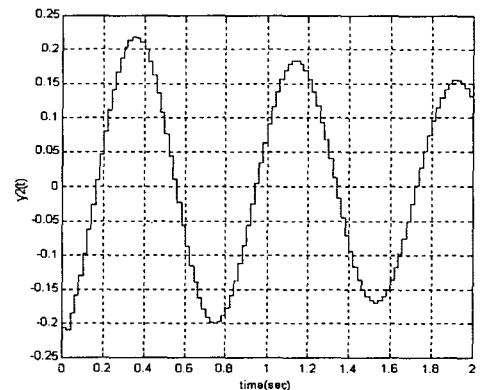


그림 4.3 최적 상태 $y_2(t)$
Fig. 4.3 Optimal state $y_2(t)$

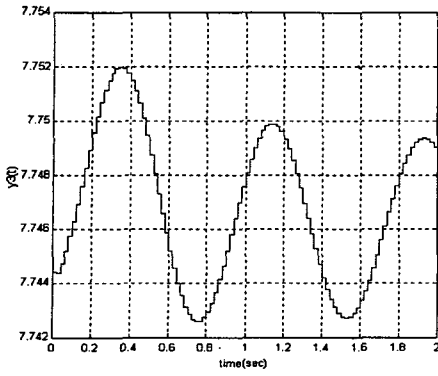


그림 4.4 최적 상태 $y_3(t)$
Fig. 4.4 Optimal state $y_3(t)$

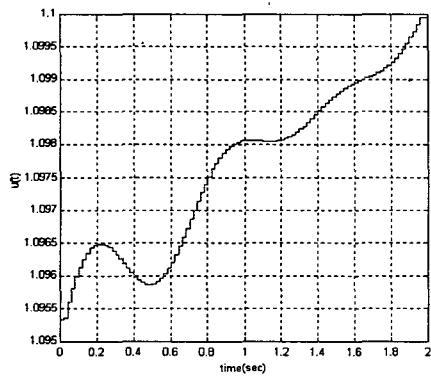


그림 4.5 최적 제어 $u(t)$
Fig. 4.5 Optimal control $u(t)$

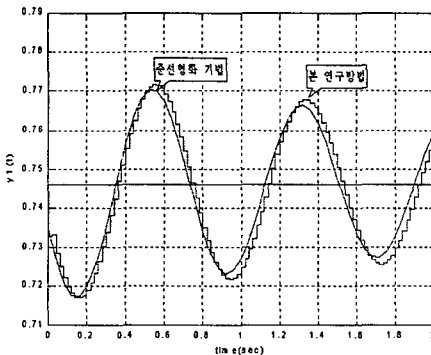


그림 4.6 최적 상태 $y_1(t)$ 의 비교
Fig. 4.6 Comparison of optimal state $y_1(t)$

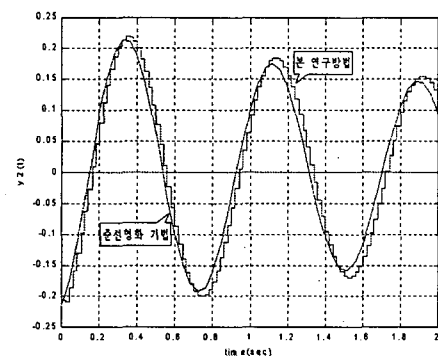


그림 4.7 최적 상태 $y_2(t)$ 의 비교
Fig. 4.7 Comparison of optimal state $y_2(t)$

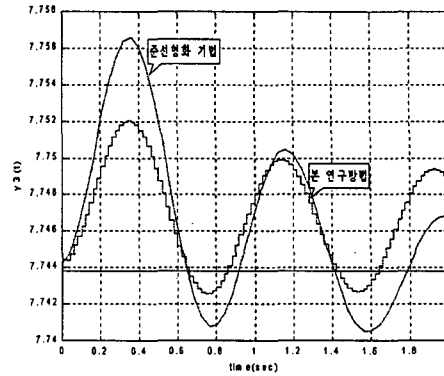


그림 4.8 최적 상태 $y_3(t)$ 의 비교
Fig. 4.8 Comparison of optimal state $y_3(t)$

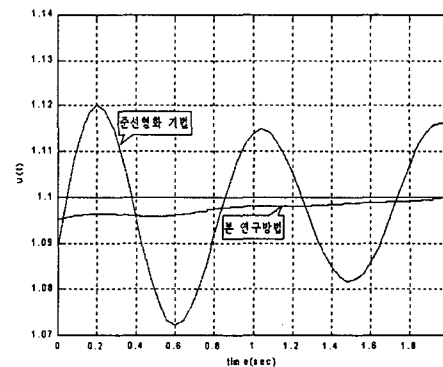


그림 4.9 최적 입력 $u(t)$ 의 비교
Fig. 4.9 Comparison of optimal input $u(t)$

표 4.1 적용예 4.1의 오차의 수렴정도 비교
Table 4.1 Comparison of convergence of error for example

반복 횟수	오차 값	
	기존의 블럭펄스 적분 연산행렬	새로운 블럭펄스 적분 연산 행렬
1	22.7478	22.4871
2	0.2133	0.2058
3	7.3526E-5	4.9491E-5

5. 결론

직교함수가 제어문제 해석에 많이 이용되고 있는데 그 이유는 제어이론의 제반 문제들을 대수적인 접근방법으로 변환하여 해결할 수 있기 때문이다. 이와 같은 대수적 변환은 직교함수의 적분 연산행렬에 의하여 이루어질 수 있다. 본 논문에서는 비선형 최적제어 문제를 풀기 위하여 준선형화 기법에 새로운 블럭펄스 적분 연산행렬을 적용하여 비선형 시스템에 대한 새로운 최적제어 알고리즘을 제안했는데 얻어진 결론들은 다음과 같다.

- (1) 본 연구는 최적제어 입력을 구하는 과정에 있어서 발생하는 비선형 미분 방정식과 적분 방정식을 쉽게 구할 수 있는 반복적 형태의 변환된 대수방정식으로부터 직접 제어 입력을 결정할 수 있는 장점이 있다.
- (2) 기존의 블럭펄스 적분연산 행렬을 사용하였을 때 보다 매 구간에서 더 작은 오차 값을 가짐을 시뮬레이션을 통해 알 수가 있다.
- (3) 블럭펄스 함수는 다른 직교함수들과는 달리 전개 함수에 제한을 받지 않는 장점을 갖는다. 그러나 정확한 해를 얻기 위해서는 블럭펄스 함수의 전개 함수를 늘려야만 했는데 이에 비례하여 연산 시간이 길어지므로 적절한 전개 함수에 대한 해석적인 선정방법은 앞으로 연구해야 할 과제로 남는다.

참 고 문 헌

- [1] D. E. Kirk, Optimal Control Theory, Prentice-hall Inc., 1970.
- [2] A. Isidori, Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, 1985.
- [3] M. F. Hassan and M. G. Singh, "Hierarchical Successive Approximation Algorithms for Non-linear Systems. Part I. Generalisation of the Method of Takahara", Large Scale Systes, Vol. 2, pp. 65-79, 1981.
- [4] M. F. Hassan and M. G. Singh, "Hierarchical Successive Approximation Algorithms for Non-linear Systems. Part II. Algorithms Based on Costate C-ordination", Large Scale Systems, Vol. 2, pp. 81-95, 1981.
- [5] 이한석, 조영호, 이명규, 안두수, "블럭펄스 함수에 의한 비선형계의 2계층 최적제어", 대한전기학회 논문지, 47권 4호, pp. 494-502, 1998.
- [6] 안두수, WALSH 함수와 시스템 제어, 복두출판사, 2000.
- [7] N. S. Hsu and B. Cheng, "Analysis and Optimal Control of time-varying linear systems Via block pulse functions", Int. J. Control, Vol. 33, No. 6, pp. 1123-1133, 1981.
- [8] Z. H. Jiang and W. Schäufelberger, Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems, Springer-verlag, 1992
- [9] A. Deb, G. Sarkar, M. Bhattacharjee and S. K. Sen, "All-integrator Approach to Linear SISO Control System Analysis using Block Pulse Functions (BPF)", J. Franklin Inst., Vol. 334B, No. 2, pp. 319-335, 1997.
- [10] 조영호, 신승권, 이한석, 안두수, "보간법을 이용한 블럭펄스 함수에 대한 새로운 적분 연산행렬의 유도", 대한전기학회 논문지, 48A권 6호, pp. 753-759, 1999.
- [11] E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 7th. Ed., Wiley.

저 자 소 개



조 영 호 (曹 永 鎬)

1973년 8월 1일생. 1996년 성균관대 공대 전기공학 졸업. 1998년~동대학원 전기공학과 졸업(석사). 2001년 동대학원 전기전자컴퓨터공학부 졸업(박사). 2000~현재 한국항공우주산업(주) 우주개발연구 센터 선임연구원
 Tel : 042-939-3561, Fax : 042-939-3500
 E-mail : choyh@koreaaero.com



심 재 선 (沈 在 先)

1950년 7월 23일생. 1973년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1979년 단국대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사), 1989년 성균관대학교 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1975년~현재 삼척대학교 전기공학과 교수
 Tel : 033-570-6345
 E-mail : myongo@samcheok.ac.kr