섭동을 갖는 뉴트럴 시스템의 성능보장 안정화에 관하여

論 文
52D-3-1

On Guaranteed Cost Control of Uncertain Neutral Systems

朴 柱 炫*
(Park, Ju Hyun)

Abstract - In this paper, we consider the robust guaranteed cost control problem for a class of uncertain neutral systems with given quadratic cost functions. The uncertainty is assumed to be norm-bounded and time-varying. The goal in this study is to design the memoryless state feedback controller such that the closed-loop system is asymptotically stable and the closed-loop cost function value is not more than a specified upper bound for all admissible uncertainty. Some criteria for the existence of such controllers are derived based on the matrix inequality approach combined with the Lyapunov second method. A parameterized characterization of the robust guaranteed cost controllers is given in terms of the feasible solutions to the certain matrix inequalities. A numerical example is given to illustrate the proposed method.

Key Words : Neutral systems; Guaranteed cost control; Lyapunov method; Matrix inequalities.

1. 서 론

지난 30년 동안, 시간지연을 갖는 다이나믹 시스템의 강인 안정성 및 안정화 문제는 많은 관심을 끌어왔다. 이는 여러 요인에 기인한 시간지연이 다양한 시스템에 실제적으로 존재하기 때문이다. 이러한 시간지연은 시스템의 불안정성 및 성능의 저하의 주된 요인 중 하나가 된다. 특히, 지난 10년 전부터는 뉴트럴 형태의 시간지연 시스템에 대한 관심이 고조되어왔다 [1-3]. 뉴트럴 시스템은 과거의 상태변수의 변화량이 현재의 상태변수 변화량에 영향을 미치는 시간지연 시스템을 말한다. 뉴트럴 시간지연 시스템 (neutral delay-differential system)은 이론적 및 실용적인 중요성을 갖고 있다. 다양한 형태의 뉴트럴 시스템의 모델링 ([1-3], [10])중에서, 많이 다루어지는 분야는 다음과 같다. 전송선로에서의 전압, 전류 변동의 문제, 인구학 다이나믹스의 모델, 탄성체에 고정되어 진동하는 질량체의 운동방정식, 과거상태의 변화량의 정보를 필요로 하는 시스템 등을 들 수 있다. 관련 문헌을 보면, 특성방정식 혹은 리아프노프 방식 등을 이용하여, 다양한 뉴트럴 시스템의 안정성 문제에 대한 해석법이 많은 연구자들에 의하여 제시되었다 [4-9]. 그러나, 불안정한 시스템의 안정화를 위한 제어기 설계에 관한 연구는 지금까지도 미흡한 실정이다. 이전의 연구에서는 주로 스칼라 시스템에 한정되어왔다 [10]. 최근에 발표된 몇몇의 결과 [10-13]에서도 다변수 시스템으로 확장된 제어 기법들이 소개되었으나, 적용에 있어서 제한적 요소를 많이 갖고 있다.

한편, 실제 제어시스템의 구현에 있어서, 고려되어야할 중요한 요소로써 시스템의 성능지수(performance cost) 이다. 최근에 제어분야에서 성능보장형 제어기 (guaranteed cost control) 설계 문제가 큰 각광을 받고 있다 [15-16]. 이 제어기는 시스템의 안정성 뿐만 아니라, 성능지수의 한계치를 제공해 준다는 장점을 갖고 있다. 그러나, 뉴트럴 시스템의 안정화 문제에 있어서, 이러한 내용을 다룬 연구 결과는 아직도 없는 실정이다. 본 논문에서는 섭동을 갖는 뉴트럴 시스템의 강인한 성능 보장 제어기를 설계 하고자 한다. 시스템에 존재하는 섭동은 시변이며, 크기에 있어서는 한계치를 갖는다고 가정하였다. 제어기의 구조는 비메모리 상태궤환 제어기이다. 시스템의 안정성 해석을 위하여, 리아프노프 이론을 이용하여 시스템의 안정성 및 적절한 성능지수를 보장하는 제어기의 존재를 위한 조건식을 행렬부등식 형태로 구한다. 이 행렬부등식은 기존의 다양한 최적화 알고리즘을 이용하여 쉽게 풀 수 있다 [18].

이 논문에서는 R^n은 n차원의 유클리디안 (Euclidean) 공간이며, $R^{n \times m}$은 실수행렬 집합이다. $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치를 의미하고, I은 적절한 차원의 단위행렬이며, $*$는 대칭부분 (symmetric part)을 의미하고, $\|\cdot\|$은 유클리디안 놈 (norm)을 의미하고, $tr(\cdot)$는 행렬의 대각합 (trace)이며, λ_m, λ_M은 각각 최소, 최대 고유치 (eigenvalue) 이다. $diag(\cdots)$는 블록 대각 행렬이다. 대칭행렬 X, Y에 대하여 $X > Y$ 혹은 $X \ge Y$은 행렬 $X-Y$가 양한정 (positive definite), 준 양한정 (postive semi-definite)를 나타낸다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 문제를 설정하고, 뉴트럴 시스템의 안정성을 보장하는 제어기를 설계하며, 예제를

* 正 會 員 : 嶺南大學校 電子情報學工學部 助敎授 · 工博
接受日字 : 2002년 4월 19일
最終完了 : 2002년 12월 11일

통해서 제시된 결과의 유용성을 살펴본다. 마지막으로 3장에서 결론을 내린다.

2. 문제설정 및 제어기 설계

본 논문에서 다루는 뉴트럴 시스템의 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A_0+\Delta A_0(t))x(t)+(A_1+\Delta A_1(t))x(t-h)\\ &\quad + C\dot{x}(t-h)+Bu(t),\end{aligned} \tag{1}$$

$$x(t_0+\theta)=\phi(\theta), \quad \forall\ \theta\in[-h,0] \tag{2}$$

여기서 $x(t)\in R^n$ 는 상태벡터이고, $A_0\in R^{n\times n}$, $A_1\in R^{n\times n}$, $C\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times m}$는 상수 시스템 행렬이며, $u(t)\in R^m$는 제어 입력이며, $\phi(\cdot)$는 구간 $[-h,0]$에서 연속적으로 미분 가능한 초기조건 함수이며, $\Delta A_0(t)$, $\Delta A_1(t)$는 시변 파라미터 섭동을 의미하여, 놈 한계치를 갖는 미지의 실수 행렬 함수이다. 시스템 (1)에 대한 모델링은 참고문헌 [1-3]에 잘 나타나 있다. 본 논문에서는, 제어기 구현의 기본 전제인 행렬쌍 (A_0, B)이 완전히 제어가능 (completely controllable)하다고 하였고, 시스템에 존재하는 섭동은 아래의 형태라고 설정하였다.

$$\Delta A_0(t)=D_0F_0(t)E_0,\quad \Delta A_1(t)=D_1F_1(t)E_1 \tag{3}$$

여기서 D_0, D_1, E_0, E_1는 적절한 차원의 실수행렬이며, $F_0(t)\in R^{k_a\times l_a}$, $F_1(t)\in R^{k_b\times l_b}$은 $\|F_0(t)\|\le 1$, $\|F_1(t)\|\le 1$의 조건을 만족하는 미지의 행렬이다. 식 (3)의 가정은 강인제어 연구분야에서 널리 이용되는 섭동의 형태이다.

본 논문에서는 시스템 (1)의 안정화를 위하여 다음과 같은 비메모리 상태궤환 제어기를 제안한다.

$$u(t)=-B^TPx(t) \tag{4}$$

여기서 P는 선택되어져야할 양한정 행렬이다

본 논문에서는 시스템 (1)에 대한 성능지수 함수는

$$J=\int_0^\infty [x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Su(t)]dt \tag{5}$$

와 같고, Q, S는 적절한 차원의 주어진 양한정 행렬이다.

이제, 본 논문에서의 목표는 시스템 (1)과 성능지수(5)에 대해, 아래와 같은 폐루프 시스템이

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A_0+\Delta A_0(t)-BB^TP]x(t)+[A_1\\ &\quad +\Delta A_1(t)]x(t-h)+C\dot{x}(t-h)\end{aligned} \tag{6}$$

점근적으로 (asymptotically) 안정하고, 성능지수의 페루프 값이 어떤 주어진 값 J^*에 대하여 $J\le J^*$를 만족하게 하는 상태 궤환 제어기 $u(t)$를 설계하는 방법을 찾는 것이다.

정의 1. 주어진 섭동을 갖는 뉴트럴 시스템 (1)과 성능지수 (5)에 관하여, 페루프 시스템 (6)이 점근적으로 안정하고, 페루프 성능지수의 값이 양의 상수 J^*에 대해 $J\le J^*$를 만족하게 하는 $u^*(t)$와 J^*가 존재하면, J^*를 성능보장지수 (guaranteed cost)라 하며 $u^*(t)$를 성능보장제어기라 한다.

본 논문의 주요 결과를 얻기에 앞서서, 다음과 같은 보조정리가 필요하다.

보조정리 1 [17] 적절한 차원을 어떤 실수행렬 D, E과 양의 실수 δ에 대하여, 다음의 식이 성립한다

$$DE+E^TD^T\le \delta DD^T+\delta^{-1}E^TE$$

보조정리 2 [18] 다음의 행렬 부등식은

$$\begin{bmatrix} Z(x) & Y(x)\\ Y^T(x) & W(x)\end{bmatrix}>0,$$

아래와 등가이다.

$$W(x)\ >\ 0,\ Z(x)-Y(x)W^{-1}(x)Y^T(x)\ >\ 0,$$

여기서 $Z(x)=Z^T(x), W(x)=W^T(x)$, $Y(x)$은 x에 어파인 (affinely) 종속적이다.

다음의 정리에서는 리아프노프 안정성 해석법의하여 시스템 (1)에 대한 지연시간에 독립적인 안정화 조건식을 제시한다.

정리 1. 먼저 $\alpha_0=\sqrt{\lambda_M(D_0^TD_0)}$, $\alpha_1=\sqrt{\lambda_M(D_1^TD_1)}$ 이라 하자. 주어진 양한정 행렬 Q, S에 대하여, 다음의 행렬 부등식을 만족하는 양의 상수들 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{10}, \beta$와 양한정 행렬 X가 존재하면,

$$\begin{bmatrix} \Omega_{1,1} & \Omega_{1,2} & \Omega_{1,3} & 0 & \Omega_{1,4}\\ * & \Omega_{2,2} & 0 & 0 & 0\\ * & * & \Omega_{3,3} & \Omega_{3,4} & A_1^TC\\ * & * & * & \Omega_{4,4} & 0\\ * & * & * & * & \Omega_{5,5}\end{bmatrix}<0, \tag{7}$$

$u(t)=-B^TPx(t)$는 시스템 (1)의 강인 성능보장 제어기이다. 여기서 $X=P^{-1}$이며

$$\begin{aligned}
\Omega_{1,1} &= XA_0^T+A_0X-2BB^T+BB^TBB^T-XA_0^TBB^T\\
&\quad -BB^TA_0X+BSB^T+\varepsilon_0D_0D_0^T+\varepsilon_4BB^TD_0D_0^TBB^T\\
\Omega_{1,2} &= [XA_0^T\ \beta X\ XQ\ XE_0^T\ \varepsilon_2XA_0^TD_0\ XE_0^T\ XA_0^T\\
&\quad D_1\ XE_0^T\ \ XE_0^{T\,\alpha_0}XE_0^T\ XE_0^T\ \alpha_0XE_0^TD_1\ BB^TD_1]\\
\Omega_{1,3} &= A_1+XA_0^TA_1-BB^TA_1\\
\Omega_{2,2} &= diag(-I,-\beta I,-Q,-\varepsilon_0I,-\varepsilon_2I,-\varepsilon_2I,-\varepsilon_3I,\\
&\quad -\varepsilon_4I,-\varepsilon_5I,-\varepsilon_6I,-\varepsilon_7I,-I,-\varepsilon_1I,-\varepsilon_8I)\\
\Omega_{1,4} &= C+XA_0^TC-BB^TC\\
\Omega_{3,3} &= A_1^TA_1-\beta I+\varepsilon_1E_1^TE_1+\varepsilon_3E_1^TE_1+\varepsilon_5A_1^TD_0D_0^TA_1\\
&\quad +\varepsilon_6\alpha_1^2E_1^TE_1+\varepsilon_8E_1^TE_1+\varepsilon_9A_1^TD_1D_1^TA_1+\alpha_1^2E_1^TE_1\\
\Omega_{3,4} &= [E_1^T\ \ E_1^T]\\
\Omega_{4,4} &= diag(-\varepsilon_9I,-\varepsilon_{10}I)\\
\Omega_{5,5} &= C^TC-I+\varepsilon_7C^TD_0D_0^TC+\varepsilon_{10}C^TD_1D_1^TC.
\end{aligned}$$

이때, 성능지수 J의 상한치는 다음과 같다.

$$J^*=x^T(0)X^{-1}x(0)+\int_{-h}^0\dot{x}^T(s)\dot{x}(s)ds+\beta\int_{-h}^0x^T(s)x(s)ds.$$

증명. 다음과 같은 리아프노프 함수를 고려하자.

$$V=V_1+V_2+V_3 \tag{8}$$

여기서

$$V_1=x^T(t)Px(t) \tag{9}$$

$$V_2=\int_{t-h}^t\dot{x}^T(s)\dot{x}(s)ds \tag{10}$$

$$V_3=\beta\int_{t-h}^tx^T(s)x(s)ds \tag{11}$$

이다. 시스템 (6)의 해에 따른 V의 도함수는

$$\dot{V}_1 = x^T[(A_0^T+\Delta A_0^T)P+P(A_0+\Delta A_0)-2PBB^TP] + 2x^TP(A_1+\Delta A_1)x_h+2x^TPC\dot{x}_h \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 =& x^TA_0^TA_0x+x^TPBB^TBB^TPx+x_h^TA_1^TA_1x_h \\ &+ \dot{x}_h^TC^TC\dot{x}_h-\dot{x}_h^T\dot{x}_h-2x^TA_0^TBB^TPx+2x^TA_0^TA_1x_h \\ &+2x^TA_0^TC\dot{x}_h-2x^TPBB^TA_1x_h-2x^TPBB^TC\dot{x}_h \\ &+2x_h^TA_1^TC\dot{x}_h+2x^TA_0^T\Delta A_0x+2x^TA_0^T\Delta A_1x_h+x^T\Delta A_0^T\Delta A_0x \\ &-2x^T\Delta A_0^TBB^TPx+2x^T\Delta A_0^TA_1x_h+2x^T\Delta A_0^T\Delta A_1x_h \quad (13) \\ &+2x^T\Delta A_0^TC\dot{x}_h-2x^TPBB^T\Delta A_1x_h+2x_h^TA_1^T\Delta A_1x_h \\ &+x_h^T\Delta A_1^T\Delta A_1x_h+2x_h^T\Delta A_1^TC\dot{x}_h,\end{aligned}$$

$$\dot{V}_3=\beta x^Tx-\beta x_h^Tx_h \quad (14)$$

여기서 $x, x_h, \dot{x}_h$는 각각 $x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)$를 의미한다. 보조정리 1을 이용하여, 식(12)와 (13)의 우변의 일부 항들의 한계치를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}2x^TP\Delta A_0x= &\le \varepsilon_0x^TPD_0D_0^TPx+\varepsilon_0^{-1}x^TE_0^TE_0x \\ 2x^TP\Delta A_1x= &\le \varepsilon_1^{-1}x^TPD_1D_1^TPx+\varepsilon_1x_h^TE_1^TE_1x_h \\ 2x^TA_0^T\Delta A_0x &\le \varepsilon_2x^TA_0^TD_0D_0^TA_0x+\varepsilon_2^{-1}x^TE_0^TE_0x \\ 2x^TA_0^T\Delta A_1x_h &\le \varepsilon_3^{-1}x^TA_0^TD_1D_1^TA_0x+\varepsilon_3x_h^TE_1^TE_1x_h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^T\Delta A_0^T\Delta A_0x &\le \lambda_M(D_0^TD_0)x^TE_0^TF_0^T(t)F_0(t)E_0x \\ &\le \lambda_M(D_0^TD_0)x^TE_0^TE_0x \\ -2x^T\Delta A_0^TBB^TPx &\le \varepsilon_4x^TPBB^TD_0D_0^TBB^TPx+\varepsilon_4^{-1}x^TE_0^TE_0x \\ 2x^T\Delta A_0^TA_1x_h &\le \varepsilon_5^{-1}x^TE_0^TE_0x+\varepsilon_5x_h^TA_1^TD_0D_0^TA_1x_h \\ 2x^T\Delta A_0^T\Delta A_1x_h &\le \varepsilon_6^{-1}x^T\Delta A_0^T\Delta A_0x+\varepsilon_6x_h^T\Delta A_1^T\Delta A_1x_h \\ &\le \varepsilon_6^{-1}\lambda_M(D_0^TD_0)x^TE_0^TE_0x+\varepsilon_6\lambda_M(D_1^TD_1)x_h^TE_1^TE_1x_h \\ 2x^T\Delta A_0^TC\dot{x}_h &\le \varepsilon_7^{-1}x^TE_0^TE_0x+\varepsilon_7\dot{x}_h^TC^TD_0D_0^TC\dot{x}_h \\ -2x^TPBB^T\Delta A_1x_h &\le \varepsilon_8^{-1}x^TPBB^TD_1D_1^TBB^TPx+\varepsilon_8x_h^TE_1^TE_1x_h \\ 2x_h^TA_1^T\Delta A_1x_h &\le \varepsilon_9x_h^TA_1^TD_1D_1^TA_1x_h+\varepsilon_9^{-1}x_h^TE_1^TE_1x_h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_h^T\Delta A_1^T\Delta A_1x_h &\le \lambda_M(D_1^TD_1)x_h^TE_1^TE_1x_h \\ 2x_h^T\Delta A_1^TC\dot{x}_h &\le \varepsilon_{10}^{-1}x_h^TE_1^TE_1x_h+\varepsilon_{10}\dot{x}_h^TC^TD_1D_1^TC\dot{x}_h\end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $\varepsilon_i, i=1,2,\cdots,10$는 양의 스칼라이다. 부등식 (15)를 식 (12)와 (13)에 대치하고, 식 (14)를 이용하면, 다음을 새로운 $\dot{V}$의 한계치를 얻는다.

$$\dot{V}\le\xi^T(t)M(P,\beta,\varepsilon_i)\xi(t)-x^T(t)(Q+PBSB^TP)x(t) \quad (16)$$

여기서 $\xi(t)=[x^T \quad x_h^T \quad \dot{x}_h^T]^T$ 이고,

$$M(P,\varepsilon_i,\beta)=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & (PC+A_0^TC-PBB^TC) \\ * & M_{22} & A_1^TC \\ * & * & M_{33}\end{bmatrix}$$

일 때,

$$\begin{aligned}M_{11} =& A_0^TP+PA_0-2PBB^TP+A_0^TA_0+PBB^TBB^TP \\ &-A_0^TBB^TP-PBB^TA_0+\beta I+Q+PBSB^{TP}+\varepsilon_0PD_0D_0^TP \\ &+\varepsilon_0^{-1}E_0^TE_0+\varepsilon_1^{-1}PD_1D_1^TP+\varepsilon_2A_0^TD_0D_0^TA_0+\varepsilon_2^{-1}E_0^TE_0 \\ &+\varepsilon_3^{-1}A_0^TD_1D_1^TA_0+\alpha_0^2E_0^TE_0+\varepsilon_4PBB^TD_0D_0^TBB^TP \\ &+\varepsilon_4^{-1}E_0^TE_0+\varepsilon_5^{-1}E_0^TE_0+\varepsilon_6^{-1}\alpha_0^2E_0^TE_0+\varepsilon_7^{-1}E_0^TE_0 \\ &+\varepsilon_8^{-1}PBB^TD_1D_1^TBB^TP,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{12} =& PA_1+A_0^TA_1-PBB^TA_1 \\ M_{22} =& A_1^TA_1-\beta I+\varepsilon_1E_1^TE_1+\varepsilon_3E_1^TE_1+\varepsilon_5A_1^TD_0D_0^TA_1 \\ &+\varepsilon_6\alpha_1^2E_1^TE_1+\varepsilon_8E_1^TE_1+\varepsilon_9A_1^TD_1D_1^TA_1+\varepsilon_9^{-1}E_1^TE_1 \\ &+\alpha_1^2E_1^TE_1+\varepsilon_{10}^{-1}E_1^TE_1, \\ M_{33} =& C^TC-I+\varepsilon_7C^TD_0D_0^TC+\varepsilon_{10}C^TD_1D_1^TC.\end{aligned}$$

이다.

그러므로 행렬 $M(\cdot)$이 음한정 행렬이면, 다음의 조건을 만족하는 양의 상수 $\gamma=\lambda_m(Q+PBSB^TP)$가 존재한다.

$$\dot{V} < -\gamma\|x(t)\|^2. \quad (17)$$

식 (17)은 주어진 시스템 (1)의 점근 안정성을 의미한다 [1]. 행렬 $M(\cdot)$의 앞뒤에 다음의 행렬 $W=diag(X,I,I)$를 곱함으로써, $M(\cdot)<0$이라는 조건 식은 다음과 같이 바뀐다.

$$\overline{M}=\begin{bmatrix} \overline{M}_{11} & \begin{pmatrix}A_1+XA_0^TA_1 \\ -BB^TA_1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}C+XA_0^TC \\ -BB^TC\end{pmatrix} \\ * & M_{22} & A_1^TC \\ * & * & M_{33}\end{bmatrix}<0 \quad (18)$$

이다. 여기서 $\overline{M}_{11}=XM_{11}X$이다. 보조정리 2에 의하여, 부등식 (18)은 부등식 (7)과 등가이다. 이때, 행렬부등식 (7)은 다음을 의미한다.

$$\dot{V} < -x^T(t)(Q+PBSB^TP)x(t) < 0. \quad (19)$$

두 행렬 Q,S가 양한정이므로, 식 (19)는 리아프노프 안정성 이론에 의하여 시스템 (1)의 점근 안정을 의미하고, $x^T(t)(Q+PBSB^TP)x(t) < -\dot{V}$의 관계에서 양변을 0에서 T_f까지 적분함으로써

$$\begin{aligned}\int_0^{T_f}x^T(t)(Q+PBSB^TP)x(t)dt &< V(0)-V(T_f) \\ &=\left(x^T(0)Px(0)-x^T(T_f)Px(T_f)\right)+\left(\int_{-h}^0\dot{x}^{T(s)}\dot{x}(s)ds\right. \\ &\quad \left.-\int_{T_f-h}^{T_f}\dot{x}^T(s)\dot{x}(s)ds\right)+\left(\beta\int_{-h}^0x^T(s)x(s)ds\right. \\ &\quad \left.-\beta\int_{T_f-h}^{T_f}x^T(s)x(s)ds\right).\end{aligned}$$

을 얻는다. 그런데, 시스템 (6)은 $T_f\to\infty$일 때 안정하므로

$$x^T(T_f)Px(T_f)\to 0, \quad \int_{T_f-h}^{T_f}\dot{x}^T(s)\dot{x}(s)ds\to 0$$

$$\beta\int_{T_f-h}^{T_f}x^T(s)x(s)ds\to 0$$

을 만족한다. 그러므로,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^T(t)(Q+PBSB^TP)x(t)dt &\le V(0)=x^T(0)Px(0) \\ &+\int_{-h}^0\dot{x}^T(s)\dot{x}(s)ds+\beta\int_{-h}^0x^T(s)x(s)ds\equiv J^*\end{aligned}$$

이 성립한다. 이것으로 증명은 완료된다.

참조 1. 정리 1은 결국 부등식 (7)의 해의 존재 유무로 귀결된다. 식 (7)의 부등식은 해들인 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{10},X,\beta$에 대해서 준볼록 (quasiconvex) 최적화문제로써 일반화된 고유치 문제 (generalized eigenvalue problem)로 풀 수 있다. 엄밀한 준볼록 목표(strictly quasiconvex objective)를 갖는 준볼록 최적화 문제의 지역적 최적(locally optimal) 해는 전역 최적(globally optimal)이 된다. 자세한 사항은 참고문헌 [18]를 참조하라. 본 논문에서는 식 (7)의 부등식을 Matlab LMI 도구상자 [19]를 이용하여 풀고자 한다. 이 도구상자는 최신의 interior-point 볼록 최적화 (convex optimization) 알고리즘을 구현한 것이다.

정리 1은 상태 궤환 성능보장 제어기를 설계하는 방법을 제시하였고, 다음의 정리는 성능지수의 상한치를 최소화하는 제어기를 선택하는 방법을 제시한다.

정리 2. 성능지수 (5)를 갖는 폐루프 시스템 (6)을 고려하자. 다음의 최적화 문제를 만족하는 해 집합 $(X, \varepsilon_i, \beta, \alpha, \Gamma_1, \Gamma_2)$가 존재하면

$$\text{minimize } \alpha + tr(\Gamma_1) + tr(\Gamma_2) \quad \text{subject to}$$

$$(i) \text{ 부등식 (7)}, \qquad (ii)\begin{bmatrix} -\alpha & x^T(0) \\ x(0) & -X \end{bmatrix} < 0,$$

$$(iii)\begin{bmatrix} -\Gamma_1 & \beta N_1^T \\ \beta N_1 & -\beta I \end{bmatrix} < 0, \quad (iv)\begin{bmatrix} -\Gamma_2 & N_2^T \\ N_2 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

식 (4)의 제어기는 시스템 (6)의 성능지수 (20)의 최소화를 보장하는 최적 강인 성능 보장 제어기이다. 여기서, $\int_{-h}^{0} x(s)x^T(s)ds = N_1N_1^T$, $\int_{-h}^{0} \dot{x}(s)\ \dot{x}^T(s)ds = N_2N_2^T$, 이다.

증명. 정리 1에 의하여, 식 (21)의 (i)은 자명하다. 또한 조건들 (ii), (iii), (iv)는 보조정리 2에 의하여 각각 $x^T(0)X^{-1}x(0) < \alpha$, $\beta N_1^T N_1 < \Gamma_1$, $N_2^T N_2 < \Gamma_2$, 와 동치이다. 한편, 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \beta\int_{-h}^{0} x^T(s)x(s)ds &= \beta\int_{-h}^{0} tr(x^T(s)x(s))ds = tr(\beta N_1 N_1^T) \\ &= tr(\beta N_1^T N_1) < tr(\Gamma_1), \\ \int_{-h}^{0} \dot{x}^T(s)\ \dot{x}(s)ds &= \int_{-h}^{0} tr(\dot{x}^T(s)\ \dot{x}(s))ds = tr(N_2N_2^T) \\ &= tr(N_2^T N_2) < tr(\Gamma_2). \end{aligned}$$

그러므로, 식 (20)의 성능지수 상한치는 다음을 만족한다.

$$J^* < \alpha + tr(\Gamma_1) + tr(\Gamma_2).$$

이 $\alpha + tr(\Gamma_1) + tr(\Gamma_2)$의 최소화 문제가 바로 시스템 (6)의 성능지수의 최소화를 의미한다. 참조 1에 기술한 바와 같이 준볼록 최적화 문제는 해가 존재한다면 전역 최적치가 된다.

참조 2. Ma [13]도 뉴트럴 시스템의 안정화에 관한 문제를 다루었지만, 한 개의 입력를 갖는 시스템에만 적용할 수 있으며, 시스템 행렬 A_1, C의 구조적인 제한을 갖고 있어서, 아주 제한적인 범위에서만 적용이 가능한 연구결과이다.

예제 1. 다음의 뉴트럴 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A_0 + D_0F_0(t)E_0]x(t) + [A_1 + D_1F_1(t)E_1]x(t-h) \\ &\quad + C\dot{x}(t-h) + Bu(t), \end{aligned}$$

여기서

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.2 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad D_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad E_0 = [1 \ 0],$$

$$E_1 = [0.5 \ 0.5], \quad h = 0.3$$

$$\|F_0(t)\| \le I, \quad \|F_1(t)\| \le I$$

$$x(t) = [0.5e^t \ \ -0.5e^{-t}]^T \quad \text{for} \quad -0.3 \le t \le 0.$$

실제로, 이 시스템은 제어입력이 없을 때 ($u(t) = 0$), 시간이 흐름에 따라서 상태궤적이 무한대로 발산하는 불안정한 시스템이다. 이와 같은 예제 시스템을 안정화시키기 위하여, 먼저 성능지수의 가중치 행렬을 $Q = I, S = 0.1I$ 와 같이 정하자.

관계식 $\int_{-h}^{0} x(s)x^T(s)ds = N_1N_1^T$, $\int_{-h}^{0} \dot{x}(s)\ \dot{x}^T(s)ds = N_2N_2^T$에서 다음을 얻을 수 있다.

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0.1614 & -0.1742 \\ -0.1742 & 0.2691 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0.1614 & 0.1742 \\ 0.1742 & 0.2691 \end{bmatrix}$$

이제, 정리 2의 최적화 문제를 풀면, 다음과 같은 해를 얻을 수 있다.

$$X = \begin{bmatrix} 0.0631 & -0.1235 \\ -0.1235 & 0.3409 \end{bmatrix}, \quad \beta = 29.5941, \quad \varepsilon_0 = 0.055,$$

$$\varepsilon_1 = 23.4725, \varepsilon_2 = 2.0703 \times 10^8, \quad \varepsilon_3 = 5.6405,$$

$$\varepsilon_4 = 2.1179 \times 10^8, \varepsilon_5 = 3.4279, \quad \varepsilon_6 = 3.2934, \varepsilon_7 = 5.4925,$$

$$\varepsilon_8 = 3.9689, \varepsilon_9 = 7.1598, \varepsilon_{10} = 8.1811, \quad \alpha = 6.2628,$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1.6691 & -2.2196 \\ -2.2196 & 3.0412 \end{bmatrix}, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0.0564 & 0.0750 \\ 0.0750 & 0.1028 \end{bmatrix}$$

그러므로, 예제 시스템의 성능보장 안정화를 위한 제어기는

$$u(t) = -B^T X^{-1} x(t) = -[19.6947 \quad 10.0670]x(t),$$

와 같으며, 이때의 폐루프 최적 성능지수는

$$J^* = \alpha + tr(\Gamma_1) + tr(\Gamma_2) = 11.1323$$

이다.

3. 결 론

본 논문에서는 섭동을 갖는 뉴트럴 시스템의 안정화를 위한 제어기 설계 문제를 다루었다. 기존의 연구에서 존재하던 시스템상의 제약조건이 필요 없이, 리아프노브 해석법을 근간으로 하여, 시스템의 안정성뿐만 아니라, 성능지수의 최소화를 꾀하게 하는 제어기의 존재에 관한 조건 식을 행렬 부등식으로 구하였다. 추후 연구에서는 시변 시간지연을 갖는 경우와 지연시간에 종속적인 조건식을 찾는 문제를 다루고자 한다.

감사의 글

이 논문은 2002학년도 영남대학교 학술연구조성비 지원에 의한 것임.

참 고 문 헌

[1] J. Hale and S.M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] V. Kolmanovskii and A. Myshkis, Applied Theory of Functional Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

[3] K. Gopalsamy, Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1992.

[4] D.Y. Khusainov and E.V. Yun'kova, Investigation of the stability of linear systems of neutral type by the Lyapunov function method, Differentsialnye Uravneniya, 24 (1988), 613-621.

[5] J. X. Kuang, J. X. Xiang, and H. J. Tian, The asymptotic stability of one-parameter methods for neutral differential equations, BIT, 34 (1994), 400-408.

[6] L.M. Li, Stability of linear neutral delay-differential systems, Bulletin of Australian Mathematical Society, 38 (1988), 339-344.

[7] G.D. Hu and G.D. Hu, Some simple stability criteria of neutral delay-differential systems, Applied Mathematics

and Computation, 80 (1996), 257-271.
[8] J.H. Park and S. Won, A note on stability of neutral delay-differential systems, Journal of The Franklin Institute, 336 (1999), 543-548.
[9] J.H. Park and S. Won, Asymptotic stability of neutral systems with multiple delays, Journal of Optimization Theory and Applications, 103 (1999), 187-200.
[10] E.N. Chukwu, Stability and Time-Optimal Control of Hereditary Systems, Academic Press, New York, 1992.
[11] T. J. Tarn, T. Yang, X. Zeng, and C. Guo, Periodic output feedback stabilization of neutral systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 41 (1996), 511-521.
[12] Y. A. Fiagbedzi, Feedback stabilization of neutral systems via the transformation technique, International Journal of Control, 59 (1994), 1579-1589.
[13] W.B. Ma, N. Adachi, and T. Amemiya, Delay independent stabilization of uncertain linear systems of neutral type, Journal of Optimization Theory and Application, 84 (1995), 393-405.
[14] S.S.L. Chang and T.K.C. Peng, Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters, IEEE Transaction on Automatic Control, 17 (1972), 474-483.
[15] I.R. Petersen, D.C. McFarlane, and M.A. Rotea, Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain linear systems, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 8 (1998), 649-657.
[16] L. Yu, and J. Chu, An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems, Automatica, 35 (1999), 1155-1159.
[17] P. Khargonekar, I.R. Petersen, and K. Zhou, Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stability and H_∞ control theory, IEEE Transaction on Automatic Control, 35 (1990), 356-361.
[18] B. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, SIAM, Philadelphia, 1994.
[19] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. Laub, and M. Chilali, LMI Control Toolbox User's Guide, The Mathworks, Natick, Massachusetts, 1995.

저 자 소 개

박 주 현(朴 柱 炫)
received the Ph.D. at Pohang University of Science and Technology (POSTECH) in 1997. From 1997 to 2000, he was a research associate at Automation Research Center, POSTECH. In 2000, he joined the Yeungnam University. His research interests center on delay-differential systems and its related control problems, and convex optimization theory and applications.