이산 Convolution 적산의 z변환의 증명을 위한 인과성의 필요에 대한 재고

速報論文
52D-1-8

A Reconsideration of the Causality Requirement in Proving the z-Transform of a Discrete Convolution Sum

鄭 台 相* · 李 宰 碩**
(Tae-Sang Chung · Jae Seok Lee)

Abstract - The z-transform method is a basic mathematical tool in analyzing and designing digital signal processing systems for discrete input and output signals. There are may cases where the output signal is in the form of a discrete convolution sum of an input function and a designed digital processing algorithm function. It is well known that the z-transform of the convolution sum becomes the product of the two z-transforms of the input function and the digital processing function, whose proofs require the causality of the digital signal processing function in the almost all the available references. However, not all of the convolution sum functions are based on the causality. Many digital signal processing systems such as image processing system may depend not on the time information but on the spatial information, which has nothing to do with causality requirement. Thus, the application of the causality-based z-transform theorem on the convolution sum cannot be used without difficulty in this case. This paper proves the z-transform theorem on the discrete convolution sum without causality requirement, and make it possible for the theorem to be used in analysis and design for any cases.

Key Words : z변환, 역 z변환, 이산 콘볼루션 적산, 인과성

1. 서 론

디지털 신호처리 시스템의 해석과 설계의 수학 도구로 일반적으로 z변환(z-transform)이 유용하게 사용된다. 샘플-데이터 제어시스템(sampled-data control systems)에 있어서나, 혹은 일반적인 디지털 신호처리 시스템에 있어서나 입력에 대한 출력의 식은 이산 입력 신호와 시스템의 임펄스 응답과의 이산 컨볼루션 적산(discrete convolution sum)의 형태로 주어지는 경우가 많은데, 이 경우 컨볼루션 적산의 z변환을 취하면 입력과 시스템의 각각의 z변환식의 곱으로 표현됨이 증명되어 있다. 이 이론에 의하여 입력과 출력이 z영역에서 대수적 관계가 되어 시스템의 해석과 설계를 가능하게 한다. 거의 모든 참고 문헌에 의하면 컨볼루션 적산의 z변환의 증명에는 시스템의 임펄스 응답식의 인과성(causality)이 필요하게 된다[1-7]. 물론 선형의 시스템에 있어서 시간영역에서 시스템의 출력이 컨볼루션 적산의 형태로 주어지는 것은 시스템의 인과성과 선형성에 의하는 것이므로, 이의 z변환의 증명에 인과성의 성질을 이용함은 큰 제한 조건이 아니다. 그러나 컨볼루션 적산이 인과성과 관계가 없이 정의되는 경우는 이 식의 z-변환의 유도 과정에 인과성을 적용할 수 없을 것이다.

* 正 會 員 : 中央大 工大 電子電氣工學部 敎授 · 工博
** 正 會 員 : 中央大 工大 制御計測工學科 博士課程
接受日字 : 2002年 9月 13日
最終完了 : 2002年 11月 10日

영상 이미지 처리 등의 디지털 신호처리의 영역에서 출력이 시간의 함수가 아니고 공간 위치의 함수 등으로 표현되는 경우에서와 같이, 디지털 신호처리의 필요에 의하여 출력 신호를 입력과 신호처리 함수의 컨볼루션 적산으로 표현할 수 있다. 따라서 인과성의 조건이 없이 두 함수의 컨볼루션 적산의 형태로 주어진 식의 z변환에 대한 연구가 필요하다. 본 논문에서는 이산 컨볼루션 적산의 형태로 주어진 식의 z변환은, 인과성과 관계없이 모든 경우에 다 같이 성분 함수 각각의 z변환의 곱으로 표현됨을 인과성의 조건을 적용하지 않고 증명하여 이의 응용에 제한 조건을 없앴다.

2. 인과성과 이산 Convolution 적산의 z변환

일반적으로 이산 신호의 수열의 양의 방향 z변환은 아래와 같이 정의된다 [1-7]:

$$\begin{aligned} C(z) &= Z\,[c(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} c(k) z^{-k} \\ &= c(0) + c(1)z^{-1} + \cdots + c(k)z^{-k} + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

이러한 이산 신호는 연속 신호 $c(t)$를 주기 T로 샘플한 값,

$c(kT)$로 정의되기도 하지만, 순수한 디지털 영역에서 규정되기도 한다[1-7]. 공학분야에 있어서의 전형적인 임펄스 응답은 지수함수(등비수열)의 형태로 주어지며 위 정의에 의한 z변환은 다음과 같다.

$$g(k) = p^k \tag{2}$$

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\,[p^k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (pz^{-1})^k = \frac{z}{z-p} \end{aligned} \tag{3}$$

주목할 점은 z변환식에서 매개변수 z는 무한 급수가 수렴하도록 하는 조건을 만족하는 복소수라는 것이 매번 언급되지 않아도 암묵적으로 이해되고 있다는 것이다. 물론 (3)의 경우의 수렴조건은 아래와 같다.

$$|\,pz^{-1}\,| < 1 \tag{4}$$

식 (3)에 정의한 z변환의 역변환은 아래와 같이 표현된다.

$$g(k) = Z^{-1}\left[\frac{z}{z-p}\right] = p^k \tag{5}$$

그림 1은 기본적인 선형 디지털 신호처리 혹은 샘플-데이터 제어시스템의 블록선도이다. 그림 1의 플랜트는 현재 초기치가 없는 상태로, 시간 0에서 임펄스를 인가하면 출력은 $g(k)$로 주어진다고 하자. 시간 j에서 $e(j)$크기의 임펄스가 가해질 경우 시간 k까지는 경과시간이 $k-j$이며 따라서 시간 k에서의 응답은 $g(k-j)e(j)$가 된다. 연속 임펄스 입력 $e(k)$를 순차적으로 인가하면 시간 k $(k \ge j)$ 에서의 플랜트의 응답은 플랜트가 선형인 관계로 이 시점까지 인가된 모든 임펄스에 대한 응답의 중첩에 의하여 다음과 같이 이산 컨볼루션의 적산으로 주어진다:

$$c(k) = \sum_{j=0}^{k} g(k-j)e(j) \tag{6}$$

식 (6)은 시간 영역에서 입력과 출력의 관계를 규정하는 식으로, 이 식의 관계에 z변환을 취하면 다음과 같은 대수적 관계가 유도된다.

$$C(z) = G(z)E(z) \tag{7}$$

식 (7)의 관계는 (6)에 주어진 것과 같이 출력이 입력과 플랜트 임펄스 응답과의 컨볼루션 적산으로 주어지는 경우, 출력의 z변환이 입력의 z변환과 플랜트의 z변환의 곱으로 표시되는 것을 나타낸다. 따라서 (7)의 관계에 의하여, 일반 디지털 시스템이나 샘플-데이터 제어시스템에서 입력과 출력간의 z영역에서의 대수적인 전달함수 관계를 이용하여, 시스템의 해석과 설계가 대수적 방법으로 가능하게 된다.

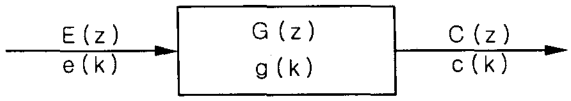

그림 1 기본적인 샘플-데이터 제어 혹은 디지털 신호처리 시스템

Fig. 1 A sampled-data control or digital signal processing system.

대부분의 디지털 제어공학이나 신호처리의 교과서/참고서는 (6)의 규정과 (6)으로부터 (7)의 관계를 유도하는 증명을 상세히 제공한다 [1-7]. 그러나 본 논문에서의 이론 전개의 필요에 의하여, 그리고 본 논문이 제안하는 이론과의 비교를 위하여, 이산 컨볼루션의 z변환을 예시한 참고 문헌들이 증명하는 방법으로 이 논문에 다시 기술하여 상호비교를 용이하게 하고자 한다. (6)의 양변에 z변환을 취하면 아래와 같다.

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} g(k-j)e(j)\right)z^{-k} \tag{8}$$

이 식에서 안쪽 적산 $\left(\sum_{j=0}^{k}\right)$은 바깥 적산 $\left(\sum_{k=0}^{\infty}\right)$의 인덱스 변수 k의 함수가 되므로 적산의 순서를 조건 없이 임의로 바꿀 수는 없으며, 따라서 위 식을 각각의 함수의 z변환들의 관계로 변형할 수 없다. 그러나 만약 플랜트의 응답식이 인과성을 만족한다면, 즉 $k < 0$ 에 대하여 $g(k) = 0$ 의 조건을 만족한다면, 안쪽 적산 $\left(\sum_{j=0}^{k}\right)$의 위 끝을 k에서 ∞로 연장할 수 있다 [1-7]:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} g(k-j)e(j)\right)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} g(k-j)e(j)\right)z^{-k} \end{aligned} \tag{9}$$

식 (9)에서와 같이 안쪽 적산의 인덱스 변수의 끝 값을 ∞로 연장함으로써, 두 적산의 상호 의존성을 해소하여 위 식이 수렴하는 z의 범위에서 바깥과 안쪽의 적산의 순서는 바꿀 수 있으므로 다음과 같이 식을 전개할 수 있다 [1-7].

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} g(k-j)e(j)\right)z^{-k} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} g(k-j)e(j)z^{-k}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(e(j)z^{-j}\sum_{k=0}^{\infty} g(k-j)z^{-(k-j)}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(e(j)z^{-j}\sum_{k-j=-j}^{\infty} g(k-j)z^{-(k-j)}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(e(j)z^{-j}\sum_{k-j=0}^{\infty} g(k-j)z^{-(k-j)}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} e(j)z^{-j}G(z)$$
$$= G(z)\sum_{j=0}^{\infty} e(j)z^{-j} = G(z)E(z) \qquad (10)$$

위 등식의 네 번째 식으로부터 다섯 번째 식으로의 변형에서, 안쪽 적산의 시작점을 $k-j=-j$에서 $k-j=0$으로 치환한 것은 인덱스변수 $k-j$가 $-j \le k-j \le -1$의 범위에서 $g(k-j)=0$이 되는 인과성을 다시 한번 이용한 것이다. 다섯 번째 식에서 바깥쪽 적산의 인덱스 변수 j는 0보다 크거나 같은 변수이지만 안쪽의 적산의 과정에서는 $j \ge 0$인 상수로 취급되어야 하며, 따라서 (1)의 정의에 의하여 그 결과는 j값에 관계가 없이 $G(z)$가 된다.

본 논문에서 강조하고자 하는 점은 (8)에서 (9)와 (10)으로의 전개 과정은 함수 $g(k)$의 인과성, 즉 $k<0$에서 $g(k)=0$이 됨을 필요로 하였다[1-7]. 물론 (6)에 주어진 이산 컨볼루션의 관계가 처음부터 신호의 인과성으로부터 유도된 경우라면 이 식의 z변환의 전개과정에 인과성 조건을 적용해도 아무런 논리적 문제점이 없다. 하지만 서론에서 언급하였듯이 모든 디지털 신호처리의 관계식이 인과성의 관계에서 유도되는 것은 아니다. 그러므로 다음의 장에서는 두 함수의 이산 컨볼루션 적산의 형태로 주어진 식의 z변환을 인과성의 조건과 관계없이 고려하여 보자.

3. 비 인과성 이산 Convolution 적산의 z변환

서론에서 언급하였듯이 영상 이미지 처리 등의 디지털 신호처리의 영역에서 출력이 시간의 함수가 아니고 공간 위치의 함수 등으로 표현되는 경우에서도, 시간상의 원인결과의 관계가 없이 디지털 신호처리의 필요에 의하여 (6)과 같이 출력 신호를 입력과 신호처리 알고리즘 함수의 이산 컨볼루션 적산으로 표현할 수 있다. 식의 전개를 위하여 이 식을 다시 기술하면 아래와 같다:

$$c(k) = \sum_{j=0}^{k} g(k-j)e(j) \qquad (11)$$

여기서 $g(k)$, $e(k)$, 그리고 $c(k)$는 각각 신호처리 함수, 입력함수, 그리고 출력함수이다. (11)의 양변에 z변환을 취하면 아래와 같다.

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} g(k-j)e(j)\right)z^{-k} \qquad (12)$$

위 식에서 $g(k)$는 인과성이 보장된 함수가 아니므로 $g(k)$는 $k<0$인 k에 대하여 항상 0이 되는 것은 아니다. 따라서 (12)에서 안쪽 적산 $\left(\sum_{j=0}^{k}\right)$의 위 끝을 k에서 ∞로 연장할 수 없으며, 나아가 이 식의 현재 형태로는 안쪽 적산 $\left(\sum_{j=0}^{k}\right)$과 바깥 적산 $\left(\sum_{k=0}^{\infty}\right)$의 순서를 바꾸는 것이 당연하게 받아들여질 수는 없다.

식 (12)의 바깥 적산을 인덱스 변수 k에 대하여 각 항을 계산하여 나열하고 덧셈의 순서를 가로에서 세로로 바꾸어 보자:

$$\begin{aligned}
C(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} g(k-j)e(j)z^{-k} \\
&= \sum_{j=0}^{0} g(0-j)e(j)z^{-0} + \sum_{j=0}^{1} g(1-j)e(j)z^{-1} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{2} g(2-j)e(j)z^{-2} + \cdots \\
&= g(0)e(0) \\
&\quad + g(0)e(1)z^{-1} + g(1)e(0)z^{-1} \\
&\quad + g(0)e(2)z^{-2} + g(1)e(1)z^{-2} \\
&\quad + g(2)e(0)z^{-2} \\
&\quad + g(0)e(3)z^{-3} + g(1)e(2)z^{-3} \\
&\quad + g(2)e(1)z^{-3} + g(3)e(0)z^{-3} \\
&\quad \vdots \\
&= g(0)\ \{e(0)+e(1)z^{-1}+e(2)z^{-2}+e(3)z^{-3}+\cdots\} \\
&\quad g(1)z^{-1}\ \{e(0)+e(1)z^{-1}+e(2)z^{-2}+e(3)z^{-3}+\cdots\} \\
&\quad g(2)z^{-2}\ \{e(0)+e(1)z^{-1}+e(2)z^{-2}+e(3)z^{-3}+\cdots\} \\
&\quad g(3)z^{-3}\ \{e(0)+e(1)z^{-1}+e(2)z^{-2}+e(3)z^{-3}+\cdots\} \\
&\quad \vdots \\
&= \{g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + g(3)z^{-3} + \cdots\}E(z) \\
&= G(z)\,E(z)
\end{aligned} \qquad (13)$$

위 식의 두 번째 식에서 안쪽 적산의 항들을 세 번째 등식에서는 j변수를 마지막 값부터 0까지 거꾸로 적용하여 각각 수평으로 나열하였으며, 네 번째 식에서는 이를 다시 수직방향으로 덧셈을 하였다. (13)의 최종 결과를 다시 기술하면 아래와 같으며, 이 결과는 $g(k)$ 함수의 인과성의 조건이 없이 증명되었다.

$$C(z) = Z\left\{\sum_{j=0}^{k} g(k-j)e(j)\right\} = G(z)\,E(z) \qquad (14)$$

식 (13)에서 $G(z)$와 $E(z)$는 각각 $g(k)$와 $e(k)$의 z변환으로 다음과 같다.

$$E(z) = e(0) + e(1)z^{-1} + e(2)z^{-2} + e(3)z^{-3} + \cdots \qquad (15)$$

$$G(z) = g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + g(3)z^{-3} + \cdots \qquad (16)$$

위의 두 성분 함수의 z변환에서 z변환을 위한 각각의 수렴범위가 독립적으로 존재한다. (13)의 전개과정에서 이산 컨볼루션 함수 $c(k)$의 z변환의 수렴은 성분함수의 z변환의 수렴, 즉 (15)와 (16)의 수렴 조건의 공통부분이 됨을 알 수 있다.

4. 결 론

이 논문에서는 디지털 신호처리에 나타날 수 있는 이산 컨볼루션의 적산형태의 식에 대한 z변환을 성분 함수 각각의 z변환식들의 곱으로 표시할 수 있음을 신호의 인과성의 조건을 적용함이 없이 증명하였다. 따라서 인과성 시스템이나 비인과성 시스템의 두 경우 모두에 이산 컨볼루션 적산식의 z변환 정리를 적용할 수 있는 이론적 바탕을 제공하여, 시스템 설계나 해석에 이론적 어려움 없이 이용할 수 있도록 하였다.

참 고 문 헌

[1] Kuo, B. C., *Digital Control Systems,* 2nd ed., Saunders College Publishing, Ft. Worth, 1992

[2] Kuo, B. C., *Automatic Control Systems*, 7th ed., Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1995

[3] Phillips, C. L., and H. T. Nagle, Jr., *Digital Control System . Analysis and Design*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.

[4] Ogata, K., *Discrete-Time Control Systems,* 2nd ed., Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1995

[5] Openheim, A. V. and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1989

[6] Poularikas A. D. and S. Seely, *Signal and Systems,* 2nd ed., PWS-KENT Publishing Company, Boston, Mass., 1991

[7] McGillem C. D. and G. R. Cooper, *Continuous and discrete Signal and System Analysis*, 2nd ed., CBS College Publishing Co., 1984