

不安定 Link 構造物の 形態解析에 關한 研究

Shape Finding of Unstable Link Structures

김재열*
Kim, Jae-Yeol

Abstract

There exists a structural problem for link structures in the unstable state. The primary characteristics of this problem are in the existence of rigid body displacements without strain, and in the possibility of the introduction of prestressing to change an unstable state into a stable state. When we make local linearized incremental equations in order to obtain knowledge about these unstable structures, the determinant of the coefficient matrices is zero, so that we face a numerically unstable situation. This is similar to the situation in the stability problem. To avoid such a difficult situation, in this paper a simple and straightforward method was presented by means of the generalized inverse for the numerical analysis of stability problem.

keywords : Link structure, Rigid body displacement, Numerically unstable situation, Generalized inverse matrix

1. 서론

대공간을 구성하는 구조물중에 케이블이나 막같은 연성구조물은 그 구조물 자체의 특성상 휨 강성을 가지지 못하기 때문에 초기에 구조물의 형태가 불안정하다. 따라서 초기에 불안정한 형태를 안정한 형태로 이행하기 위한 과정이 필요하다. 이 과정을 불안정 구조물의 안정화 이행과정이라고 한다. 불안정 구조물을 안정화시킬 수 있는 방법으로는 유한요소법, 내력밀도법, 동적이완법 등등이 있지만, 본 연구에서는 일반역행렬을 이용하여 불안정 구조물을 안정화시키는 방법에 대하여 서술했다. 형태불안정 구조물은 강체변위(변형없이 변위만 존재)가 발생하게 된다. 불안정 구조물이 안정한 상태가 되면 강체변위는 일어나지 않게 되고, 바로 이 단계가 구조물이 안정화되었다고 할 수 있다.

다음으로, 불안정 구조물을 안정화시키는 이행과정은 불안정 구조물의 기하학적인 관계식으로부터

얻을 수 있는 증분변위를 이용하는 것이다. 이 증분변위를 가지고 최소 포텐셜 에너지의 원리를 이용하여 최종적으로 구조물이 안화된 상태를 찾을 수 있다. 여기서 불안정 구조물의 기하학적인 관계식을 살펴보면 수치적인 불안정성이 생기게 됨을 알 수 있다.

본 논문에서는 이 수치적인 불안정성을 일반역행렬을 이용하여 해결하는 방법과 불안정 구조물을 안정화시키는 형태해석법에 대해서 다루고자 한다.

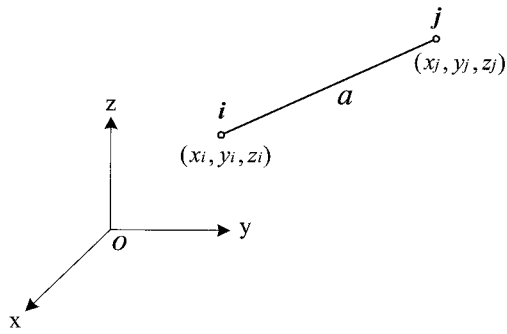
2. 운동방정식

2.1 기하학적 관계식

절점 (i, j) 의 좌표값과 부재 a 의 방향코사인을 벡터로 나타내면 다음식과 같다.

$$X_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, X_j = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}, \lambda_a = \begin{bmatrix} \lambda_{ij} \\ \mu_{ij} \\ \nu_{ij} \end{bmatrix} \quad (1)$$

* 정회원 · 협성대학교 건축공학과 전임강사



〈그림 1〉 부재와 절점좌표

부재의 길이 l_a 는 다음과 같이 된다.

$$l_a = [(X_j - X_i)^T (X_j - X_i)]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

식(1)과 식(2)를 이용하여 방향코사인 벡터 λ_a 를 구하면 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\lambda_a = \frac{1}{l_a} (X_j - X_i) \quad (3)$$

식(3)을 미분하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\dot{\lambda}_a = \frac{1}{l_a} (\dot{X}_j - \dot{X}_i) - \frac{\dot{l}_a}{l_a^2} (X_j - X_i) \quad (4)$$

식(2)를 미분하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\dot{l}_a = \lambda_a^T (\dot{X}_j - \dot{X}_i) \quad (5)$$

식(5)를 미분하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\ddot{l}_a = \lambda_a^T (\ddot{X}_j - \ddot{X}_i) + \dot{\lambda}_a^T (\dot{X}_j - \dot{X}_i) \quad (6)$$

식(5)를 매트릭스의 형태로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$[-\lambda_a^T \quad \lambda_a^T] \begin{bmatrix} \ddot{X}_i \\ \ddot{X}_j \end{bmatrix} = \ddot{l}_a \quad (7)$$

식(7)을 전체로 확장하고 좌변의 첫째항을 A 로

놓으면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$A \dot{X} = \dot{l} \quad (8)$$

식(8)을 미분하면 다음과 같다.

$$A \ddot{X} + \dot{A} \dot{X} = \ddot{l}, \quad \dot{A} = \dot{A}(l, \dot{X}) \quad (9)$$

여기서, 자유도수를 n , 부재수를 m 이라고 하면, A 는 (m, n) 형 매트릭스가 된다. 불안정 강체트러스에서는 부재의 길이의 변화가 일어나지 않으므로, 식(8)과 식(9)에서 우변에 있는 \dot{l} 과 \ddot{l} 은 0이 된다. 따라서 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$A \dot{X} = 0 \quad (10)$$

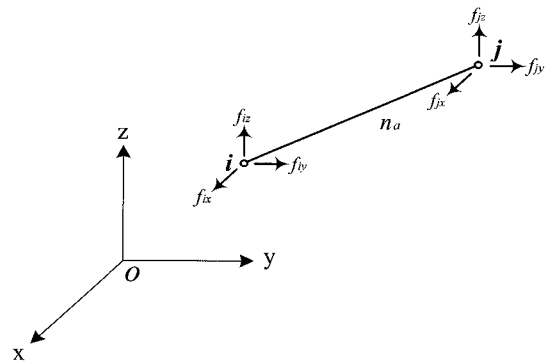
$$A \ddot{X} + \dot{A} \dot{X} = 0 \quad (11)$$

식(10)과 식(11)이 불안정 구조물의 기하학적인 관계를 나타내는 식이다.

2.2 역학적 관계식

〈그림 2〉에서 i, j 절점에 작용하는 절점하중을 벡터로 표시하면 다음과 같다.

$$f_{ia} = \begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{iz} \end{bmatrix}, \quad f_{ja} = \begin{bmatrix} f_{jx} \\ f_{jy} \\ f_{jz} \end{bmatrix} \quad (12)$$



〈그림 2〉 축력과 절점력

부재 a 에 대한 평형방정식을 세우면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -\lambda_a \\ \lambda_a \end{bmatrix} n_a = \begin{bmatrix} f_{ia} \\ f_{ja} \end{bmatrix} \quad (13)$$

식(13)을 구조물 전체로 확장하면 다음식과 같다.

$$A^T n = f \quad (14)$$

식(14)를 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수가 있다.

$$A^T \dot{n} + \dot{A}^T n = \dot{f} \quad (15)$$

식(14)와 식(15)가 불안정 구조물의 역학적 관계를 나타내는 식이다.

2.3 증분 방정식과 최소 포텐셜 에너지의 원리를 이용한 형태해석

2.1장에서 구한 현재시점의 속도와 가속도를 가지고 증분변위를 구하여 다음단계의 위상을 구할 수 있고, 현재시점의 포텐셜 에너지를 구할 수 있다. 다음으로, 최소 포텐셜 에너지의 원리를 이용하여 포텐셜 에너지가 최소가 되는 시점, 즉 정류점을 찾으면 그 단계에서 해석을 멈춘다. 그 정식화과정을 살펴보면,

$$X_{i+1} = X_i + \Delta X_i \quad (16)$$

여기서 ΔX_i 를 Maclaurin급수로 전개하면 다음식과 같다.

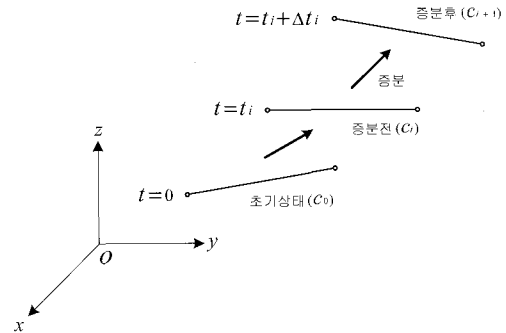
$$\Delta X_i = \dot{X}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{X}_i (\Delta t)^2 + \dots \quad (17)$$

포텐셜 에너지는 증분 변위를 이용하여 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\Delta \Pi = -\Delta X \cdot F \quad (18)$$

식(18)의 포텐셜 에너지를 단계별로 점점 감소시켜나가다가 0이 되는 시점에서 해석을 멈춘다. 바로

그 점이 포텐셜 에너지가 최소가 되는 시점이고 최종적으로 안정된 형상을 갖는 시점이다.



〈그림 3〉 초기상태와 증분전후의 부재변위

3. 일반역행렬

식(10)에서 나타나는 방향코사인 매트릭스인 A 는 장방형 매트릭스가 되어 수치적인 불안정성이 발생한다. 따라서 이러한 문제를 해결할 수 있는 일반역행렬을 도입한다.

3.1 일반역행렬의 정의

일반역행렬은 다음과 같이 정의할 수 있다. 「 A 를 (m, n) 형 매트릭스라고 할 때, 다음의 조건을 전부 만족하는 매트릭스 A^- 가 A 의 일반역행렬이다.

$$\begin{aligned} (AA^-)^T &= AA^- \\ (A^-A)^T &= A^-A \\ AA^-A &= A \\ A^-AA^- &= A^- \end{aligned} \quad (19)$$

3.2 해의 형식과 본 논문에서의 적용

A 가 (m, n) 형 매트릭스이고, 벡터 b 를 갖는 아래의 식을 고려하자.

$$Ax = b \quad (20)$$

이 때, 식(20)를 만족하는 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x = A^{-1}b + [I_n - A^{-1}A]a \quad (21)$$

여기서, $A^{-1}b$ 를 특해(particular solution)라 하고, 나머지 부분을 여해(homogeneous solution)라 한다. 일반역행렬의 성질을 이용하면 식(21)의 우변의 둘째항은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$[I_n - A^{-1}A]a = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_n h_n \quad (22)$$

h_1, h_2, \dots, h_n 중에서 독립인 열벡터의 수를 p 개 라고 하면, 종속인 벡터는 독립인 벡터에 흡수되므로, 식(22)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[I_n - A^{-1}A]a = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_p h_p \quad (23)$$

여기서 임의의 벡터 a 에 따라 식(21)의 해가 결정된다. 이 a 값은 하중에 따라 결정된다.

본 논문에서는 식(10)과 식(11)에 위와 같은 일반역행렬이 이용된다.

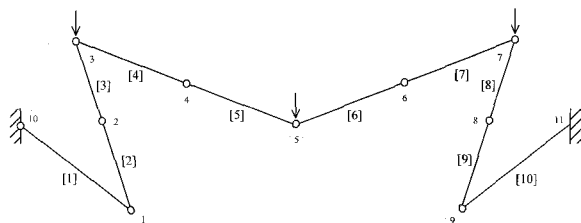
4. 예제해석 및 결과

4.1 예제 구조물 I

<그림 4>에 나타난 예제구조물은 절점 11개, 부재 10개로 구성된 2차원 구조물이다. 하중은 ③, ⑤, ⑦ 절점에 각각 단위하중 1을 주었다.

<그림 4>는 절점번호 및 부재번호를 나타낸 것이고, <표 1>은 해석결과를 나타낸 것이다. 각 단계별 형상변화는 <그림 5>와 <그림 6>에 나타내었고, 최종형상 <그림 7>에 나타내었다.

9>, <그림 10>에 각각 단계별 포텐셜 에너지의 변화

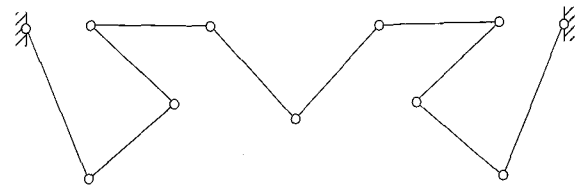


<그림 4> 절점번호 및 부재번호

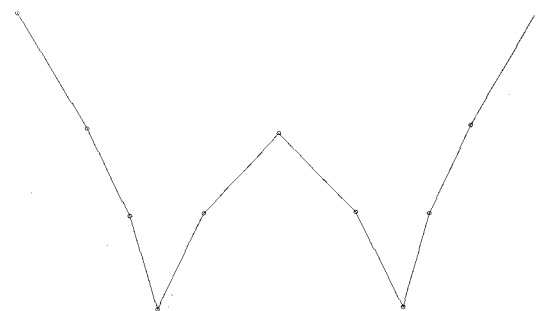
율, 부재축력, 부재의 길이변화를 나타내었다. 그림 8에서 보는 바와 같이, iteration 200까지는 포텐셜 에너지가 점점 증가하다가, 그 이후로는 감소하여 최종단계에서는 0이 됨을 알 수 있었다. <그림 9>와 <그림 10>에서 보는 바와 같이, 부재축력은 최종단계에서 모든 부재가 인장만을 받는다는 것을 알 수 있으며, 부재의 길이변화는 일어나지 않는다는 것을 알 수 있다.

<표 1> 해석전·후의 절점좌표

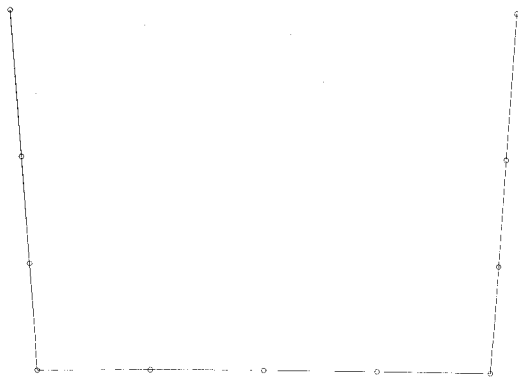
절점번호	절점좌표(초기상태)		절점좌표(최종상태)	
	x	y	x	y
1	20.000	-20.000	8.162	-27.079
2	15.000	0.000	14.108	-46.818
3	10.000	20.000	20.049	-66.559
4	30.000	10.000	35.028	-83.168
5	50.000	0.000	50.000	-99.777
6	70.000	10.000	64.971	-83.168
7	90.000	20.000	79.950	-66.559
8	85.000	0.000	85.891	-46.818
9	80.000	-20.000	91.837	-27.079
10	0.000	0.000	0.000	0.000
11	100.000	0.000	100.000	0.000



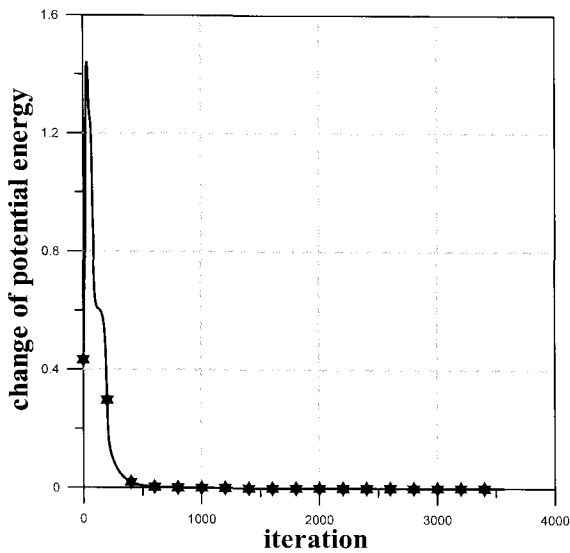
<그림 5> Iteration 450



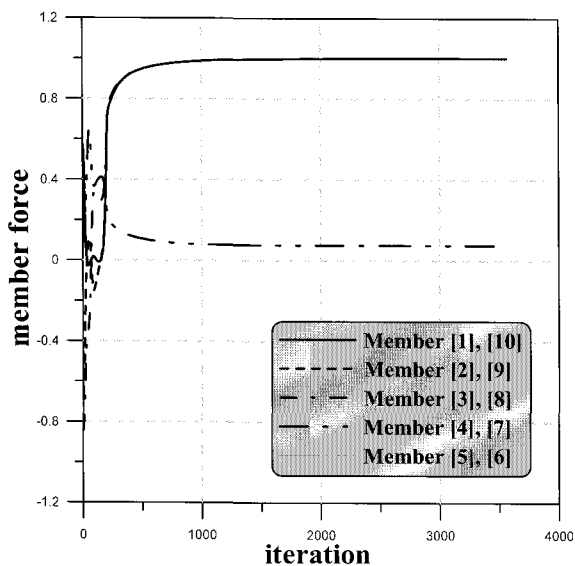
<그림 6> iteration 840



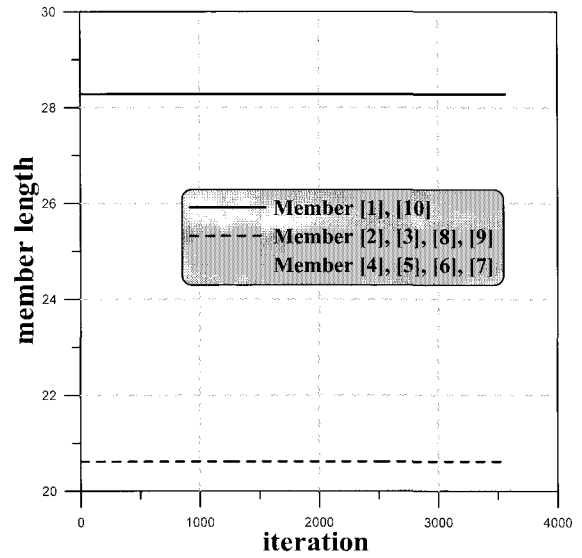
〈그림 7〉 최종형상



〈그림 8〉 포텐셜 에너지의 변화율



〈그림 9〉 부재축력



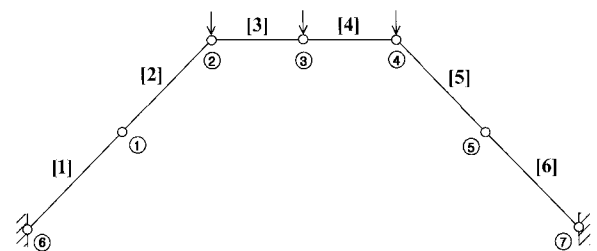
〈그림 10〉 부재의 길이변화

4.2 예제 구조물 II

본 예제는 절점 7개, 부재 6개로 구성된 간단한 구조물이다. 하중은 ②, ③, ④절점에 각각 단위하중 1을 주어서 해석을 수행하였다.

절점번호 및 부재번호는 <그림 4>와 같고, 해석결과는 <표 1>에 나타내었다. ΔX 의 수렴과정은 <그림 5>에 나타내었고, <그림 6>은 포텐셜 에너지의 변화율을 나타내고 있다. 부재력의 변화, 길이의 변화, 그리고 수렴과정을 각각 <그림 7>, <그림 8>, 그리고 <그림 9>에 나타내었다. <그림 6>에서 보는 바와 같이, 포텐셜 에너지의 변화율은 단계를 진행할수록 0에 접근하고 최종단계에서는 0이 됨을 알 수 있다. 또한 최종단계에서 모든 부재는 인장만을 받는 요소가 되고, 전 단계에 걸쳐서 부재의 길이변화는 일어나지 않음을 알 수 있다.

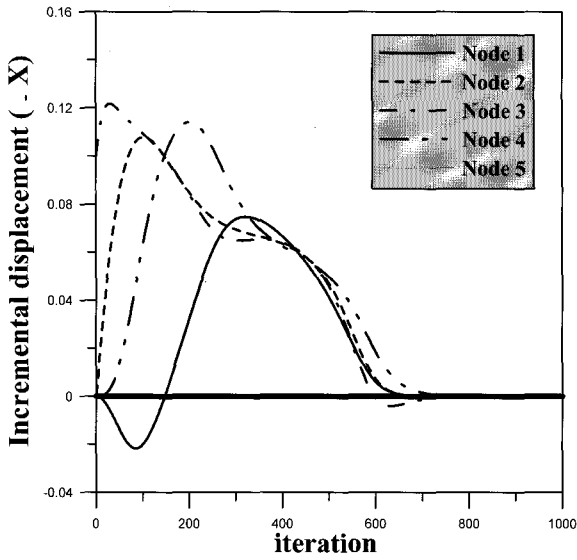
<표 1> 해석결과



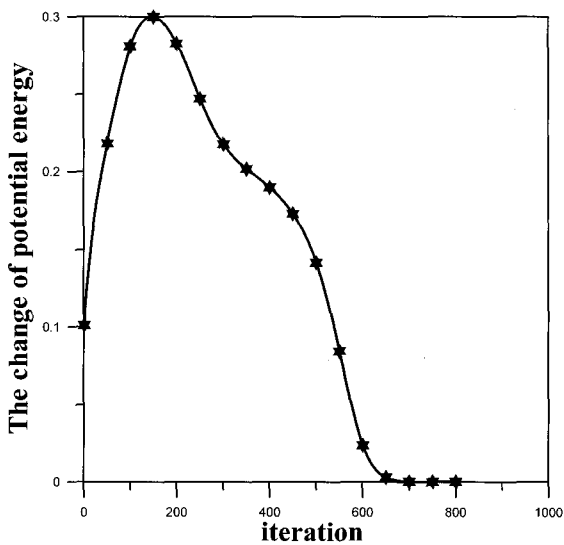
〈그림 11〉 절점번호 및 부재번호

〈표 2〉 해석전·후의 절점좌표

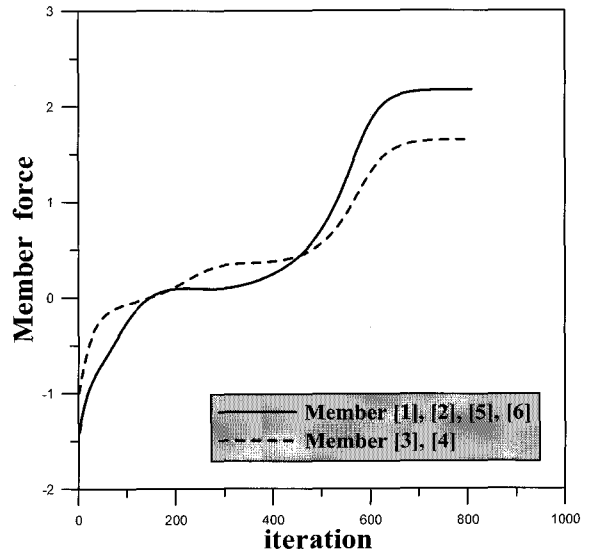
절점번호	절점좌표(초기상태)		절점좌표(최종상태)	
	x	y	x	y
1	10.000	10.000	10.258	-9.751
2	20.000	20.000	20.507	-19.498
3	30.000	20.000	30.000	-22.508
4	40.000	20.000	39.493	-19.498
5	50.000	10.000	49.742	-9.751
6	0.000	0.000	0.000	0.000
7	60.000	0.000	60.000	0.000



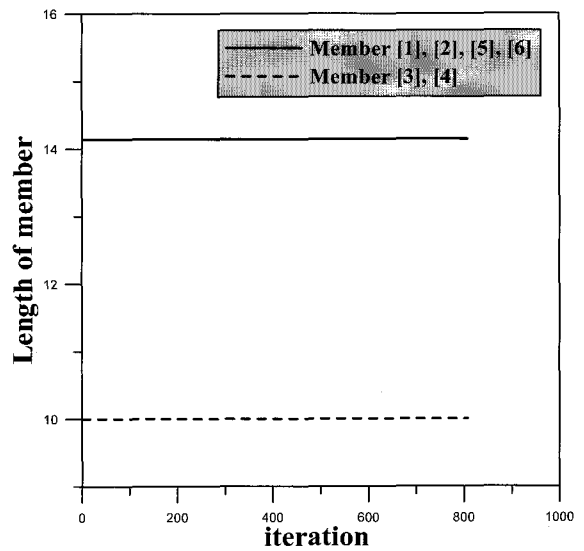
〈그림 12〉 증분 변위(ΔX)의 수렴과정



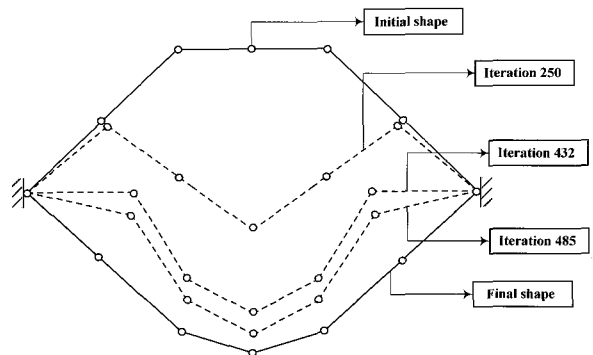
〈그림 13〉 포텐셜 에너지의 변화율



〈그림 14〉 부재력



〈그림 15〉 부재의 길이변화



〈그림 16〉 안정화 이행과정

5. 결 론

본 논문은 일반역행렬을 이용하여 수치적인 불안정성을 해결함으로써 불안정 트리스 구조물이 안정화되어가는 과정에 대한 해석법을 제시하였고 다음과 같은 결론을 얻을 수가 있었다.

구조물의 안정화점을 찾는 데 사용한 최소 포텐셜 에너지법은 불안정 구조물의 최종적인 평형형상을 찾는 데 유용하다는 것을 알 수 있으며, 수치적인 불안정성을 해결하는 데 일반역행렬이 유용하고, 해의 존재가 무한하기 때문에 다양한 경로로써 구조물이 안정화될 수 있다는 것을 알 수 있었다. 그리고 부재의 축력은 우리가 추구하고자 하는 형상을 구하는 데 있어서 모든 부재가 인장을 받는 요소가 된다는 것을 알 수 있었다. 따라서 본 논문에서 제시하는 불안정 구조물의 형태해석법은 구조물의 불안정한 메카니즘으로써 발생하는 수치적인 불안정성을 매트릭스 수치해석 기법인 일반역행렬을 사용함으로써 안정화 경로를 찾는 데 매우 유용한 방법이라고 생각된다.

참 고 문 헌

1. Maxwell, J. C., *On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames*, Philosophical Magazine, 1985, Vol. 27.
2. 半谷裕彦, 川口建一, *形態解析*, 1991, pp. 21~42, 67~93.
3. Tauchert, Theodore R., *Energy Principles in Structural Mechanics*, McGRAW-HILL, 1974, pp. 72

~77.

4. Kawaguchi, Kenichi and Hangai, Yasuhiko, *Analysis of Stabilizing Paths and Stability of Kinematically Indeterminate Frameworks*, Proceedings of the Third Summer Colloquium on Shell and Spatial Structures, August 7-10, 1990.
5. Tanaka, H. and Hangai, Y., *Rigid Body Displacement and Stabilization Condition of Unstable Structures*, Proceedings IASS Symposium, Osaka, Vol. 2, pp. 55~62, 1986.
6. 신항균, 이광연, 이상구, 천기선, *선형대수학과 응용*, 경문사, pp. 188~196, 1998.
7. 한상을, 이경수, 이상진, 동적이완법에 의한 불안정 구조물의 안정화 이행과정 해석에 관한 연구, 한국강구조학회 논문집, 1999, 11권 6호, pp. 591~602.
8. 김재열, 이장복, 권택진, 一般逆行列을 利用한 케이블네트 構造物の 形狀決定에 關한 연구, 대한건축학회 논문집, 2000.6, 16권 6호, pp. 3~12.
9. Hangai, Y. and Kawaguchi, K., *Analysis for Shape-Finding of Unstable Link Structures in the Unstable State*, Proceedings of the International Colloquium on Space Structures for Sports Buildings, 1987, pp. 104~111.
10. Hangai, Y. and Kawaguchi, K., *Introduction of Higher Order Terms into the Analysis for Shape-Finding of Unstable Link Structures*, Proceedings of IASS-MSU Symposium, Istanbul, 1988, pp. 471~478.