

유한요소법의 정도수렴

The Convergence of Accuracy Ratio in Finite Element Method

조 순 보
Cho, Soon-Bo

Abstract

If we use a third order approximation for the displacement function of beam element in finite element methods, finite element solutions of beams yield nodal displacement values matching to beam theory results to have no connection with the number increasing of elements of beams.

It is assumed that, as the member displacement value at beam nodes are correct, the calculation procedure of beam element stiffness matrix have no numerical errors.

As the member forces are calculated by the equations of $\frac{-M}{EI} = \frac{d^2\omega}{dx^2}$ and $\frac{dM}{dx} = V$, the member forces at nodes of beams have errors in a moment and a shear magnitudes in the case of smaller number of element.

The nodal displacement value of plate subject to the lateral load converge to the exact values⁽¹⁾ according to the increase of the number of the element.

So it is assumed that the procedures of plate element stiffness matrix calculations has a error in the fundamental assumptions.

The beam methods for the high accuracy ratio solution is also applied to the plate analysis. The method of reducing a error ratio of member forces and element stiffness matrix in the finite element methods is studied.

Results of study were as follows.

1. The matrixes of $EI[B]$ and $[K]$ in the equations of $M(x) = EI[B]\{q\}$ and $M(x) = [K]\{q\} + \{Q\}$ of beams are same.
2. The equations of $\frac{-M}{EI} = \frac{d^2\omega}{dx^2}$ and $\frac{dM}{dx} = V$ for the member forces have a error ratio in a finite element method of uniformly loaded structures, so equilibrium node loads $\{Q\}$ must be substituted in the equation of member forces as the numerical examples of this paper revealed.

keywords : Element stiffness matrix, Covergence of accuracy ratio

1. 서 론

보의 부재력산정을 위한 유한요소법해석에서 변위식을 3차식으로 가정한 경우 각절점의 대응변위 및 변위각의 크기는 요소의 숫자 증가에 관계없이 보이론에 의한 계산크기와 일치하여 보요소의 강성도식에 오차가 없음을 보여준다.^[2]

그러나 보의 moment의 크기는 $\frac{-M}{EI} = \frac{d^2\omega}{dx^2}$ 의 식에서 구하고 전단력은 $\frac{dM}{dx} = V$ 의 식에서 구하므로 등분포하중이 재하된 보의 부재력은 위의 식으로 구하는 경우 오차가 발생하고 요소의 숫자 증가

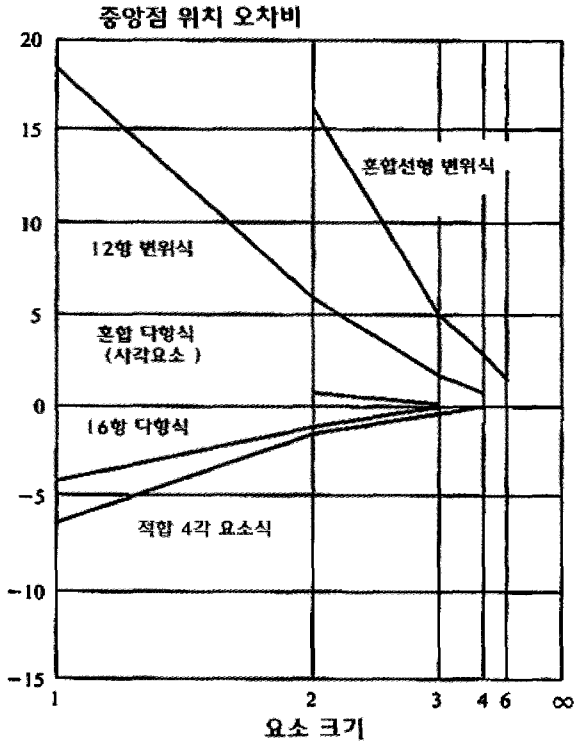
에 의하여 정확한값으로 수렴한다.

평판요소의 경우 정도 높은 평판요소의 강성도식을 구하기 위하여 많은 연구가 있었으며 <그림 1>에서와 같이 Fraeijs de Veubeke, Clough 와 Felippa에 의한 적합사각형요소(conforming quadrilateral element)식, Pian과 Cook에 의한 하이브리드 응력도요소(Hybrid stress element)식, Herrmann, Bron 과 Dhatt가 연구한 혼합판 휨요소(Mixed plate bending element)식 등 88개^[3]의 서로 다른요소식이 발표되었고 이 요소식은 요소수 증가와 함께 정확한 변위에 수렴하였다.

평판의 경우 처짐크기가 요소의 숫자증가에 따라 정확한 값으로 수렴하여 이는 보의 경우와는 다르다.

* 정회원 · 수원대 건축공학과 부교수, 공학박사

본연구는 보의 유한요소법에 의한 부재력산정 과정식의 전개과정에서 정도를 높이기 위한 방법을 연구하고 이결과를 판요소에 적용하여 판요소의 부재력의 크기도 정확한 값으로 수렴됨을 연구한다.



〈그림 1〉 단순지지 4각형요소의 중앙점 처짐정도비⁽⁴⁾

2. 보요소

보요소에서 강성도를 구하는 *moment*의 변화식은 1차식이므로 $\frac{-M}{EI} = \frac{d^2\omega}{dx^2}$ 에서 보요소의 변위식을 아래의 3차식으로 가정한다.

$$\omega(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (1-1)$$

$$\omega(x) = [1, x, x^2, x^3] \{a\} \quad (1-2)$$

$$\theta_x = \frac{d\omega}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (2)$$

보요소의 절점좌표를 대입하여

$$q = \begin{pmatrix} \omega_1(x=0) \\ \theta_1(x=0) \\ \omega_2(x=l) \\ \theta_2(x=l) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

$$\{q\} = [A] \{a\} \quad (3-2)$$

$$\{a\} = [A]^{-1} \{q\} \quad (3-3)$$

$$\omega(x) = [1, x, x^2, x^3] [A]^{-1} \{q\} = [C] [A]^{-1} \{q\} \quad (4)$$

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = [0, 0, 2, 6x] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^2} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \{q\} \quad (5-1)$$

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = [B] \{q\} = \left[-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}, -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2}, \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}, -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \right] \{q\} \quad (5-2)$$

보의 절점좌표 $x=0$ 및 $x=l$ 을 각각 대입하여

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{l^2} & -\frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & -\frac{2}{l} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \{q\} \quad (5-3)$$

$$\frac{V(x)}{EI} = \frac{d\omega^3}{dx^3} \text{에서}$$

$$\frac{d\omega^3}{dx^3} = [0, 0, 0, 6] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^2} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \theta_1 \\ \omega_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (6-1)$$

$$\frac{d\omega^3}{dx^3} = \left[\frac{12}{l^3}, \frac{6}{l^2}, -\frac{12}{l^3}, \frac{6}{l^2} \right] \{q\} \quad (6-2)$$

아래의 식으로 부재력을 구한다.

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ V_1 \\ M_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{-6}{l^2}, & \frac{-4}{l}, & \frac{6}{l^2}, & -\frac{2}{l} \\ \frac{12}{l^3}, & \frac{6}{l^2}, & \frac{-12}{l^3}, & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2}, & \frac{2}{l}, & \frac{-6}{l^2}, & \frac{4}{l} \\ \frac{12}{l^3}, & \frac{6}{l^2}, & \frac{-12}{l^3}, & \frac{6}{l^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \theta_1 \\ \omega_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (7-1)$$

$$M(x) = EI[B]\{q\} \quad (7-2)$$

보의 강성도 식 [K]는 위치에너지원리에서

$$M(x) = [K]\{q\} + \{Q\}$$

$$[K] = EI \int [B]^T [B] dx \quad (8-1)$$

$$[K] = EI \begin{bmatrix} \frac{6}{l^2}, & \frac{4}{l}, & \frac{-6}{l^2}, & \frac{2}{l} \\ \frac{12}{l^3}, & \frac{6}{l^2}, & \frac{-12}{l^3}, & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2}, & \frac{2}{l}, & \frac{-6}{l^2}, & \frac{4}{l} \\ \frac{-12}{l^3}, & \frac{-6}{l^2}, & \frac{12}{l^3}, & \frac{-6}{l^2} \end{bmatrix} \quad (8-2)$$

(7-1)식의 $EI[B]$ 와 (8-2)식의 [K]은 같은 유형이다.

보의 등가절점하중 {Q}은

$$\{Q\} = \int_0^l [C] [A]^{-1} \{p\} dx$$

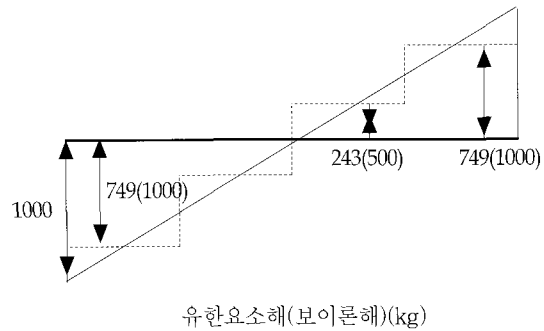
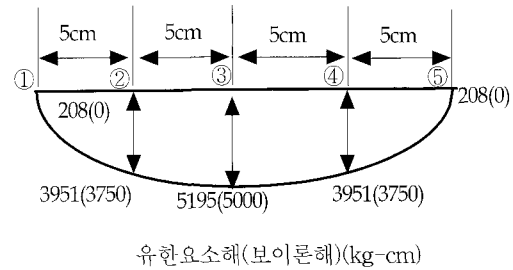
$$= \int_0^l [1 \ x \ x^2 \ x^3] [A]^{-1} \{p\} dx \quad (9-1)$$

$$\{Q\} = \begin{pmatrix} \frac{\omega l}{2} \\ \frac{p l^2}{12} \\ \frac{p l}{2} \\ -\frac{p l^2}{12} \end{pmatrix} \quad (9-2)$$

유한요소법의 부재력 산정식인 $\frac{-M}{EI} = \frac{d^2 \omega}{dx^2}$ 에 의한 (7-2)식으로 구하는 경우 $M(x) = [K]\{q\} + \{Q\}$

의 강성도 부재력산정식과 비교하여 등분포하중이 작용하는 구조물에 등가절점하중 {Q}를 부가해야 한다.

3. 수치 예제(1)



<그림 2> 보의 유한요소산정⁽⁸⁾

<그림 2>는 보의 길이가 20cm이고 단면의 크기 $b \times h = 1cm \times 2cm$ 인 단순보에 등분포하중 $p = 100 \text{ kg/cm}$ 가 작용할 때 모우멘트 및 전단력크기의 그림으로 유한요소법 및 보이론에 의한 값을 보여준다.⁸⁾

보를 4등분요소로 분할한경우 각절점의 처짐 및 처짐각의 크기는 아래와 같이 산정되고 이 값은 보이론에 의한 해와 일치한다.

$$\omega_1 = 0.000, \omega_2 = 0.227, \omega_3 = 0.3125,$$

$$\omega_4 = 0.227, \omega_5 = 0.000$$

$$\theta_1 = -0.050, \theta_2 = -0.0344, \theta_3 = 0.000,$$

$$\theta_4 = 0.0344, \theta_5 = 0.050$$

유한요소법에 의한 <그림 2>의 부재력크기에 (9-2)식의 등가절점하중 {Q}를 부가하면

$$\begin{pmatrix} 250 \\ 208.3 \\ 250 \\ -208.3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 64000 & 160000 & -64000 & 160000 \\ 160000 & 533333.3 & -160000 & 266666.7 \\ -64000 & -160000 & 64000 & -160000 \\ 160000 & 266666.7 & -160000 & 533333.3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.05 \\ -0.2227 \\ -0.0344 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 998.3 \\ 0 \\ -498.8 \\ 3743.7 \end{pmatrix} \quad (10)$$

<표 1>에서와 같이 등가절점하중 {Q}로 보정한 ① 절점의 전단력 및 모우멘트는 998.3 과 0으로 산정 되고 ②절점의 전단력 및 모우멘트는 -498.8, 3743.7 로 산정되어 정확한 값인 1000, 0와 -500, 3750에 거의 수렴한다.

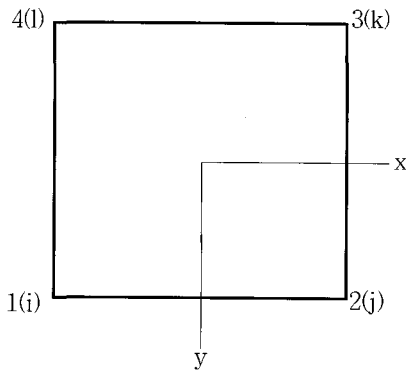
<표 1> 보요소의 부재력 비교

	①절점		②절점	
	M (kg-cm)	V (kg)	M (kg-cm)	V (kg)
FEM	208	749	3952	749
이론해	0	1000	3750	500
{Q}	0	998.3	3744	499

4. 판 요소

판요소의 변위식은 MZC사각형요소⁶⁾의 3차식으로 가정한다.

$$\omega(x) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (11)$$



<그림 3> 판 요소

<그림 3> i 절점의 $\omega_i, \theta_{xi} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \theta_{yi} = \frac{\partial \omega}{\partial x}$ 는

$$\begin{pmatrix} \omega_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2y_i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_i & -y_i & 0 & -3x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & y_i^3 & x_i^3 y & x_i y^3 \\ x_i^2 & 2x_i y_i & 3y_i^2 & x_i^3 & 3x_i y_i^2 \\ -2x_i y_i & -y_i^2 & 0 & -3x_i^2 y_i & -y_i^3 \end{pmatrix} \{a\} \quad (12-1)$$

j, k, l 절점좌표를 대입하여 (1)요소의 변위식은

$$\{q\} = [A_p]\{a\} \quad (12-2)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \\ a_2^4 \\ a_2^5 \\ a_2^6 \\ a_2^7 \\ a_2^8 \\ a_2^9 \\ a_2^{10} \\ a_2^{11} \\ a_2^{12} \end{pmatrix} \quad (13-1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \quad (13-2)$$

$$\{\epsilon\} = [B_p]\{a\} \quad (13-2)$$

$$\{q\} = [A_p]\{a\}, \quad \{a\} = [A_p]^{-1}\{q\} \quad (13-3)$$

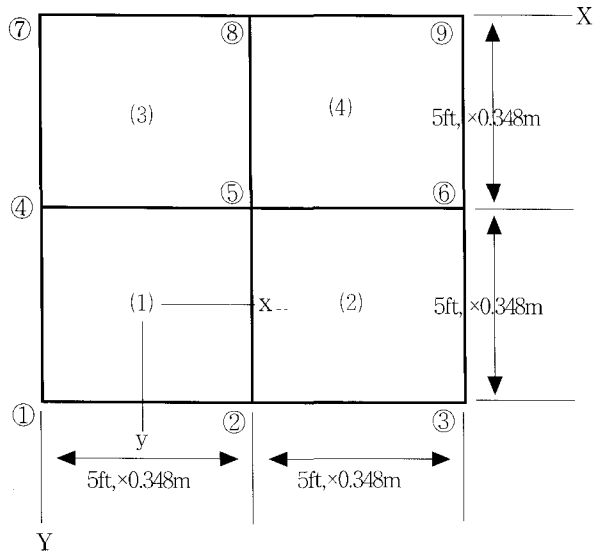
$$\{\epsilon\} = [B_p][A_p]^{-1}\{q\} \quad (13-3)$$

$$M(x) = [D]\{\epsilon\} \quad (14)$$

여기서 [D]는 $[E] \frac{t^3}{12}$

(14)식의 부재력산정식에 등분포하중이 작용하는 경우 등가절점하중 {Q}를 대입하여 판요소부재력 크기의 정도를 개선할수 있다.

5. 수치예제(2)



<그림 4> 평판의 분할

<그림 4>에서 등분포하중 $\omega = 2880 \times 0.0048 \text{ t/m}^2$, $t = 1 \times 2.54 \text{ cm}$, $E = 2.1 \times 10^5 \times 0.000488 \text{ kg/cm}^2$ 이고 판의 단부를 고정할 때 요소의 수에 따른 중앙점 ⑤의 처짐량, ② 및 ⑤ 위치의 부재력을 유한요소법 및 등가절점하중 {Q}로 보정한 값을 구하여 판이론에 의한 해 값과 정도 비교하시요.

평판의 요소의 수자를 증가 변화시키며 중앙점의 처짐량을 구하고 부재력으로 중앙부의 정모우멘트와 단부(각변의 중앙부)의 부모멘트를 구하여 정도비를 구하여 보면 아래의 표와 같다.

<표 2> 요소수증가와 처짐크기 정도비

요소수	처짐크기(ft,×0.348m) ⑤절점	오차비(%)
4	0.1998	26.1
16	0.1860	17.3
25	0.1541	2.8
64	0.1680	6.0
100	0.1656	4.4
256	0.1629	2.7
1024	0.1615	1.9
4096	0.1612	1.7
이론해	0.1585	

<표 3> 요소수증가와 모우멘트크기 정도비

요소수	-Myy(lb-ft, ×0.000138tm) ②절점		+Myy(lb-ft, ×0.000138tm) ⑤절점		
	FEM	오차비 (%)	FEM	오차비 (%)	
4	FEM	-10,800	26.9	+14,040	
	보정	(-3,000)	6.6	(-3,000)	65.9
16	FEM	-14,001	5.2	+8,726	24.4
	보정	(-750)	0.2	(+750)	13.1
25	FEM	-13,353	9.6	+6,679	0.4
	보정	(-480)	6.4	(+480)	6.8
64	FEM	-14,598	1.2	+7,007.4	5.3
	보정	(-188)	0.08	(-188)	2.5
100	FEM	-14,664	0.074	+6,859	3.1
	보정				
256	FEM	-14,736	0.3	+6,699	0.7
	보정				
1024	FEM	-14,772	0.01	+6,622	0.5
	보정				
4096	FEM	-14,781	0.05	+6,603	0.8
	보정				
정해		-14,774		+6,653	

<표 4> 요소수증가와 전단력크기의 정도비

요소수	-Vyz(lb, ×0.00045t) ②절점		+Vyz(lb, ×0.00045t) ⑤절점		
	FEM	오차비 (%)	FEM	오차비 (%)	
4	FEM	-4,968	48.9	-4,968	
	보정	(-3,600)	12.9		
16	FEM	-8,060	17.2	+1,962	
	보정	(-1,800)	1.3		
25	FEM	-8,268	15.1	0	
	보정	(-1,440)	0.3		
64	FEM	-9,979	2.5	+762	
	보정	(-900)	11.8		
100	FEM	-10,442	7.2	-601	
	보정				
256	FEM	-11,209	15.2	+371	
	보정				
1024	FEM	-11,921	22.5	+184	
	보정				
4096	FEM	-12,305	26.4	+92	
	보정				
정해		-9,734		0	

<그림 3>의 판요소에서 Zienkiewicz와 Weaver⁵⁾가 제안한 MZC사각형판요소의 단위폭당 $[D][B]$ 행

열식과 $[K] = \int \int [B]^T [D] [B] dx dy$ 행열식은 아래의 식과 같다. (판요소의 크기 $(5ft, \times 0.348)m \times (5ft, \times 0.348)m$, $E = 2.1 \times 10^5 \times 0.000488 kg/cm^2$, $t = 1 \times 2.54cm$)

$$[D][B]_i = 10^{5 \times} \begin{Bmatrix} 0.7142 & -0.5494 & 1.8312 & -0.1648 & -0.2747 & 0 \\ 0.7142 & -1.8312 & 0.5494 & -0.5494 & -0.9156 & 0 \\ -0.0641 & 0.3205 & -0.3205 & 0.0641 & 0 & 0.3205 \\ -0.5494 & 0 & 0.9156 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1648 & 0 & 0.2747 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0641 & -0.3205 & 0 & -0.0641 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \{q_i\} \quad (15)$$

$$[K]_i \{q_i\} = 10^5 \times \begin{Bmatrix} 0.9669 & 1.1170 & -1.1170 & -0.4175 & 0.2564 & -0.9797 \\ 1.1170 & 3.4793 & -0.6867 & 0.2564 & 1.0987 & 0 \\ -1.1170 & -0.6867 & 3.4793 & 0.9797 & 0 & 1.4192 \\ -0.1318 & 0.3937 & -0.3937 & -0.4175 & 0.9797 & -0.2564 \\ -0.3937 & 0.8698 & 0 & -0.9797 & 1.4192 & 0 \\ 0.3937 & 0 & 0.8698 & -0.2564 & 0 & 1.0987 \end{Bmatrix} \{q_i\} \quad (16)$$

5. 결 론

유한요소법의 보 및 판요소의 부재력 산정에서 오차비감소를 위한 유한요소식의 전개과정을 연구하여 아래의 결론을 얻었다.

- (1) 변위식을 3차식으로 가정한 경우 보요소의 행열식 $EI[B]$ 과 $[K]$ 는 같은요소로 구성된다.
- (2) 유한요소법에서 $\frac{-M}{EI} = \frac{d^2 \omega}{dx^2}$ 와 $\frac{dM}{dx} = V$ 의 식으로 부재력을 구하는 등분포하중이 재하된 3차식 변위를 가정한 보요소 및 판요소의 부재력 크기 산정은 등가절점하중 $\{Q\}$ 를 추가해야 정확한 해에 수렴한다.
- (3) 판요소의 처짐변위 정도비교에서 정확한해(이론해)와 비교하여 유한요소법에서 요소수가 작을 때 더 큰 변위값이 산정되고 요소의 증가에 따라 정확한 값으로 수렴하여 판요소강성도값 계산과정의 기본과정에 오류가 있다.(보요소 강성도와 비교할 때)

참 고 문 헌

1. Timoshenko, S.P., and Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and shell, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1959, Chap. 4, pp. 44~55, Chap.12.
2. Logan Daryl L., A First Course in the Finite Element Method, BROOK/CODE, 2002, 113p., pp. 165~171.
3. Hrabok, M. M., and Hrudley, T. M., "A Review and Catalog of Plate Bending Finite Element," Computer and Structures, Vol.19, No.3 1984, pp. 479~495.
4. Yang T.Y., Finite Element Structural Analysis, Prentice-Hall, 1986, pp. 399~480.
5. Weaver William, Jr. and Paul R. Johnston, Finite Elements for Structural Analysis, 1984, pp. 200~236.
6. Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K., The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGRAW-HILL, 1967; 4th ed. pp. 15~23.
7. Cook Robert D. and Malkus David S., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc. 2002, pp. 530~560.
8. Desei Chandrakant S., Elementary Finite Element Method Prentice-Hall, 1979, pp. 172~201.
9. Kwon Young W. and Hyochoong Bang, The Finite Element Method using MATLAB, CRC Press, 1997, pp. 361~390.
10. 권택진, 응용유한요소해석, 희성출판사, 1976, pp. 279~302.
11. Shames Irving H. Dym Clive L., Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics, McGRAW-HILL Co. 1985, pp. 596~605.
12. 김용수, Matlab입문과 활용, 높이깊이, 2000.