財務管理研究 第二十券 第二號(2003. 12), 73~94

비모수적 이자율모형 추정과 시장위험가격 결정에 관한 연구

이필상* · 안성학**

〈요 약〉

일반적으로 이자율예측모형은 특정한 이자율 분포모형을 가정하여 모수적 방법에 의해 추정되었다. 그러나 특정한 분포모형을 가정한다는 것은 예측능력을 저하시킬 수 있다는 단점이 있다. 따라서 이자율변화에 특정한 분포모형을 가정하지 않는 비모수적 추정이 이자율 예측의 우월한 방법으로 제시되었다. 본 논문에서는 통화안정증권을 대상으로 이자율 예측 모형을 모수적 방법과 비모수적 방법으로 추정한다. 다음 이자율의 시장위험과 채권가격을 결정하여 두 방법 사이에 유의한 차이가 있는가를 분석한다.

1999년 8월 9일부터 2003년 2월 7일까지 통화안정증권의 일별, 주별 자료를 사용하여 분석한다. 액면이자 효과를 제거하기 위해 복리채만을 분석대상으로 한다.

모수적 방법을 이용할 때 이자율 변화의 추세항은 선형으로 나타나지만 변동성항은 이자율 변화에 비해 급격히 변하는 비선형을 나타낸다. 비모수적 분석방법을 이용할 때 추세항과 변동성항 모두 이자율 변화에 비해 급격히 변하는 비선형을 나타낸다. 모수적 방법과 비교하여 추세항은 다른 결과를, 그리고 변동성항은 같은 결과를 보인다. 추세항과 변동성항의 예측을 감안하여 이자율의 시장위험 및 채권가격을 산출한 결과 모수적 방법과 비모수적 방법은 유의적인 차이를 보인다. 이는 이자율 및 이자율의 시장위험가격 예측은 비모수적 방법을 사용하는 것이 적합하다는 것을 뜻한다.

주제어 : 이자율예측모형, 모수적 추정, 비모수적 추정, 커널밀도함수, 시장위험가격

Ⅰ. 서 론

이자율의 연속적 변동성 과정을 설명할 때 흔히 추세항(μ)과 변동성항(σ)에 대한 모수적 추정은 계산상 편리함을 가져오지만 이자율 변화에 대해 정규분포를 가정한다는 측면에서 한계가 있다. 본 논문에서는 이산적 기간에서 관찰되는 연속적 변동성 과정을

논문접수일 : 2003년 3월 22일 논문게재확정일 : 2003년 7월 29일

* 고려대학교 경영학과 교수

** 고려대학교 경영학과 박사과정

비모수적으로 추정하는 방법을 사용한다. 또 실제 이자율 변화의 추세와 실제 변동성을 근사추정하는 절차도 제시한다. 이 경우 이자율 변화에 대해서 특정한 분포를 가정하지 않으므로 모형의 설명력이 크다고 볼 수 있다.

한편 본 논문에서 사용하는 비모수적 방법은 이자율의 시장위험가격을 추정할 수 있는 장점이 있다. 이자율위험의 시장가격과 이자율 수준 사이의 함수 관계를 비모수적으로 추정함으로써 이자율위험의 시장가격을 얻을 수 있다. 기존의 연구들이 아무런 근거없이 시장위험가격을 영으로 가정했던 것과 달리 본 연구에서는 보다 합리적인 방법으로 시장위험가격을 구하고 있다는 점에서 한 단계 발전된 이자율 예측 모형의 분석이라고 할 수 있다.

채권이나 기타 파생상품의 가격결정에 이자율은 핵심이라고 할 수 있다. 이자율의 움직임을 파악함으로써 경제주체들의 자금의 차입이나 대출과 관련된 의사결정 및 차익거래를 가능하게 할 수 있다. 따라서 이에 대한 많은 연구들이 존재한다.

이자율 모형을 정립하는데 흔히 $dr(t) = \mu dt + \sigma dz(t)$의 확률적 과정을 가정한다. 이 모형에 입각하여 추세항(μ)과 변동성항(σ)의 추정에 대한 많은 연구들이 있다. Chan, Karyoli, Longstaff & Sanders[1](이하 CKLS)는 이 과정에 입각한 가장 일반적인 모형으로 $dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma r(t)^{\gamma} dz(t)$를 설정하였다. 여기서 $\alpha + \beta r(t)$은 추세항으로 선형을 가정하고 있고 변동성항 $\sigma r(t)^{\gamma}$은 비선형을 가정했다. 그리고 일반화된 적률모형(GMM)을 사용하여 추세항과 변동성항을 추정했다. 이 모형에 따르면 기존의 모수적 방법에 의한 연구들은 이 모형에 대한 특수한 경우로 생각할 수 있다. 즉 아래의 <표 1>에서 볼 수 있듯이 기존의 모수적 모형 내의 모수에 일정한 제약을 가함으로써 CKLS모형은 다른 모형으로 변환될 수 있다.

<표 1> $dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma r(t)^{\gamma} dz(t)$과 다른 모형과의 비교

Merton(Ho-Lee)	$dr(t) = \alpha dt + \sigma dz(t)$	$\beta = 0,\ \gamma = 0$
Vasicek	$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma dz(t)$	$\gamma = 0$
CIR	$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma r^{\frac{1}{2}} dz(t)$	$\gamma = \frac{1}{2}$
Dothan	$dr(t) = \sigma r dz(t)$	$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 1$
CEV	$dr(t) = \beta r(t) dt + \sigma r^{\gamma} dz(t)$	$\alpha = 0$

1) Chan, K. C., Andrew, G. Karolyi, Francis, A. Longstaff and Anthony, B. Sanders, An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, Journal of Finance 47, (1992), 1209-1227.

한편 CKLS 모형은 오일러 근사추정(Euler Approximation) 방법 즉, $r_{t+1} - r_t = \alpha + \beta r_t + \varepsilon_{t+1}$, 단 $E(\varepsilon_{t+1}) = 0$에 의해 α와 β를 추정한다. 이 경우 이산적 자료로 연속적 모형을 추정하는데 무리가 따르게 된다. 이러한 문제를 해결하고자 하는 시도가 바로 비모수적 방법으로 Ait-Sahalia[2)]와 Stanton[3)]의 연구가 대표적인 연구이다.

Ait-Sahalia의 경우[4)] 추세항을 모수적 방법에 의해, 변동성항을 비모수적 방법으로 추정하고 있는 반면 Stanton은 추세항, 변동성항 모두 비모수적 방법으로 추정하고 있다. 또한 두 방법 모두 콜모고르프 방정식(Kolmogorov forward equation)을 사용하여 분포를 커널밀도추정법(Kernel Density Estimation)으로 추정하고 있다.

Stanton은 오일러 근사추정으로 추세항과 변동성항을 추정한다. 이 경우 근사차수를 높임으로써 근사추정 오차를 최소화할 수 있다. 이렇게 하여 Stanton은 모집단의 분포를 가정하는 모수적 방법 비해 특정한 분포를 가정하지 않는 비모수적 방법의 장점을 부각시키고 있다. 비모수적 방법이 특정한 분포를 가정하지 않는다는 것에 의의를 두고 본 연구에서는 한국의 자료를 대상으로 Stanton 방법을 적용한다.

이 분야의 국내연구로서는 박준용, 오규택, 이창용(2001)의 연구가 있다. 이 연구에 의하면 모수적 설정으로는 CIR 모형이 국내 이자율 모형에 가장 적합한 것으로 밝혀졌다. 이 때 추세함수와 변동성함수 추정결과를 통해 추세가 거의 없으며 이자율 수준이 높아짐에 따라 급속히 변동성이 높아진다는 사실을 발견했다. 또한 비모수적 추정방법에 의한 변동성함수의 추정치는 모수적 추정결과와 같이 이자율 수준이 높아지면서 빠르게 증가함을 보였다. 하지만 추세함수의 추정치는 모수적 방법에 의한 결과와는 조금 달랐다. 비모수적 추정방법에 의한 추세함수는 이자율의 통상적인 범위에서는 거의 영에 가까운 값을 갖는 반면 이자율이 높은 수준에서는 매우 큰 음의 값을 갖는 것으로 나타났다. 실증결과, 이자율 모형화에서 널리 쓰이고 있는 선형 수익률 모형이 실제 이자율의 특성에 부합하지 않는다는 기존의 미국 실증 분석결과가 한국에서도 성립한다는 것을 보이고 있다. 하지만 이 연구에서는 이자율의 시장위험가격 및 채권가격결정에 관해서는 분석하지 않고 있다.

즉 기존 연구들이 합리적인 근거 없이 임의로 시장위험가격을 가정하여 가격을 산출

---

2) Ait-Sahalia, Yacine, Nonparametric pricing of interest rate derivative securities, Econometrica 64, (1996a), 527-560.

3) Stanton, Richard, A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk, The Journal of Finance, (December 1997), 1973-2002.

4) 참고로 Ait-Sahalia의 경우 추세항을 정하는데 $\mu(x) = x[\theta - x]$와 같은 모수적 방법에 의하고 있다.

하고 있는데 비하여 본 논문은 비모수적 방법을 사용하여 추세항과 변동성항을 구하는 동일한 절차로 채권의 가격을 구하였다는데 의의가 있다.

Ⅱ. 모수적 방법과 비모수적 방법에 대한 개관

1. 모수적 방법

모수적 방법이란 추세함수와 변동성함수에 모수적 제약을 가하여 이 두 함수가 일정 함수류에 있음을 가정하고 실제 분석 자료와 가장 잘 부합하는 모수를 찾아내는 방법을 말한다. 추세항 $\mu(x)$와 변동성항 $\sigma(x)$의 일반적 형태를 $\mu(x, \theta)$, $\sigma(x, \theta)$라는 함수로 가정한 후 이들 일반적 함수 중 구체적 함수를 결정하는 모수 θ를 추정하여 변동성모형을 구체적으로 확정한다.

Stanton의 연구에서는 콜모코르프 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial P(s, y \mid t, x)}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial y}(\mu(y)P(s, y \mid t, x)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma^2(y)P(s, y \mid t, x)) \quad (1)$$

식 (1)에서 μ와 σ가 모수로 주어지게 되면 모수의 함수로 조건부 밀도함수인 P에 대해 위 식을 푼 후 모형의 모수를 추정하기 위해 최대우도 방법(MLE)을 사용한다.

2. 비모수적 방법

비모수적 방법이란 추세함수와 변동성함수에 대한 모수적 제약을 가하지 않고 실제 분석 자료와 가장 잘 부합하는 함수를 추정하는 방법을 말한다.

모수적 방법은 특정한 밀도함수를 가정하기 때문에 실제 모형을 추정하는데 문제를 야기할 수 있다. 심지어 추정기간내에서 모형이 이자율의 움직임을 잘 적합시킨다고 하더라도 이것이 필연적으로 예측기간내의 이자율의 결정을 의미하는 것은 아니다. 왜냐하면 어느 시점의 증권가격은 그 시점으로부터 과거의 이자율에 의존하는 것이 아니라 증권만기까지 가능한 모든 미래 이자율의 분포에 의존하기 때문이다.

Stanton의 경우 이러한 모수적 방법의 문제를 회피하기 위해 비모수적 추정방법을 사용하고 있는데, 콜모고르프 방정식,

$\frac{d^2}{dx^2}(\sigma^2(x)\pi(x)) = 2\frac{d}{dx}(\mu(x)\pi(x))$에서 t가 음의 무한대 값을 취할 때,

$$\frac{\partial P(s,y \mid t,x)}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial y}(\mu(y)P(s,y \mid t,x)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma^2(y)P(s,y \mid t,x))$$은

$\frac{d^2}{dx^2}(\sigma^2(x)\pi(x)) = 2\frac{d}{dx}(\mu(x)\pi(x))$의 관계식을 가지게 되는데 이를 사용하여 비모수적으로 모형을 추정을 하였다.

Ⅲ. 실증분석

1. 자 료

통화안정증권은 한국은행이 통화량을 조절하기 위하여 한국은행법 제 69조 및 한국은행통화안정증권법에 따라 금융기관과 일반인을 대상으로 발행하는 증권을 말한다.

이 연구에서 통화안정증권을 연구 자료로서 삼은 이유는 통화안정증권이 복리채의 형태로 발행되기 때문이다. 물론 2년물은 이표채이므로 제외하였다. 즉 통화안정증권은 만기에 모든 현금흐름을 한번에 지급하게 되므로 채권 수익률곡선 추정에서 액면이자를 고려하지 않아도 된다. 이표채의 경우는 만기수익률이 시장에서의 수익률 수준뿐만 아니라 특정채권의 액면이자에 따라 달라지므로 채권간의 비교가 어렵다. 이러한 경우 이표채에서 액면이자의 효과를 제거해서 무이표채의 형태를 만든 후 채권수익률 곡선을 추정하는 것이 일반적이다.

또한 통화안정증권의 경우 정부가 지급을 보증하는 국채의 일종이므로 회사채 수익률곡선 추정에서 고려하여야 하는 회사의 신용등급에 따른 신용위험을 고려할 필요가 없다. 대부분의 국가에서 정부는 가장 신용도가 높은 채무자이므로 국채의 경우 대부분 지급불이행 위험이 없는 것으로 간주된다. 따라서 국채의 수익률 곡선은 명목 무위험 이자율에 대한 가장 좋은 대용치로 간주된다. 또한 국채의 경우 회사채에 비해서 발행 시장과 유통 시장의 규모가 크기 때문에 최근 들어 채권시장에서 높은 유통성을 보이고 있는 점도 이를 분석대상 자료로 삼은 이유 중의 하나이다.

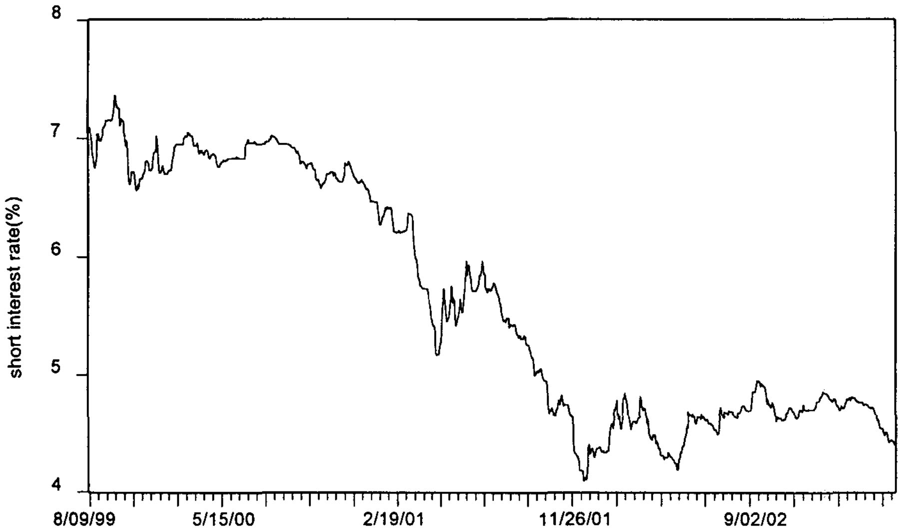
본 연구에서는 1999년 8월 9일부터 2003년 2월 7일까지 통화안정증권 주별, 일별 자료를 사용하여 분석하였다.

위의 기간 동안 통화안정증권의 단기이자율은 다음과 같은 특징을 가지고 있다.

[그림 1]로 보았을 때 단기 이자율은 1999년 중반부터 2002년 말까지 7%대에서 4%대로 하락하고 있음을 알 수 있다. IMF 이후 이자율은 계속 하락하는 추세이며 이는 중앙은행의 저이자율정책에 따른 결과로 볼 수 있다.

[그림 1] 단기이자율의 시간에 따른 추이

1999년 8월 9일부터 2003년 2월 7일 동안의 통화안정증권의 단기이자율



그런데 위 그림에서는 어떤 수준에서 이자율이 일시적으로 안정적으로 유지되는 것으로 관찰되고 있다. 위의 단기이자율에 대한 기초통계량을 보면 다음과 같다.

<표 2> 단기이자율의 기초통계량

1999년 8월 9일부터 2003년 2월 7일 동안의 통화안정증권의 단기이자율에 기초통계량

단기이자율(3개월)	
평균 5.639352	중앙값 5.480000
최대값 7.360000	최소값 4.090000
표준편차 1.011835	왜도 0.153997
첨도 1.344526	관측치 수 864

<표 2>에서 단기이자율의 기초통계량을 살펴보면 이자율은 4.09%에서 7.36% 사이에서 관찰된다. 구간 밖의 이자율은 크게 의미가 없음을 알 수 있다. [그림 1]에서도 이자율이 어떤 구간을 갖는지 보여주고 있다. 차후 시장위험가격을 통한 모수적 방법과 비모수적 방법의 차이분석에서는 의미있는 임의의 이자율을 중심으로 분석하고자 한다.

2. 실증분석 방법5)

1) 이자율 변화의 추세항과 변동성항 추정

Stanton의 비모수적 방법을 사용할 때 커널밀도함수가 이용되는데 커널밀도추정은 다음의 방법으로 행하였다.

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{Th^m} \sum_{t=1}^{T} K\left(\frac{z-z_t}{h}\right), \quad \text{단 } \hat{h}_i = \hat{\sigma}_i T^{-1/(m+4)} \tag{2}$$

여기서 $\hat{\sigma}_i$는 z_i의 표준편차의 추정치, T는 관측치의 수, m은 변수의 차원, K는 정규분포를 나타낸다. h는 유연화구간크기모수(bandwidth parameter)의 크기를 나타낸다. 유연화구간크기모수의 크기를 크게 할수록 평활화되고 작게 할수록 변화가 많아지는 모양을 띠게 되어 분석이 어렵게 되는 문제점이 발생하게 된다. 즉 어떤 크기로 유연화구간크기모수의 크기를 잡는가하는 최적 선택의 문제가 존재한다.

Stanton은 $\hat{h}_i = \hat{\sigma}_i T^{-1/(m+4)}$로 유연화구간크기모수의 크기를 추정하고 있다.

커널밀도함수, 추세항 그리고 변동성항을 추정하는 방법은 다음과 같다.

커널밀도함수 $\pi(x)$는 $\hat{f}(z) = \frac{1}{Th^m} \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-z_t}{h}\right)^2}$으로 추정하며,

추세항 $\mu(r)$는 $E[r(t+\Delta) - r(t) \mid r(t) = r]$을 기본으로 하였는 바,

$$\mu(r_t) = \frac{1}{\Delta} E_t[r_{t+\Delta} - r_t] + O(\Delta)$$

$$\mu(r_t) = \frac{1}{2\Delta} \{4E_t[r_{t+\Delta} - r_t] - E_t[r_{t+2\Delta} - r_t]\} + O(\Delta^2)$$

$$\mu(r_t) = \frac{1}{6\Delta} \{\{18E_t[r_{t+\Delta} - r_t] - 9E_t[r_{t+2\Delta} - r_t]\} + 2E_t[r_{t+3\Delta} - r_t]\} + O(\Delta^3)$$

이 되는데

여기서 1차 근사추정은

$$E_t[r(t+\Delta) - r(t) \mid r(t) = r] \approx \frac{\sum_{s=1}^{T-1} (r(t+\Delta) - r(s)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r-r(s)}{h}\right)^2}}{\sum_{s=1}^{T-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r-r(s)}{h}\right)^2}}$$

---

5) Stanton이 사용한 방법을 기초로 하였다.

2차 근사추정은

$$E_t[r(t+2\Delta)-r(t)\mid r(t)=r]\approx\frac{\sum_{s=1}^{T-2}(r(s+2\Delta)-r(s))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{r-r(s)}{h})^2}}{\sum_{s=1}^{T-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{r-r(s)}{h})^2}}$$

3차 근사추정은

$$E_t[r(t+3\Delta)-r(t)\mid r(t)=r]\approx\frac{\sum_{s=1}^{T-3}(r(s+3\Delta)-r(s))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{r-r(s)}{h})^2}}{\sum_{s=1}^{T-3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{r-r(s)}{h})^2}}$$

으로 하였다.

변동성항 $\sigma^2(r)$에 대해서는 $E[(r_{t+\Delta}-r(t))^2\mid r(t)=r]$을 기본으로 하고 있는 바,

$$\sigma^2(r_t)=\frac{1}{\Delta}E_t[(r_{t+\Delta}-r_t)^2]+O(\Delta),$$

$$\sigma^2(r_t)=\frac{1}{2\Delta}\{4E_t[(r_{t+\Delta}-r_t)^2]-E_t[(r_{t+2\Delta}-r_t)^2]\}+O(\Delta^2),$$

$$\sigma^2(r_t)=\frac{1}{6\Delta}\{18E_t[(r_{t+\Delta}-r_t)^2]-9E_t[(r_{t+2\Delta}-r_t)^2]+2E_t[(r_{t+3\Delta}-r_t)^2]\\+O(\Delta^3)$$

이 되며 이것은 다시

$$\sigma(r_t)=\sqrt{\frac{1}{\Delta}var_t(r_{t+\Delta})}+O(\Delta),$$

$$\sigma(r_t)=\sqrt{\frac{1}{2\Delta}[4var_t(r_{t+\Delta})-var_t(r_{t+2\Delta})]}+O(\Delta^2),$$

$$\sigma(r_t)=\sqrt{\frac{1}{6\Delta}[18var_t(r_{t+\Delta})-9var_t(r_{t+2\Delta})+2var_t(r_{t+3\Delta})]}+O(\Delta^3)$$ [6],

6) 위와 같이 변형이 가능한 것은 다음과 같다. 즉 $\sigma^2(X_t)=A+O(\Delta^k)$라고 가정하고 이항 근사추정 (binomial approximation)을 하면,

$$\sigma(X_t)=\sqrt{A}\,[1+O(\Delta^k)]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{A}\,[1+\frac{1}{2}O(\Delta^k)-\frac{1}{8}O(\Delta^{2k})+\cdots]=\sqrt{A}+O(\Delta^k)$$

으로 변형이 가능하다.

결국

$$\sigma^2(r) = \frac{\sum_{s=1}^{T-1}(r(s+\Delta)-r(s))^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{r-r(s)}{h})^2}}{\sum_{s=1}^{T-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{r-r(s)}{h})^2}},$$

$$\sigma^2(r) = \frac{\sum_{s=1}^{T-2}(r(s+2\Delta)-r(s))^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{r-r(s)}{h})^2}}{\sum_{s=1}^{T-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{r-r(s)}{h})^2}},$$

$$\sigma^2(r) = \frac{\sum_{s=1}^{T-3}(r(s+3\Delta)-r(s))^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{r-r(s)}{h})^2}}{\sum_{s=1}^{T-3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{r-r(s)}{h})^2}}$$

으로 σ^2을 1차, 2차, 3차 근사추정을 하고 있다.

본 연구에서는 추세항 $\mu(r)$, 변동성항 $\sigma^2(x)$을 3차 근사추정을 통하여 추정한다.

이러한 추세항과 변동성항을 분석하여 기존의 연구들 특히 CKLS의 분석에서 보여지는 추세항은 선형이라는 가정과 변동성항이 $r^{1.5}$의 형태를 띤다는 것을 비교분석한다. 다시 말해 모수적 방법의 결과와 비교하여 모수적 방법의 가정이 어긋남을 보인다.

2) 시장위험가격과 가격결정

단기이자율과 시간에만 의존하는 자산의 가격을 $V(r,t)$라고 놓으면 이토 공식(Ito's lemma)에 의해,

$$\frac{dV(r,t)}{V(r,t)} = m(r,t)\,dt + s(r,t)\,dZ,$$

단

$$m(r,t)V = V_t + \mu(r)\,V_r + 1/2\sigma^2(r)\,V_{rr}, \tag{3}$$

$$s(r,t)\,V = \sigma(r)V_r$$

과 같이 된다. 이 등식은 어떤 자산 V에도 성립한다. 한 가지 요인만을 가지는 이자율모

형에서 위험 프리미엄은 차익거래를 방지하기 위해 수익률의 표준편차와 비례관계를 가져야 한다. 또한 자산의 보수가 d의 배당률로 지급된다면,

$$m = r - \frac{d}{V} + \lambda(r,t)\frac{V_r}{V} \tag{4}$$

로 표시가 가능하다. 여기서 λ(r,t)는 시장위험가격(market price of risk)으로서 투자자가 초과위험을 부담하는 대신에 요구하는 초과수익을 의미한다.

그리고 이자율 위험의 시장가격위험의 r_t의 유일한 함수라고 가정하고 식 (4)를 식 (3)에 대입하면 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\frac{1}{2}\sigma(r)^2 V_{rr} + [\mu(r) - \lambda(r)]V_r + V_t - rV + d = 0 \tag{5}$$

여기서 자산의 가격을 결정하기 위해서는 추세항과 변동성항의 함수뿐만 아니라 시장위험가격(λ)의 함수까지 알 필요가 있다. 기존의 연구들은 λ의 함수에 대해 다양한 함수형태를 가정[7]하였으나 식 (5)에서처럼 ($\mu - \lambda$)의 차이로 나타난다는 것은 λ의 잘못된 설정으로 μ의 잘못된 설정과 똑같은 크기의 가격설정오차 및 헤징오차를 가져온다는 것을 의미하게 된다.

CKLS의 연구는 시장위험가격을 영(zero)으로 가정하고 있으나 비모수적 모형은 추세항과 변동성항을 추정하는 동일한 절차를 이용하여 시장위험가격을 추정할 수 있다.

즉 비모수적 모형은 추세항과 변동성항을 구하는 과정을 이용하여 만기가 다른 순할인채의 가격을 결정하게 된다. 만기 T에서 1달러의 가치를 가지는 순할인채의 가격은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} &P_t(T) = E_t[\exp(-\int_t^T \widehat{r_u}\, du)], \\ &\text{단} \\ &\widehat{r_u} = r_t, \\ &d\widehat{r_t} = [\mu(\widehat{r_t}) - \lambda(\widehat{r_t})]dt + \sigma(\widehat{r_t})dZ_t \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $P_t(T)$는 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simuation)을 통해서 구할 수

7) 예를 들어 CKLS의 경우는 λ(r) = 0, CIR의 경우는 λ(r) = qr, Vasicek의 경우는 λ(r) = q, Ait-Sahalia의 경우는 λ(r) = qσ(r).

있다.

3) 채권가격결정에의 시장위험가격의 영향

추정된 시장위험가격은 0과는 다른 값을 갖는다. 이는 자산의 가격결정을 하는데 유의적인 차이를 가져올 수 있음을 뜻한다.

여기서는 시장위험가격이 0일 때와 비교하여 위의 방법에 의해 추정된 시장위험가격이 채권가격결정에 어떤 영향을 미치는지 살펴본다.

즉 λ를 0으로 가정했을 경우와 λ를 μ와 σ를 구하는 방법과 동일한 방법으로 구했을 경우에 어떠한 차이를 보이는지를 비교한다. 다음 몬테카를로 시뮬레이션을 사용하여 채권가격을 각각 구한다.

기존의 모수적 방법은 λ 즉, 이자율의 시장위험가격을 임의의 함수, 특정한 값 또는 0으로 가정하고 채권의 가격을 구하였다. 그러나 본 연구에서 λ는 시장위험가격으로서 채권의 가격에 영향을 미친다.

만약 결과가 λ를 0으로 주었을 때와 추세항과 변동성항을 구하는 방법으로 구하였을 때를 비교하였을 때 차이가 난다면 본 연구에서의 방법이 우월하다고 볼 수 있다.

다시 말해 합리적인 근거없이 임의로 시장위험가격을 영으로 가정하여 가격을 산출하는 기존의 연구방법들은 이론적 근거가 약하다. 이러한 점에서 비모수적 방법이 모수적 방법이 우월하다고 볼 수 있다.

3. 실증분석 결과

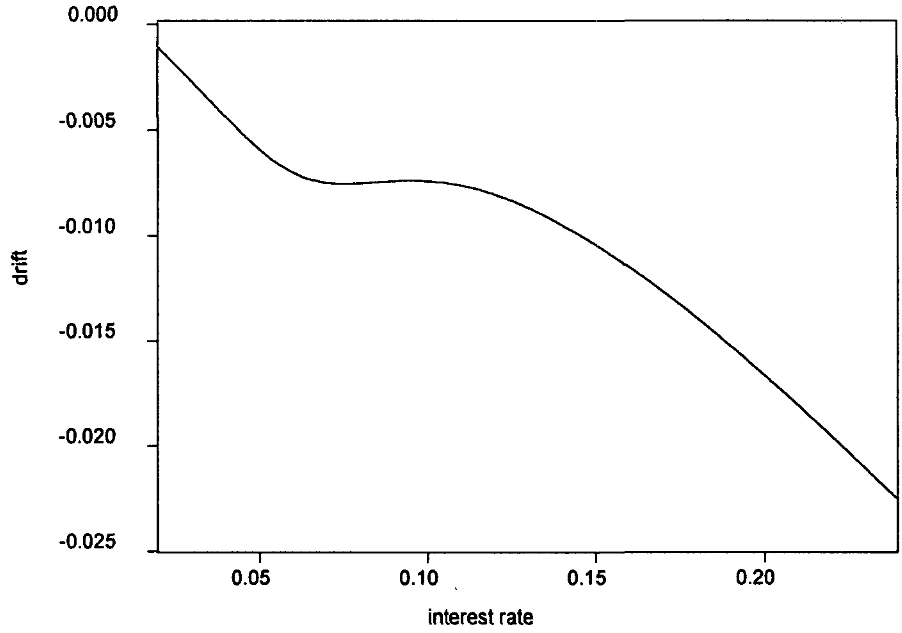
1) 추세항과 변동성항

[그림 2]는 단기이자율의 추세항을 주별 자료를 사용하여 분석한 결과이다. 이 그림에서 CKLS는 선형 추세항을 가정하는데 실제 분석 결과는 비선형 추세를 보이고 있다. 추세항이 7%까지는 감소하는 형태를, 7%에서 10%까지는 수평의 형태를 유지하다가 10%이상에서는 다시 급격히 하락하는 형태를 보이고 있다. 이는 CKLS가 선형 추세항을 가정하는 것을 반박할 수 있는 것으로 분석된다.

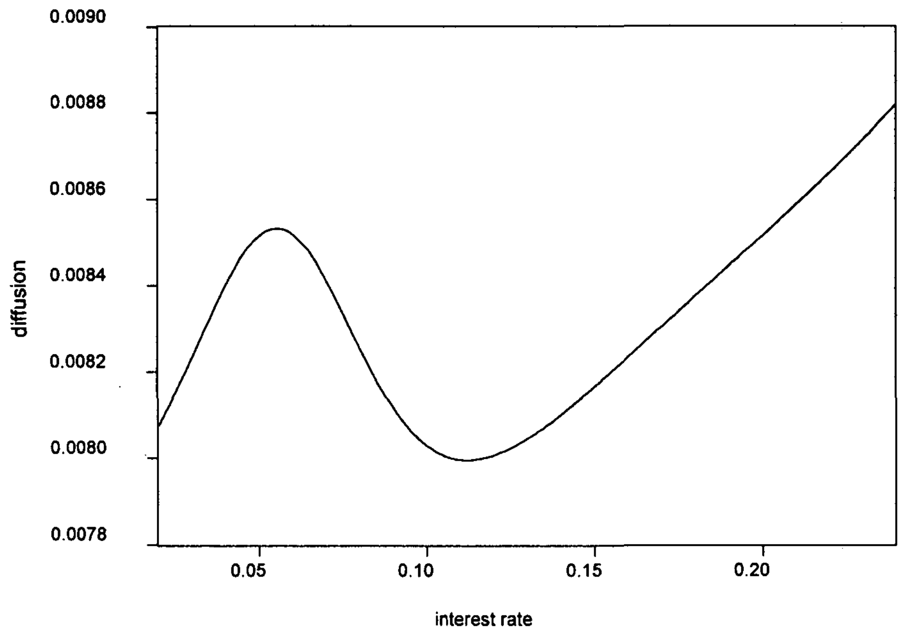
[그림 3]은 단기이자율의 변동성항을 주별 자료를 사용하여 분석한 결과이다.

이 그림에서는 CKLS의 변동성항과 조금 다른 형태를 띠고 있다. 5.5%까지는 변동성항이 증가하다가 11%까지는 하락하는 모습을 보이다가 다시 그 이후의 이자율 수준에서는 상승하는 형태를 띠고 있다. 변동성항을 CKLS는 $r^{1.5}$로 추정한 CKLS와 비모수적

[그림 2] 단기이자율의 추세항(주별)



[그림 3] 단기이자율의 변동성항(주별)

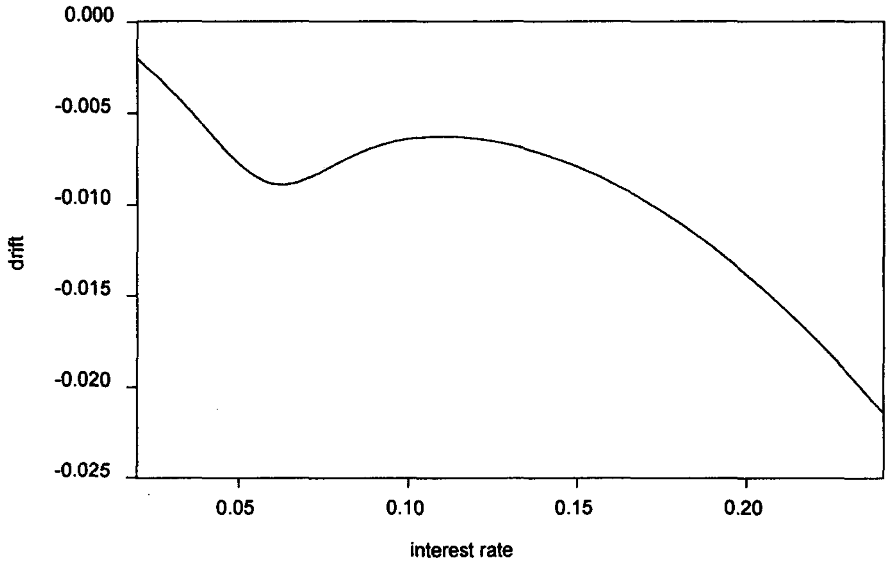


방법인 Stanton의 분석결과와는 다른 형태를 보이고 있으나 11% 이후에는 증가하는 형태를 띠고 있음을 알 수 있다. 따라서 기존 분석과는 조금 차이가 있으나 대체로 변동성항이 이자율에 따라 증가하고 있음을 관찰할 수 있다.

[그림 4]는 단기이자율의 추세항을 일별 자료를 사용하여 분석한 결과이다.

이 그림에서도 [그림 2]와 같이 유사한 형태의 비선형의 하향하는 추세항을 보여주고 있다. 추세항이 6%까지는 감소하다가 11%까지는 다소 증가함을 보이며 그 이후에는 다시 하락하는 형태를 보여주고 있다. 단지 주별자료로 분석한 [그림 2]보다 비선형의 정도가 다소 강하게 나타나는데 주별과 마찬가지로 CKLS의 추세항의 선형가정을 반박할 수 있다.

[그림 4] 단기이자율의 추세항(일별)



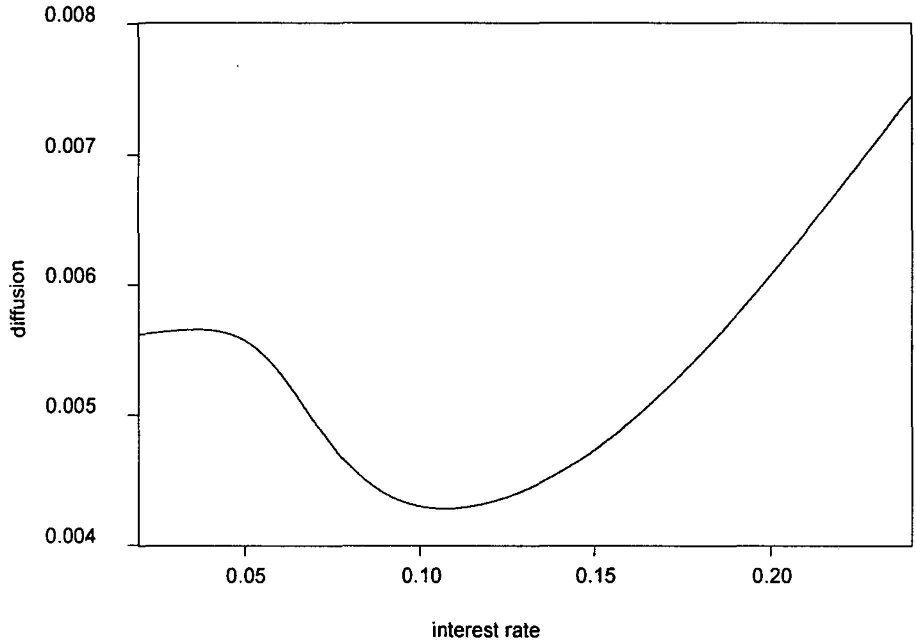
[그림 5]는 단기이자율의 변동성항을 일별 자료를 사용하여 분석한 결과이다.

주별 자료로 분석한 결과와 거의 유사하게 나타난다. 즉 이 그림에서는 보통의 결과와 달리 나오는 것을 알 수 있다. 즉 변동성이 4%까지는 거의 수평을 유지하다가 11%까지는 하락하는 형태를 그리고 그 이후는 다시 증가하는 형태를 가지는 것으로 분석되었다. 이것은 마찬가지로 CKLS나 Stanton의 결과와 조금 다른 형태를 가진다.

지금까지의 결과로 볼 때 변동성항은 CKLS의 분석과 거의 동일함을 알 수 있으나 추세항의 경우 CKLS가 가정한 선형의 추세항과는 많은 차이가 있음을 알 수 있다.

추세함수의 하향의 비선형성이 존재하며, 이와 같은 비선형성이 이자율로 하여금 평균회귀성향을 갖게 함으로써 그 수준을 일정범위 이내로 안정시키는 역할을 하는 것으로 볼 수 있다. 결론적으로 CKLS가 선형 추세항을 가정하는 것은 오류라고 할 수 있다.

[그림 5] 단기이자율의 변동성항(일별)



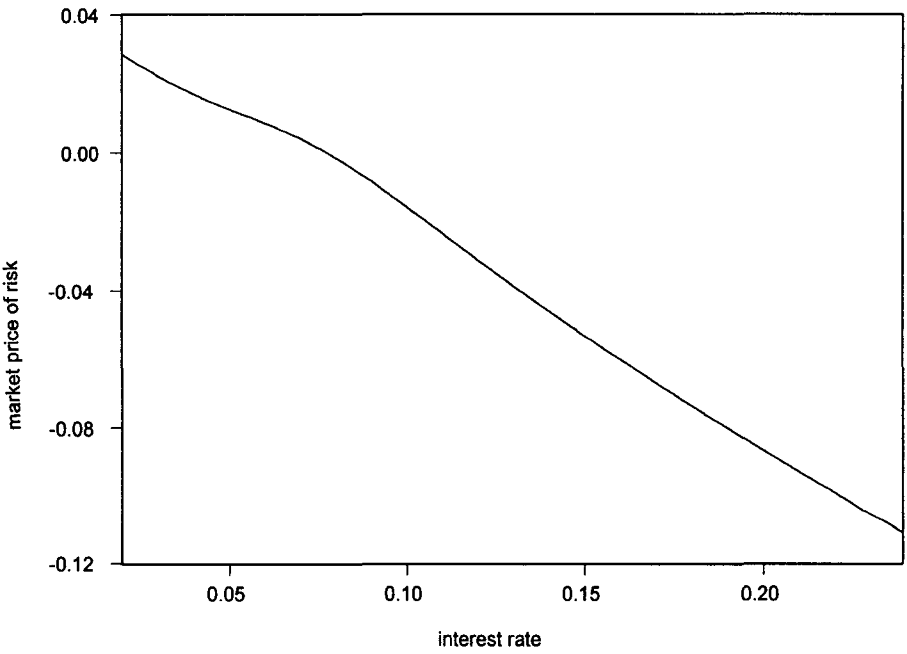
박준용, 오규택, 이창용(2001)의 연구 역시 형태의 차이는 있으나 본 연구와 같이 비선형의 결과를 얻었다. 이들 연구에서는 추세항의 형태가 일정 이자율 수준까지 0으로 유지되다가 급하향하는 것으로 분석되었고 변동성항의 경우에는 어느 일정수준에서 갑자기 변동성이 증가하는 형태를 가지는 것으로 분석되었다.

2) 시장위험가격

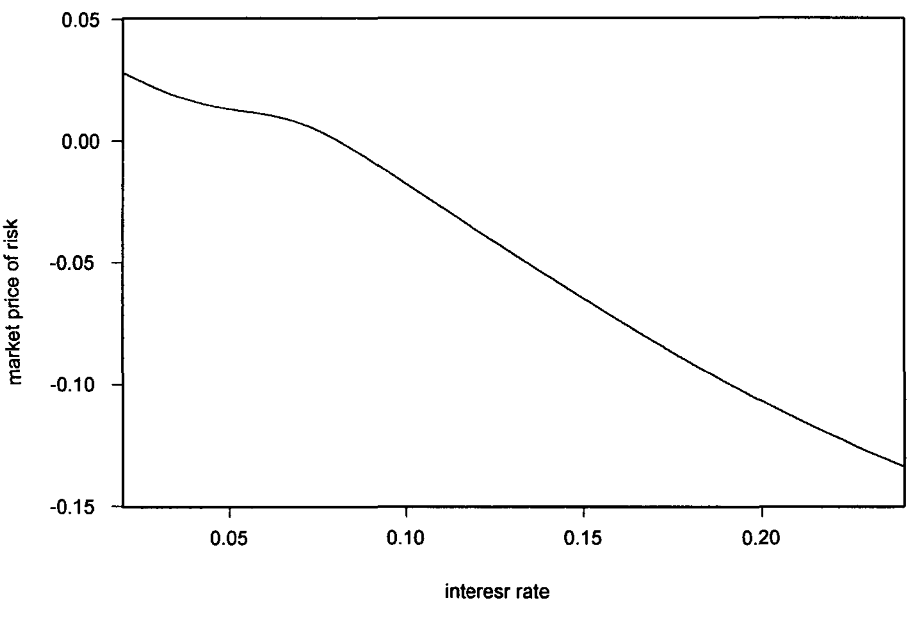
[그림 6], [그림 7]은 각각 주별, 일별 자료의 이자율위험의 시장가격을 나타내고 있다. Stanton의 경우와는 조금 다르게 시장위험가격이 거의 직선의 형태로 하향하는 모습을 보여주고 있다. 단지 일별의 경우 선형의 정도가 약해진다는 것을 알 수 있다. 즉 추세항과 달리 중간 수준의 이자율 수준에서 상승하는 형태는 보이지 않는다.

또한 본 연구에서 시장위험가격은 음의 값을 갖는 것으로 분석된다.

[그림 6] 이자율위험의 시장가격(주별)



[그림 7] 이자율위험의 시장가격(일별)



위와 같은 분석을 통해 시장위험가격이 채권가격에 어떠한 영향을 미치는지 살펴본다. <표 3>과 <표 4>는 채권가격결정에 있어서 시장위험가격이 어떠한 영향을 미치는지를 주별, 월별로 하여 요약한 결과이다.

만기는 1년과 3년으로 하였다. 주별, 일별의 이자율은 의미있는 부분에서 임의의 정하였다. [그림 1]에서 보여지듯 이자율은 4.09%에서 7.36% 사이에서 관찰되는데 구간 밖의 이자율은 크게 의미가 없다. 따라서 <표 3>과 <표 4>에서 나타나는 수준의 이자율이 의미를 갖는 부분이라고 할 수 있다. 따라서 여기서 시장위험가격을 통한 모수적 방법과 비모수적 방법의 차이 분석에서는 <표 3>과 <표 4>에서의 이자율을 중심으로 분석하고자 한다. 또한 시장위험가격(λ)을 0으로 가정하였을 때와 비모수적 방법으로 추세항과 변동성항을 구하는 절차와 동일한 방법으로 구했을 때의 채권가격이 차이가 있는지를 분석하였다.

<표 3> 채권 가격 결정에 있어서 시장위험가격의 영향(주별)

채권가격					
이자율	만기	λ추정(a)	λ = 0(b)	차이(a-b)의 평균	t값 (표준편차)
4.21%	1년	1.00057	1.00057	-0.000000749889	-0.445736 (0.000376187)
	3년	1.04346	1.04348	-0.0000234544	-1.38171* (0.00037957)
4.58%	1년	0.999914	0.999942	-0.0000284962	-1.76971** (0.000360055)
	3년	1.03870	1.03871	-0.00000738024	-0.407752 (0.000404724)
5.07%	1년	0.998051	0.998066	-0.0000147632	-0.856717 (0.000385325)
	3년	1.03597	1.03600	-0.0000317417	-1.76894** (0.000401237)
5.31%	1년	0.997914	0.997946	-0.0000317180	-1.78092** (0.000398241)
	3년	1.03240	1.03247	-0.0000550649	-3.16240*** (0.000389352)
6.05%	1년	0.995214	0.995249	-0.0000345963	-2.09238** (0.000369720)
	3년	1.02639	1.02637	0.0000221535	1.35658* (0.000365160)

주) 1. 의미 있는 이자율 범위(4.21%~6.05%)에서 분석함.
2. *, **, ***는 α = 10%, 5%, 1%의 유의수준에서 유의함을 나타냄.

<표 4> 채권 가격 결정에 있어서 시장위험가격의 영향(일별)

채 권 가 격					
이자율	만기	λ추정(a)	λ=0(b)	차이(a-b)의 평균	t값 (표준편차)
4.5041%	1년	1.0013	1.0013	-0.0000165	-1.5390* (0.00023974)
	3년	1.04426	1.04425	0.0000120692	1.07888 (0.000250145)
4.7596%	1년	1.00093	1.00093	-0.00000729167	-0.647211 (0.000251922)
	3년	1.04384	1.04385	-0.0000166276	-1.41184* (0.0000263347)
5.2451%	1년	1.00059	1.00060	-0.0000146078	-1.26971 (0.000257255)
	3년	1.04305	1.04304	0.00000643983	0.570919 (0.000252223)
5.5006%	1년	1.00056	1.00054	0.0000190291	1.65855** (0.000256551)
	3년	1.04182	1.04181	0.00000260893	0.228638 (0.00025555152)
5.7561%	1년	1.00022	1.00025	-0.0000288432	-2.73618*** (0.000235714)
	3년	1.04191	1.04191	-0.00000891654	-0.751199 (0.000265415)

주) 1. 의미있는 이자율 범위(4.5041%~5.7561%)에서 분석함.
2. *, **, ***는 α = 10%, 5%, 1%의 유의수준에서 유의함을 나타냄.

위의 결과는 식 (6)을 기초로 하여 몬테카를로 시뮬레이션을 사용하여 1년과 3년의 경우 이자율이 주별, 일별일 경우 각각의 임의의 이자율에서의 채권가격을 구한 것이다. 여기서는 만기 T에서 1원의 가치를 가지는 순할인채의 가격을 구한 것이다.

<표 3>은 채권 가격 결정에 있어서 시장위험가격의 영향을 주별 자료를 사용하여 분석한 결과이다. 이자율이 4.21%이고 만기가 1년, 이자율이 4.58%일 때에는 만기가 1년과 3년 모두에서만 유의적이지 않을 뿐 나머지는 10%, 5%, 1%유의수준에서 유의적인 결과를 나타내고 있다. 이는 모수적인 방법과 비모수적인 방법으로 추정한 시장위험가격으로 채권가격을 결정하였을 때 차이가 있다는 것을 의미한다. 다시 말하면 합리적인 이유없이 시장위험가격을 가정하는 모수적 방법은 기각되어야 함을 뜻하며 비모수적 방법이 우월한 추정방법임을 의미하는 것이다.

일별로 분석한 결과가 <표 4>에서 나타나고 있는데 주별로 분석한 결과보다는 차이가 덜 한 것으로 분석되고 있다. 즉 이자율이 4.5041%일 때 만기가 1년인 채권가격, 이자율이 4.7596%일 때 만기가 3년인 채권가격, 이자율이 5.5006%일 때 만기가 1년인 채권가격, 그리고 이자율이 5.7561%일 때 만기가 1년인 채권가격에서는 유의한 차이를 보이는 것으로 나타난다. 주별로 하였을 때보다 유의적인 정도는 약한 것으로 분석되었다. 다만 여기서 이자율이 4.5041%일 때 만기가 3년인 채권과 이자율이 5.2451%일 때 만기가 1년인 채권가격의 경우에는 10%수준에서 유의적이지는 않지만 거의 유의적인 값에 가까운 값을 보이고 있다. 여기서 *는 10% 유의수준, **는 5% 유의수준, ***는 1% 유의수준에서 유의한 것을 의미하며 λ추정, $\lambda=0$은 각각 λ를 본 연구방법으로 추정하였을 때와 λ를 0으로 두었을 때의 시뮬레이션한 결과의 평균을 의미한다.

위의 분석으로 볼 때 시장위험가격을 통한 채권가격의 결정에는 모수적 방법과 비모수적 방법이 유의적인 차이가 존재한다는 것으로 결론을 내릴 수 있다.

V. 결론 및 한계점

Stanton이 사용한 방법을 이용하여 통화안정증권 자료에 적용하였다. Stanton의 방법으로 추세항과 변동성항을 추정한 결과 변동성항은 이자율이 상승할수록 증가하는 모양을 갖고 있다. 추세항은 일정수준에서는 일정한 값을 보이다가 어느 수준 이상에서는 음의 값을 갖는 것을 보이고 있다. 즉 추세함수에서는 비선형성이 존재하며, 이와 같은 비선형성이 이자율로 하여금 평균회귀성향을 갖게 함으로써 그 수준을 일정범위 이내로 안정시키는 역할을 하는 것으로 분석되었다.

이러한 실증결과는 종합적인 모수적 모형이라고 할 수 있는 CKLS의 결과가 잘못되었다는 것을 의미한다. 특히 이자율 모형화에서 널리 쓰이고 있는 선형 수익률 모형이 실제 이자율의 특성에 부합하지 않는다는 기존의 미국 실증 분석결과가 한국이자율의 경우에도 성립함을 나타낸다.

시장위험가격을 0으로 가정하였을 때와 비모수적 방법으로 추세항과 변동성항을 구하는 절차와 동일한 방법으로 구했을 때 차이가 있는지를 분석하였다. 그 결과 유의적인 차이가 존재한다는 사실을 발견했다.

이는 한국시장에서 채권의 가격을 결정하는데는 비모수적 방법을 이용하는 것이 적합하다는 것을 의미한다.

본 연구의 표본기간은 외환위기에서 이자율이 어느 정도 안정되었다고 보여지는 1999

년 8월 9일부터이다. 하지만 [그림 1]에서 보는 바와 같이 표본기간이 2001년 11월까지는 이자율이 지속적으로 하향하는 추세를 보이고 있다. 따라서 그 이후의 자료만을 이용하는 경우 추정결과가 달라질 가능성이 있음을 배제할 수 없는바 이에 대한 추가적인 실증검증을 할 필요가 있다.

참 고 문 헌

박준용, 오규택, 이창용, "확산과정을 이용한 이자율 모형 : 추정이론 및 실증분석", 한국은행 특별연구실, 경제분석, 제7권 제4호, (2001), 35-68.

박홍주, 최진범, "채권수익률곡선의 추정에 관한 연구", 2001.

한국은행, 우리나라의 금융시장, 2001.

장국현, 이승겸, "통안채 유통수익률의 기간구조 추정에 관한 연구", 2002.

Ahn, Dong-Hyun and Bin Gao, "A Parametric Nonlinear Model of Term Structure Dynamics," *The Review of Financial Studies*, 12, (1999), 721-762.

Ait-Sahalia, Yacine, "Nonparametric pricing of interest rate derivative securities," *Econometrica*, 64, (1996a), 527-560.

Ait-Sahalia, Yacine, "Testing continuous-time models of the spot interest rate," *The Review of Financial Studies*, 9, (1996b), 385-426.

Black, Fischer, Emanuel Derman and William Toy, "A one factor model of interest rates and its application to Treasury bond options," *Financial Analysts' Journal*, 46, (1990), 33-39.

Chan, K. C., Andrew G. Karolyi, Francis A. Longstaff and Anthony B. Sanders, "An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate," *Journal of Finance*, 47, (1992), 1209-1227.

Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephan A. Ross, "A re-examination of traditional hypotheses about the term structurae of interest rates," *Journal of Finance* 36, (1981), 769-799.

Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephan A. Ross, "A theory of the term structure of interest rates," *Econometrica*, 53, (1985), 385-467.

Dothan, M. U., "On the Term Structure of Interestr Rates," *Journal of Financial Economics*, 6, (1978), 59-69.

Ho, T. S. and S-B. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contigent Claims," *Journal of Finance*, 41, (1986), 1011-1029.

Oksendal, Bernt, *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*, third edition, Springer-Verlag, New York, 1985.

Stanton, Richard, "A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the

Market Price of Interest Rate Risk," *Journal of Finance*, (December 1997), 1973-2002.

Vasicek, Oldrich, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5, (November 1977), 177-188.

THE KOREAN JOURNAL OF FINANCIAL MANAGEMENT
Volume 20, Number 2, Dec. 2003

The Nonparametric Estimation of Interest Rate Model and the Pricing of the Market Price of Interest Rate Risk

Philsang Lee* · Seongharh Ahn**

〈abstract〉

In general, the interest rate is forecasted by the parametric method which assumes the interest rate follows a certain distribution. However the method has a shortcoming that forecasting ability would decline when the interest rate does not follow the assumed distribution for the stochastic behavior of interest rate. Therefore, the nonparametric method which assumes no particular distribution is regarded as a superior one. This paper compares the interest rate forecasting ability between the two method for the Monetary Stabilization Bond (MSB) market in Korea. The daily and weekly data of the MSB are used during the period of August 9th 1999 to February 7th 2003. In the parametric method, the drift term of the interest rate process shows the linearity while the diffusion term presents non-linear decline. Meanwhile in the nonparametric method, both drift and diffusion terms show the radical change with nonlinearity. The parametric and nonparametric methods present a significant difference in the market price of interest rate risk. This means in forecasting the interest rate and the market price of interest rate risk, the nonparametric method is more appropriate than the parametric method.

Keywords : Interest Rate Forecasting Model, Parametric Estimation, Nonparametric Estimation, Kernel Density Function, Mrket Price of Interest Rate Risk

* Professor, College of Business Administration, Korea University
** Doctoral Candidate, College of Business Administration, Korea University