財務管理硏究 第二十券 第一號(2003. 6), 213~231

우리나라 주식수익률의 확률변동성 특성에 관한 연구

장 국 현*

〈요 약〉

본 연구에서는 우리나라 주식시장에서 연속시간모형의 실증적 탐구와 확장을 위하여 정교하고 포괄적인 방법론을 도입하고자 하였다. 즉 확률변동성(Stochastic Volatility) 모형을 이용하여 우리나라 주식수익률 과정을 연속시간모형으로 설정하고 이런 정교한 연속모형의 추정을 위하여 효율적 적률법(EMM)을 도입하였다. 본 연구의 분석기간은 1995년 1월 3일부터 2002년 12월 30일까지 이며 분석대상은 일별 KOSPI 지수 2150 관측치 이다. 연구모형 분석결과 우리나라 주가지수 수익률의 비정규성, leptokurtic한 분포 및 확률변동성 등이 추정되었으며 특히 EMM 모형의 추정결과 우리나라 주식시장의 주가지수 수익률과정은 단일요인(one factor) 확률변동성 모형보다는 2 요인(two factor) 확률변동성 모형을 도입하는 것이 더 바람직한 것으로 판명되었고 또한 확률변동성 모형을 설정할 때에는 우리나라의 개별 주식수익률뿐만 아니라 주가지수 수익률 등에도 존재되는 것으로 알려진 점프 특성 고려의 필요성이 증대되었다. 외환위기 이후 주식시장의 변동성 급등락 현상이 갈수록 심화되어 금융자산 위험관리의 필요가 절실히 요구되는 요즘시기에 기초자산의 수익률과정 및 확률변동성 특성을 심층적으로 분석하는 본 연구를 통하여 각종 금융기관 및 투자자들의 투자기회비용과 시행착오를 줄이는데 큰 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

주제어 : 변동성, 확률변동성모형, 효율적 적률법(EMM), 연속시간모형, 위험관리

I. 서 론

현대 재무이론에서 연속시간모형(Continuous-time model)은 상당히 중요한 비중을 차지하고 있다. 사실 연속시간모형은 포괄적인 효용함수와 수익률분포를 바탕으로 intertemporal한 세팅에서 평균-분산 분석의 실행을 가능하게 함으로서 포트폴리오 분배의 문제나 헷징 의사결정 등에 매우 유용하게 사용될 수 있는 것으로 알려져 있다. 이러

논문접수일 : 2003년 1월 12일 논문게재확정일 : 2003년 3월 15일

* 건국대학교 경영대학

** 이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2001-041-C00296). 익명의 두 분 심사위원에게 감사드립니다.

한 맥락에서의 연속시간모형은 자산가격이론의 Merton(1971, 1973)과 Harrison and Kreps(1979), 파생상품 가격결정이론의 틀을 제시한 Black and Scholes(1973), 위험-중립적 가격결정 기법을 제시한 Cox and Ross(1976), 그리고 이를 이자율모형에 적용시킨 Vasicek(1977), Cox, Ingersoll and Ross(CIR, 1985)의 연구에서부터 비롯되었다.

그러나 이러한 연속시간모형에 대한 연구가 진행될수록 Black and Scoles나 Merton (1976)의 점프확산모형을 기초로 한 옵션가격에 체계적인 편의가 존재한다는 의견이 지배적이 되었고 이자율 기간구조 모형에서도 Vasicek이나 CIR의 연속시간모형에 편의가 존재한다는 의견이 대두되었다. 그리고 이러한 편의는 연속시간모형의 설정시 기초자산의 수익률 다이나믹스가 올바르게 설정되지 않은데서 비롯된다는 것이 밝혀졌다. 이에 따라 기초자산 수익률과정의 다이나믹스와 이에 관련된 파생상품의 적절한 가격결정에 대한 연구를 동시에 실행하는 것이 점점 더 중요한 과제로 떠오르고 있다.

주식수익률이나 이자율의 단기과정을 연속시간모형으로 설정한 연구는 수없이 많다. Black and Scholes(1973)는 점프가 없는 순수 확산(Pure Diffusion)모형을 제시하였고, Merton(1976)은 이에 점프를 추가하였으며 Jarrow and Rosenfeld(1984), Ball and Torous (1985), Akigiray and Booth(1986), Das and Uppal(1998), Das(1999)등은 이에 대한 실증적 근거를 제시하였다[1]. 한편 기초자산 수익률의 변동성 다이나믹스를 설명한 대표적인 연구로는 Engle(1982)의 ARCH and Bollerslev(1986)의 GARCH, Ghysels, Harvey and Renault(1996)의 확률변동성 모형등이 있으며 이러한 기법을 옵션가격결정에 응용한 연구로는 Jorion(1988), Melino and Turnbull(1990), Engle and Mustafa(1992), Heston (1993), Duan(1995), Heston and Nandi(1997) 및 Ritchken and Trevor 1998) 등이 있다.

연속시간모형을 이자율의 단기 동태모형에 적용하여 비모수적으로 접근한 연구로는 Ait-Sahalia(1996), Hansen and Scheinkman(1995), Conley et al.(1996), Stanton(1997), Jiang and Knight(1997) 및 Bandi and Phillips(1998)등을 들 수 있으나 주식수익률 과정에 점프나 확률변동성과 같은 잠재적 요인이 추가되면 이들의 방법으로는 직접적인 추정이 어려워지므로 효율적 적률법(Efficient Method of Moment : EMM)과 같은 시뮬레이션관련 추정기법이 각광을 받기 시작하였다. EMM은 Gallant and Tauchen(1997) 에 의하여 처음으로 주식수익률 과정의 다이나믹스를 추정하는 기법으로 소개되었다. Pan(1999)의 연구에서는 주별 주식수익률 자료를 이용하여 주식수익률 다이나믹스와 위험중립 분포의 결합추정을 시도하였는데 점프-확산 과정은 비교적 모형을 적절하게 설명하였으나 변동성 다이나믹스를 적절하게 추정하는데는 실패하였다. Chacko and Viceria

1) 이들의 실증결과에 의하면 점프요인은 유의하였으나 주식수익률 이분산성의 중요성이 제기되었으며 변동성스마일의 합리적 설명 등과 같은 실증과제의 중요성이 대두되었다.

(1999)의 연구에서는 주별 및 월별 CRSP 주가지수 자료를 이용하여 확률변동성과 점프 컴포넌트를 추정하고자 하였으며 Jiang and Knight(1999)의 연구에서도 일별 주식수익률 자료를 이용하여 순수 확산과정 모형을 추정하였다. 특히 Chernov and Ghysels (1999)의 연구에서는 주가지수 수익률의 확률변동성 제곱근과정 확산모형(Square-root Stochastic Volatility Diffusion)을 EMM 기법을 사용하여 추정하였으며 EMM에의한 시뮬레이션적 추정기법을 사용하는 연구는 최근의 Eraker, Johannes and Polson(2000)의 연구에서도 지속적으로 수행되고 있다. 한편 기초자산 수익률의 확률변동성 모형에 관련된 국내 연구로는 KOSPI 200 지수의 확률변동성을 시뮬레이션 스무더 기법으로 추정한 김명직, 장국현(1996)의 연구가 있으나 이들의 연구에서는 주식수익률의 확률변동성모형을 비교적 단순한 형태로 전개시키고 있다.

따라서 본 연구에서는 우리나라 주식시장에서 연속시간모형의 실증적 탐구와 확장을 위하여 정교하고 포괄적인 방법론을 도입하고자 하였다. 즉 확률변동성(Stochastic Volatility) 모형을 이용하여 우리나라 주식수익률 과정을 연속시간모형으로 설정하고 이런 정교한 연속모형의 추정을 위하여 최근 Gallant and Tauchen(1977)에 의하여 처음 개발되어 이자율기간구조 모형에 적용되기 시작한 EMM을 도입하고자 한다.

외환위기 이후 주식시장의 변동성 급등락 현상이 갈수록 심화되어 금융자산 위험관리의 필요가 절실히 요구되는 요즘시기에 기초자산의 수익률과정 및 확률변동성 특성을 심층적으로 분석하는 본 연구를 통하여 각종 금융기관 및 투자자들의 투자기회비용과 시행착오를 줄이는데 큰 도움을 줄 수 있을 것이다. 특히 포트폴리오 관리자나 위험관리자 및 금융감독기관 모두에게 큰 혜택을 가져다 줄 수 있을 것으로 기대된다. 본 연구의 분석기간은 1995년 1월 3일부터 2002년 12월 30일까지이며 분석대상은 일별 KOSPI 지수이다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 제 Ⅱ장에서는 연속시간모형을 확률변동성 모형으로 확장해나가는 과정을 간단하게 설명한다. 제 Ⅲ장에서는 연속시간모형을 일종의 Simulated Method of Moment의 일종인 EMM 기법으로 추정하는 방법을 소개한다. 제 Ⅳ장에서는 제 Ⅱ장, 제 Ⅲ장의 연구방법론을 사용하여 추정한 실증분석결과를 논의하고 제 Ⅴ장에서는 요약 및 결론을 제시한다.

Ⅱ. 연속시간모형의 설정과 확장

Black and Scholes의 옵션가격결정모형과 합치되는 아래의 식 (1)은 주식수익률의 생성과정이나 파생상품의 가격결정에 있어서 가장 기본적인 분석 틀을 제공하는 연속시간

모형의 벤치마크모형이라고 할 수 있을 것이다.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{1}$$

가장 기본이 되는 식 (1)의 drift term에 식 (2)처럼 분산요소를 추가하고 동시에 확률변동성 팩터를 식 (3)과 식 (4)처럼 추가하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu + cV_t)\,dt + \sqrt{V_t}\,dW_{1,t} \tag{2}$$

$$d\ln V_t = (\alpha - \beta \ln V_t)\,dt + \eta\,dW_{2,t} \tag{3}$$

$$dV_t = (\alpha - \beta V_t)\,dt + \eta\sqrt{V_t}\,dW_{2,t} \tag{4}$$

여기서 W_1과 W_2는 표준 브라우니안 모션을 나타내고 식 (3)의 로그분산과정과 식 (4)의 분산과정은 모두 평균회귀를 하는 것으로 가정되어 있다. 또한 변동성 확산 파라메터인 α, β, η등에 의하여 특징 지워지는 확률변동성 팩터는 주식수익률 과정의 초과 첨도부분을 적절하게 측정할 수 있을 것이다. 더불어 식 (2)와 식 (3), 또는 식 (2)와 식 (4)에서는 분산과정에 대한 이노베이션과 수익률과정에 대한 이노베이션간의 부(-)의 상관관계에 의하여 야기되는 비대칭성 효과는 아래와 같이 검증할 수 있을 것이다.

$$corr(dW_{1,t}\ ,\ dW_{2,t}) = \rho < 0$$

기초자산의 수익률과정이 식 (2)와 식 (4)에 의하여 결정될 경우 Heston(1993)의 연구에서처럼 옵션가격결정모형이 닫힌 해를 갖지만 EGARCH와 이산적 확률변동성모형설정과 맥을 같이하는 식 (2)와 식 (3)처럼 기초자산의 수익률과정이 설정되면 아직까지 닫힌 해가 존재하지 않음으로 옵션가격결정을 위해서는 Melino and Turnbull(1990)이나 Benzoni(1998)처럼 수치해석기법을 적용하게 된다. 단지 식 (2), 식 (3)의 콤비네이션과 식 (2), 식 (4)의 콤비네이션중 어떤 모형이 주식수익률 과정을 적절하게 설명하는지의 여부는 순수한 실증적 이슈가 될 것이다.

실제로 우리나라에서 지금까지 행하여진 확률모형에 의한 변동성의 추정이나 예측모형으로는 GARCH류의 모형, 마코프 전환모형 등이 있으나 일반화된 확률변동성 모형으로는 아래와 같은 김명직, 장국현(1996)의 모형이 있다.

$$R_t = \xi_t e^{(1/2)\sigma_t}, \tag{5}$$

$$\sigma_{t+1} = \phi\sigma_t + u_t . \tag{6}$$

여기서 ξ_t, u_t는 상호 독립인 백색잡음이다. 이 모형은 Black-Scholes 옵션가격결정모형을 확률변동성 옵션가격결정모형으로 일반화하는 논문에서 사용되어 왔다. Generalized method of moments(GMM)에 의해 확률변동성 모형을 추정하고 시뮬레이션에 의해 확률변동성 옵션모형을 적용하는 방법이 초기에 사용되었으나 Harvey, Ruiz and Shephard (1994)는 준최우법에 의한 추정을 제안하였다.

먼저 식 (5)의 양변을 제곱한 뒤 자연대수를 취하면

$$y_t = \alpha_t + \ln\xi_t^2 \tag{7}$$

$$\alpha_t = \phi\alpha_{t-1} + u_t \quad (\alpha_t = \sigma_t) \tag{8}$$

여기서 $y_t = \ln R_t^2$이고 식 (7)~식 (8)은 non-Gaussian 선형 상태-공간 모형이 된다. 이때 Harvey et al.(1994)은 $\ln\zeta_t^2 \approx N(-1.2704, 4.9348)$로 근사하여 식 (7)~식 (8)을 Kalman 필터로 추정하는 준최우법을 제안하고 있다. 그러나 QMLE가 GMM에 비해 개선되고 추정도 용이한 반면 σ_u^2, ϕ 의 값에 따른 QMLE의 적합성에 많은 의문이 제기되어 왔다. Shephard(1994)는 $Z = \ln\zeta_t^2$ 의 분포, 즉, $\ln\chi^2(1)$ 을 혼합분포, 즉,

$$f_Z(Z) \approx \sum_{i=1}^{K} \pi_i f_{Z|w^i}(Z|w^i)$$

로 근사하는 베이즈추정법(multi-state sampler)을 제안하였다. 즉, 확률변동성 모형을 평균 항을 생략하고 다음의 상태-공간 모형으로 표현하는 경우

$$y_t = u(w_t) + \alpha_t + g(w_t)e_{1t}, \tag{9}$$

$$\alpha_t = \phi\alpha_{t-1} + e_{2t} \quad (\alpha_t = \sigma_t) \tag{10}$$

시뮬레이션 smoother를 이용하면 $p(\alpha|y_t, w)$를 직접 추정할 수 있게 된다[2]. 그러나 이는 비교적 단순하고 간단한 형태의 확률변동성 모형에 속하며 추정과정상 데이터를 인위적으로 변환해야하는 불편함이 따를 수 있게 된다. 따라서 본 연구에서는 다음과 같은 연속과정 확률변동성 모형을 제시하고자 한다.

2) 시뮬레이션 smoother에 의한 KOSPI 200 주가지수 수익률 확률변동성 추정 및 예측방법의 보다 자세한 설명은 김명직, 장국현(1996)을 참고하기 바람.

$$dX_t = (\theta_{11} + \theta_{12} H_t)dt + \exp(\gamma_{11} + \gamma_{12} H_t)\, dW_{1,t} \quad 0 \le t \le \infty \tag{11}$$

$$dH_t = (\theta_{21} + \theta_{22} H_t)dt + \gamma_{21} dW_{2,t} \tag{12}$$

식 (11)~식 (12)에서 X_t는 일별 KOSPI에 로그를 취한 것이고 W_1과 W_2는 표준 브라우니안 모션을 나타내고 있으므로 식 (11)~식 (12)는 주가지수 수익률과정과 분산과정을 one factor 확률변동성 모형으로 표기한 것이 된다. 후술할 EMM을 이용하면 모수 $\psi = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21})'$ 등을 추정할 수 있다. 다음에는 EMM 절차를 간단히 소개하기로 한다.

Ⅲ. 효율적 적률법(EMM)

본 장에서는 전술한 여러 가지 형태의 연속시간모형들을 일종의 시뮬레이션 적률법(Simulated Method of Moment)의 하나인 EMM 기법으로 추정하는 방법을 단계적으로 소개하기로 한다. 먼저 전술한 식 (11)~식 (12)를 살펴보기로 하자.

$$dX_t = (\theta_{11} + \theta_{12} H_t)dt + \exp(\gamma_{11} + \gamma_{12} H_t)\, dW_{1,t} \quad 0 \le t \le \infty \tag{11}$$

$$dH_t = (\theta_{21} + \theta_{22} H_t)\, dt + \gamma_{21}\, dW_{2,t} \tag{12}$$

식 (11)~식 (12)의 구조 파라미터 벡터를 $\psi = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21})'$라고 하자. 주식수익률과정 식 (11)에 확률변동성 과정 식 (12)를 추가하는 경우 최우추정법에 의한 추정은 일반적으로 불가능하다. Andersen and Lund(1997)은 Gallant and Tauchen (1996)의 효율적 적률법(Efficient Method of Moments ; EMM)을 이용한 추정을 제안하였다. 추정절차는 다음과 같이 요약할 수 있다. 첫째, 주식수익률 시계열의 조건부 밀도함수를 준최우법(QML)을 사용하여 준비모수적(semi-nonparametric ; SNP) 방법으로 추정한다. 이때 추정하는 SNP 모형을 '스코어 생성모형'(score generator) 또는 '보조 모형'(auxiliary model)이라고 부른다. 둘째, SNP 방법으로 추정한 보조 모형의 스코어의 기대값을 계산한다. 다음 스코어 기대값의 quadratic form을 만든 뒤 모형 파라미터를 GMM을 사용하여 추정한다. GMM 추정시 각각의 모형 파라미터에 대하여 스코어의 기대값을 구하는 과정에서 몬테카를로 적분법을 사용하며 이러한 절차는 시뮬레이션 적률법(Simulated Method of Moments ; SMM)의 아이디어와 유사하다. SNP 모형 추정을 이용한 주식수익률 과정 추정절차를 상술하면 다음과 같다. 먼저 연속복리수익률 형태로 표시된 주가지수 수익률을 r_t, 그리고 $x_t = (x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, x_{t-M})$이라고 할 때

SNP 모형 추정법에서는 다음과 같은 보조 모형(auxiliary model) $f_K(\cdot)$을 설정한다.

$$f_K(r_t|x_t\,;\,\xi)=\left(eps+(1-eps)\frac{[P_K(z_t,x_t)]^2}{\int_{-\infty}^{\infty}[P_K(u,x_t)]^2 n(u)du}\right)\frac{n(z_t)}{\sqrt{h_t}} \tag{13}$$

단, $eps=0.01$, $n(\cdot)=$ 표준정규분포 밀도함수

$$z_t=\frac{r_t-\mu_t}{\sqrt{h_t}} \tag{14}$$

$$\mu_t=\phi_0+\sum_{i=1}^{p}\phi_i r_{t-i} \tag{15}$$

$$P_K(z,x_t)=\sum_{i=0}^{K_z}a_i(x_t)z^i=\sum_{i=0}^{K_z}\left(\sum_{j=0}^{K_x}a_{ij}x_t^j\right)z^i,\quad a_{00}=1 \tag{16}$$

$$\ln h_t=\omega+\sum_{i=1}^{p}\beta_i\ln h_{t-i}+(1+\alpha_1 L+\cdots+\alpha_q L^q)\left[\theta_1 z_{t-1}+\theta_2(b(z_{t-1})-\sqrt{2/\pi})\right] \tag{17}$$

식 (16)은 Hermite 다항식이며 식 (17)의 EGARCH(p, q) 조건부이분산모형과 식 (15)의 평균방정식을 사용하여 식 (14)에서는 이분산 조정 표준화변량 z_t를 계산함을 알 수 있다. $b(z)$는 절대값함수 $|z|$에 대한 이차 미분가능 근사함수를 의미하며 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$b(z)=\begin{cases}|z| & \text{for } |z|\geq\dfrac{\pi}{2K}\\[2ex] \dfrac{(\pi/2-\cos(Kz))}{K} & \text{for } |z|<\dfrac{\pi}{2K}\end{cases}$$

식 (14)~식 (17)의 파라미터를 $\xi=(\phi_0,\phi_1,\cdots,\omega,\beta_i,\alpha_i,\theta,a_{ij})'$라고 할 때 이들 파라미터의 QML 추정치는 $\ln f_K(\xi;r,X)$를 ξ에 대하여 극대화함으로써 구할 수 있다. 실제 데이터 r_t의 관측치 수를 T라고 할 때 T개의 표본을 이용한 ξ의 QML 추정치를 $\hat{\xi}$이라고 하자. EMM에서 사용할 모멘트 조건은 다음과 같은 보조 모형(또는 SNP 모형)의 스코어함수에 대한 기대값이다.

$$m(\psi,\hat{\xi})=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\ln f_K(r|X\,;\,\hat{\xi})}{\partial\xi}dP(r,X\,;\,\psi) \tag{18}$$

단 $P(r, X; \psi)$는 주식수익률 r과 X에 포함된 조건항(주식수익률의 과거값들)의 결합 확률분포를 나타낸다. 식 (18)의 기대값을 연산식으로 계산한다는 것은 거의 불가능하므로 실제 계산에서는 몬테카를로 적분법(Monte Carlo integration)이 사용된다. 몬테카를로 적분법에 의하여 EMM을 실행하는 절차는 다음과 같다. 먼저 임의의 파라미터 값 ψ에 대하여 식 (11)~식 (12)의 이산적 근사식(예를 들어 Euler scheme)을 설정하고 표본의 크기를 충분히 큰 수, 예를 들어 표본의 크기가 $N(\gg T)$ 만큼 데이터를 생성한다[3]. 이때 생성된 시계열을 $\{r_t(\psi), X_t(\psi)\}_{t=1}^{t=N}$라고 두자. EMM에서 사용할 모멘트 조건, 즉 식 (18)은 다음과 같이 근사하여 추정할 수 있다[4].

$$m_N(\psi, \hat{\xi}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{\partial \ln f_K(r_t(\psi) | X_t(\psi); \hat{\xi})}{\partial \xi} \tag{19}$$

EMM에 의한 모수 ψ 추정의 최종단계는 다음과 같이 가중행렬 W_T을 사용하여 일반적으로 알려진 GMM을 실행하는 것이다.

$$\widehat{\psi}_T = \arg\min_{\psi} m_N(\psi, \hat{\xi})' W_T m_N(\psi, \hat{\xi}) \tag{20}$$

$$\text{단, } S_T(\hat{\xi}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{\partial \ln f_K(r_t | X_t; \hat{\xi})}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \ln f_K(r_t | X_t; \hat{\xi})}{\partial \xi} \right)', \tag{21}$$

$$W_T = S_T^{-1} \tag{22}$$

식 (21)~식 (22)에서 보는 것처럼 최적 가중행렬 W_T는 구조 파라메터 ψ의 함수가 아니므로 GMM 실행시 반복 계산할 필요가 없다.

EMM 추정량 $\widehat{\psi}$의 점근적 공분산 행렬은 다음과 같이 계산한다.

$$VC(\widehat{\psi}) = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial m_N(\widehat{\psi}, \hat{\xi})'}{\partial \psi} S_T(\hat{\xi})^{-1} \frac{\partial m_N(\widehat{\psi}, \hat{\xi})}{\partial \psi'} \right)^{-1} \tag{23}$$

---

3) 만일 자료가 일별이고 하루를 h기간으로 세분하면 Δ는 1/h로 정의한다. 만일 N개의 일별주식수익률을 생성하고자 하면 $N \cdot h$개 만큼의 자료를 생성하여 이들 주식수익률 시리즈 중 매 h번째 동일한 간격으로 기록함으로써 N개의 시뮬레이션한 일별주식수익률 시계열을 얻을 수 있다. 또한 생성한 자료가 초기값에 큰 영향을 받지 않게 하려면 $(N \cdot h+S)$개 만큼 생성한 뒤 $(S+1)$번째 부터의 자료를 사용하면 된다.

4) 시뮬레이션 과정에서 확률오차를 줄이는"variance reduction method"중 anti-thetic variates 기법을 사용할 수도 있다. 그 절차는 다음과 같다. 먼저 표준변량을 생성하여 스코어함수의 기대값을 계산하고 다시 이들 표준편차에 마이너스를 곱한 표준변량을 사용하여 스코어함수의 기대값을 계산한 뒤 이를 평균하여 기록한다.

Ⅳ. 실증분석

1. 자 료

본 연구의 분석기간은 1995년 1월 3일부터 2002년 12월 30일 까지 이며 분석대상은 일별 KOSPI 지수 2150 관측치 이다. 한편 1995년, 1996년, 1997년, 1998년은 거래일이 각각 293, 293, 292, 292일 이었으나 토요일 휴장 방침에 따라 1999년, 2000년 2001년 및 2002년의 거래일은 각각 249, 241, 246, 244일 이었다[5]. 또한 본래의 자료는 1995년 1월 3일부터이나 처음 20개의 관측치는 연구모형에서 분산과정의 초기화를 위하여 사용되었다.

2. 실증분석결과

제안하는 연구의 실행가능성을 평가하기 위하여 본 연구에서는 1995년 1월 3일부터 2002년 12월 30일까지 일별 KOSPI 지수를 이용하여 주식수익률 시계열의 조건부 밀도함수를 준최우법(QML)을 사용하여 준비모수적(seni-nonparametric ; SNP) 방법으로 추정하였다. 먼저 SNP 모형 추정에 앞서 자료의 특성과 대략적 파라미터의 값을 가늠하기 위하여 식 (11)의 EGARCH 모형을 추정하였다. 즉,

1) EGARCH 모형 :

$$r_t = \phi_0 + (1+\phi_1) r_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \phi_{i+1} \Delta r_{t-i} + r_{t-1}^{\gamma} \sqrt{h_t}\, z_t$$

$$\ln h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \ln h_{t-i} + (1 + \alpha_1 L + \cdots + \alpha_q L^q)[\theta_1 z_{t-1} + \theta_2 (b(z_{t-1}) - \sqrt{2/\pi})]$$

여러 모형설정을 적용한 결과 다음의 <표 1>과 같은 최우추정 결과를 얻었다. 초기화를 위하여 $\ln h_0$, z_0 그리고 z_{-1}은 영으로 가정하였다[6]. EGARCH 모형 추정결과를 바탕으로 여러 가지 Hermite Polynomial 함수추정을 시도한 결과 다음과 같은 SNP 모형을 추정하였으며 추정결과는 <표 2>에 제시하였다[7].

---

5) 연 거래일은 실제로 연구모형에서 조건부 변동성을 추정한 다음 이를 연율 변동성으로 표시할 때 t-시점의 년율 표시 변동성 $= 100 \cdot \sigma_t \sqrt{tdays}$ 로 계산한다(여기서 tdays는 연간 거래일수를 말함).

6) 처음 20개의 관측치는 분산과정의 초기화를 위하여 사용하였다.

7) SNP 모형 추정에 있어서 적분함수는 GAUSS의 INTSIMP( )함수를 사용하였고 적분범위는 -10.5에서 10.5로 하였다.

<표 1> EGARCH 모형의 최우추정 결과

파 라 미 터	ML 추정치	t-통계량
ϕ_0	-0.0446	-1.410
ϕ_1	0.1368	5.915
ϕ_2	-0.0329	-1.547
ω	0.0135	2.896
β_1	0.9938	349.600
θ_1	-0.0346	-3.733
θ_2	0.1385	4.895
α_1	0.0291	0.340
대수우도함수값	-4356.83	

주) 본래의 자료는 1995년 1월 3일부터 2002년 12월 30일까지이나 처음 20개의 관측치는 분산과정의 초기화를 위하여 사용되었다. 자료는 연속복리수익률 형태로 사용하였다.

2) SNP 모형 :

$$f_K(r_t|x_t;\xi)=\left(eps+(1-eps)\frac{[P_K(z_t,x_t)]^2}{\int_{-\infty}^{\infty}[P_K(u,x_t)]^2 n(u)du}\right)\frac{n(z_t)}{\sqrt{h_t}}$$

단, $eps=0.01$, $n(\cdot)=$ 표준정규분포 밀도함수

$$z_t=\frac{r_t-\mu_t}{\sqrt{h_t}}$$

$$\mu_t=\phi_0+\sum_{i=1}^{p}\phi_i r_{t-i}$$

$$P_K(z,x_t)=\sum_{i=0}^{K_z}a_i(x_t)z^i=\sum_{i=0}^{K_z}\left(\sum_{j=0}^{K_x}a_{ij}x_t^j\right)z^i,\quad a_{00}=1$$

$$\ln h_t=\omega+\sum_{i=1}^{p}\beta_i\ln h_{t-i}+(1+\alpha_1L+\cdots+\alpha_qL^q)[\theta_1 z_{t-1}+\theta_2(b(z_{t-1})-\sqrt{2/\pi})]$$

<표 1>과 <표 2> 의 추정결과에 의하면 그 동안 국내에서 행하여진 확률모형에 의한 변동성 추정결과처럼 우리나라 주가지수 수익률의 비정규성, leptokurtic한 분포[8] 및 확률변동성 등을 추정할 수 있어 보인다. 이러한 사실은 본 연구모형으로부터 추정된 조건

부 변동성과 실증 분석기간 동안의 역사적 KOSPI 추이를 동시에 도시하고 있는 [그림 1]에 의해서도 뚜렷하게 나타나고 있다. 특히 [그림 1]에 의하면 우리나라의 주식시장에서 주식장세와 확률적으로 변하는 조건부 변동성은 서로 반대방향으로 움직이고 있음을 알 수 있다[9]. [그림 1]에서 음영으로 처리되어 있는 부분은 우리나라 주식시장의 변동성이 급등하면서 regime-switching하기 시작하는 1997년 10월 1일 이후 부분을 나타내고 있다. 한편 <표 3>에서는 1995년 1월 3일부터 2002년 12월 30일 까지 일별 KOSPI 2150개 관측치를 사용하여 단일요인(one factor) 확률변동성 모형을 EMM으로 추정한

<표 2> SNP 모형의 추정 결과

파라미터	ML 추정치	*t*-통계량
ϕ_0	-0.0171	-0.254
ϕ_1	0.1619	9.892
ϕ_2	-0.0776	-4.557
ω	-0.0079	-0.687
β_1	0.9942	436.987
θ_1	-0.0129	-2.273
θ_2	0.1041	3.220
α_1	1.0437	1.684
a_{10}	0.0477	0.910
a_{20}	-0.0193	-0.647
a_{30}	-0.0552	-2.747
a_{40}	0.0180	2.445
a_{50}	0.0086	5.464
a_{60}	-0.0016	-3.839
대수우도함수값	-4360.77	

주) 본래의 자료는 1995년 1월 3일부터 2002년 12월 30일까지이나 처음 20개의 관측치는 분산과정의 초기화를 위하여 사용되었다. 자료는 연속복리수익률 형태로 사용하였고 적분함수는 GAUSS의 INTSIMP()함수를 사용하였으며 적분범위는 -10.5에서 10.5로 설정하여 모형을 추정함.

8) 이는 주로 GARCH류의 모형으로 모형화 할 수 있다.

9) 논평자의 지적처럼 이는 매우 직관적인 표현이 될 수 있다. 이러한 사실을 주장하기 위해서는 보다 구체적인 계량적 검증결과가 뒷받침 되어야 할 것으로 본다.

결과를 제시하고 있다. 본 연구에서는 단일요인(one factor) 확률변동성 모형의 추정시 7개의 파라미터중 식별을 위하여 θ_{21}과 γ_{21}은 0으로 제약하였고 θ_{12}를 0으로 놓아 평균식 에서의 변동성효과를 잠정적으로 제거하였다. EMM 추정시 사용된 SNP 모형은 $L_\mu=1$, $L_g=1$, $L_r=1$, $L_p=1$, $K_z=6$, $K_x=0$ 으로 설정되는 11116000 모형이며[10] 이때 시뮬레이션 횟수는 추정시간과 컴퓨터의 수용능력을 고려하여 50,000번으로 제한하였다.

<표 3> 확률변동성 모형의 EMM 추정 결과

파 라 미 터	ML 추정치	t-통계량
θ_{11}	-0.4568	-4.586
θ_{22}	-0.3459	-32.345
γ_{11}	-0.0789	-14.784
γ_{12}	0.2670	49.072
γ_{21}	1	-
$X^2[d.f.]$	38.08[7]	
$P-Value$	$(< 10^{-5})$	

주) 추정식은 다음과 같다.

$$dX_t=(\theta_{11}+\theta_{12}H_t)dt+\exp(\gamma_{11}+\gamma_{12}H_t)dW_{1,t},\ \ 0\le t\le\infty$$

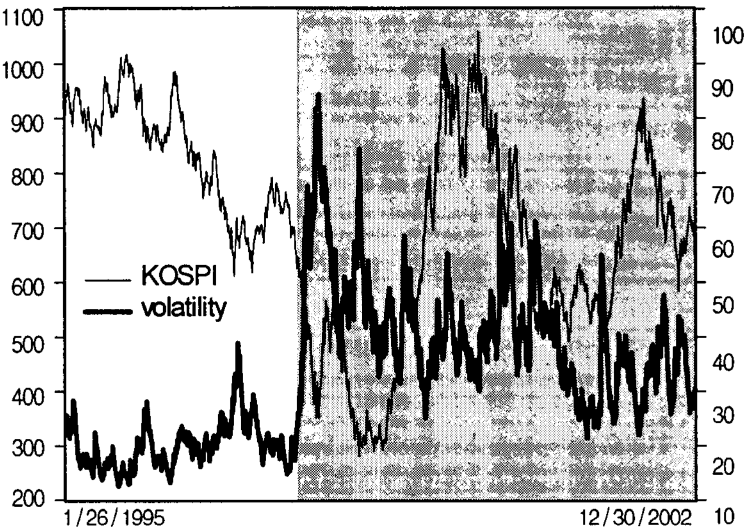
$$dH_t=(\theta_{21}+\theta_{22}H_t)dt+\gamma_{21}dW_{2,t}$$

자료는 KOSPI 1995년 1월 3일부터 2002년 12월 30일 까지 2150개의 일별 관측치가 사용되었으며 one factor 확률변동성 추정모형에서 7개의 파라미터중 식별을 위하여 θ_{21}과 γ_{21}은 0으로 제약하였고 θ_{12}를 0으로 놓아 평균식에서의 변동성효과를 잠정적으로 제거하였다. 한편 SNP 모형은 여러 모형을 검토한 결과 $L_\mu=1$, $L_g=1$, $L_r=1$, $L_p=1$, $K_z=6$, $K_x=0$ 으로 설정되는 11116000 모형이 본 자료에 적합한 것으로 판정되어 11116000 모형을 이용하여 EMM 모형을 추정하였다. EMM 추정시 시뮬레이션 횟수는 추정시간과 컴퓨터의 수용능력을 고려하여 50,000번으로 제한하였다.

EMM 추정결과 카이제곱 통계량과 기타 SNP 스코아에 대한 통계량 등을 종합적으로 검토해 볼때 단일요인(one factor) 확률변동성 모형보다는 Chernov, Gallant, Ghysels, and Tauchen(2002)의 연구에서 제안된 2 요인(two factor) 확률변동성 모형을 도입하는 것이 더 바람직할 것으로 사료된다. 또한 확률변동성 모형을 설정할 때에는 우리나라의 개별 주식수익률뿐만 아니라 주가지수 수익률 등에도 존재되는 것으로 보고 되고 있는 점프 특성도 고려되어야 할 것으로 본다.

10) 보다 상세한 내용은 Gallant and Tauchen(2001)을 참조.

[그림 1] 연구모형에서 추정된 조건부 변동성과 역사적 KOSPI



주) 왼쪽 축은 역사적 KOSPI의 지수수준을 측정하고 있으며 오른쪽 축은 SNP 모형으로부터 추정된 시간가변적 조건부 변동성을 나타냄. 조건부 변동성은 연율 표준편차로 표시되어 있으며 자료는 연속복리수익률 형태로 사용하였다. 조건부 변동성을 연율로 나타낼 때 1995년, 1996년, 1997년, 1998년은 거래일이 각각 293, 293, 292, 292일 이었으나 일별 표준편차에 $(292)^{1/2}$ 를 곱하여 계산하였으며 1999년 이후부터는 거래일이 각각 249, 241, 246, 244일 이었으나 일률적으로 $(245)^{1/2}$ 를 곱하여 계산하였다. 본래의 자료는 1995년 1월 3일부터 2002년 12월 30일까지이나 처음 20개의 관측치는 분산과정의 초기화를 위하여 사용되었으므로 그림에서는 1995년 1월 26일 자료부터 보고 되고 있다. 음영으로 처리된 부분은 우리나라의 주식수익률 변동성이 고분산 국면으로 전환되는 시점인 1997년 10월 1일부터 본 연구의 종료시점까지임.

V. 결 론

현대 재무이론에서 연속시간모형은 상당히 중요한 비중을 차지하고 있다. 사실 연속시간모형은 포괄적인 효용함수와 수익률분포를 바탕으로 intertemporal한 세팅에서 평균-분산 분석의 실행을 가능하게 함으로서 포트폴리오 분배의 문제나 헷징 의사결정 등에 매우 유용하게 사용될 수 있는 것으로 알려져 있다. 본 연구에서는 우리나라 주식시장에서 연속시간모형의 실증적 탐구와 확장을 위하여 변동성을 팩터로 설정한 one factor 확률변동성모형을 EMM으로 추정하여 정교하고 포괄적인 실증 방법론을 도입하고자 하였다. 특히 우리나라 에서는 외환위기 이후 주식시장의 변동성 급등락 현상이 갈수록 심화되어 금융자산 위험관리의 필요가 절실히 요구되고 있다. 따라서 기초자산의 수익률과정 및 확률변동성 특성을 심층적으로 분석하는 본 연구를 통하여 각종 금융기관 및 투자자들의 투자기회비용과 시행착오를 줄이는데 큰 도움을 줄 수 있을 것으로

본다. 특히 포트폴리오 관리자나 위험관리자 및 금융 감독기관에게 혜택을 가져다 줄 수 있을 것으로 사료되며 또한 본 연구의 방법론 자체가 금융시계열을 포함한 다른 여러 분야에 크게 응용될 수 있는 외부효과도 기대된다.

참 고 문 헌

김명직, 장국현, "KOSP I200 지수의 확률변동성 측정방법", 선물연구, 제4호, (1996), 131-156.

김명직, 장국현, "한국이자율 기간구조 추정 : 통화 안정채권의 기준수익률을 중심으로", 재무연구, 제13권 제2호, (2000), 79-102.

김명직, 장국현, 금융시계열분석, 제2판, 경문사, 2002.

Aït-Sahalia, Y., "Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities," *Econometrica*, 64, (1996), 527-560.

Akgiray, V. and B. Booth, "Stock Price Processes with Discontinuous Time Paths : An Empirical Examination," *The Financial Review*, 21, (1986), 163-184.

Andersen, T. G., H. J. Chung and B. E. Sorensen, "Efficient Method of Moments Estimation of a Stochastic Volatility Model : A Monte Carlo Study," *Journal of Econometirics*, 91, (1999), 61-87.

Andersen, T. G. and J. Lund, "Stochastic Volatility and Mean Drift in the Short Term Interest Rate Diffusion : Sources of Steepness, Level and Curvature in Yield Curve," Working Paper #214, Northwestern University, 1996.

Andersen, T. G. and J. Lund, "Estimating Continuous-Time Stochastic Volatility Models of the Short Term Interest Rate," *Journal of Econometrics*, 77(2), (1997), 343-377.

Back. K., "Asset Pricing for General Processes," *Journal of Mathematical Economics*, 20, (1991), 317-395.

Backus. D. and A. Gregory, "Theoretical Relation Between Risk Premiums and Conditional Variances," *Journal of Business and Economic Statistics*, 11, (1983), 177-185.

Ball, C. and W. Torous, "On Jumps in Common Stock Prices and their Impact on Call Option Pricing," *Journal of Finance*, 40, (1985), 155-173.

Bandi, F. and P. C. B. Phillips, "Econometric Estimation of Diffusion Models," Working paper, Cowles Foundation, Yale University, 1998.

Bates. D. S., "Jumps and Stochastic Volatility : Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options," *The Review of Financial Studies*, 9(1), (1996), 69-107.

Benzoni, L., "Pricing Options under Stochastic Volatility : An Econometric Analysis," Unpoblished Manuscript, Kellogg Graduate School of Management, 1998.

Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, (1973), 637-654.

Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, (1986), 307-327.

Chacko, G. and L. M. Viceira, "Special GMM Estimation of Continuous-Time Processes.," Working Paper, Harvard University, 1999.

Chernov, M. and E. Ghysels, "A Study towards a Unified Approach to the Joint Estimation of Objective and Risk Neutral Measures for the Purpose of Options Valuation," Forthcoming in *The Journal of Financial Economics*, 1999.

Chernov, M., R. Gallant, E. Ghysels and G. Tauchen, "A New Class of Stochastic Volatility Models with Jumps : theory and Estimation," Working Paper, Penn State University. University of North Carolina, Duke University, 1999.

Chernov, M., R. Gallant, E. Ghysels and G. Tauchen, "Alternative Models for Stock Price Dynamics," Working Paper, University of North Carolina, Chapel Hill, 2002.

Conley, T. G., L. P. Hansen, E. G. J. Luttmer and J. Scheinkman, "Short-Term Interest Rates as Subordinated Diffusions," *The Review of Financial Studies*, 10(3), (1996), 252-577.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, Jr. and S. A. Ross, "Am Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," *Econometrica*, 53, (1985), 363-384.

Cox, J. C., and S. A. Ross, "A Survey of Some New Results in Financial Option Pricing Theory.," *Journal of Finance*, 31, (1976a), 383-402.

Cox, J. C., and S. A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 7, (1976b), 229-263.

Das, S. R., "The Surprise Element : Jumps in Interest Rate Diffusions," Working Paper, Harvard Business School, 1999.

Das, S. R. and A. Uppal, "International Portfolio Choice with Systemic Risk," Working Paper, Harvard Business School and MIT, 1998.

Duan, J. C., "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, 5(1), (1995), 13-32.

Engle, R., "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50, (1982), 938-1008.

Engle, R. and C. Mustafa, "Implied ARCH Models from Options Pries," *Journal of Econometrics*, 52, (1992), 289-311.

Eraker, B., M. S. Johannes and N. G. Polson, "Return Dynamics in Continuous-Time with Jumps to Volatility and Returns," Working Paper, University of Chicago, 2000.

Gallant, A. R., and G. Tauchen, "Which Moments to Match?," *Econometric Theory*, 12, (1996), 657-681.

Gallant, A. R., and G. Tauchen, "Estimation of Continuous-Time Models for Stock Returns and Interest Rates," *Macroeconomic Dynamics*, 1, (1997), 135-168.

Gallant, A. R., and G. Tauchen, "A Program for Nonparametric Time Series Analysis," User's Guide, University of North Carolina, Chapel Hill, 2001.

Ghysels, E., A. C. Harvey and E. Renault, "Stochastic Volatility," in *Handbook of Statistics*, eds. G. S. Maddala and C. R. Rao, Amsterdam : North-Holland, 14 : "Statistical Methods in Finance," (1998), 119-191.

Hansen. L. P. and J. A. Scheinkman, "Back to the Future : Generating Moment Implication for Continuous-Time Markov Processes," *Econometrica*, 63, (1995), 767-804.

Harrison, M. and D. Kreps, "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securites Markets," *Journal of Economic Theory*, 20, (1979), 381-408.

Heston, S. and S. Nandi, "A Closed-Form GARCH Option Pricing Model," forthcoming in *The Review of Financial Studies*, 1997.

Heston, S., "A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *The Review of Financial Studies*, 6(2), (1993), 327-343.

Jarrow, R. and E. Rosenfeld, "Jump Risks and the Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Journal of Business*, 57, (1984), 337-351.

Jiang, G. J. and J. L. Knight, "A Nonparametric Approach to the Estimation of Diffusion Processes, with an Application to a Short-Term Interest Rate Model," *Econometric Theory*, 13(5), (1997), 615-645.

Jiang, G. J. and J. L Knight, "Efficient Estimation of the Continuous Time Stochastic Volatility Model Via the Empirical Characteristic Function," Working Paper, York University, 1999.

Jorion, P., "On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets," *The*

Review of Financial Studies, 1(4), (1988), 427-445.

Melino A. and A. M. Turnbull, "Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility," *Journal of Econometrics*, 45, (1990), 239-265.

Merton, R. C., "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model," *Journal of Economic Theory*, 3, (1971), 373-413.

Merton, R. C., "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, 41. (1973), 867-888.

Merton, R. C., "Option Pricing when Underlying Stock Returns Are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3, (1976), 125-144.

Pan, J., "Integrated" "Time-Series Analysis of Spot and Options Prices," Working Paper, Stanford University, 1999.

Ritchken, P. and R. Trevor, "Pricing Options Under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes," *Journal of Finance*, 54(1), (1999), 377-402.

Stanton R. H., "A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk," *Journal of Finance*, 52, (1997), 1973-2002.

Vasicek, O., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5, (1977), 177-188.

THE KOREAN JOURNAL OF FINANCIAL MANAGEMENT
Volume 20, Number 1, Jun. 2003

Characteristics of Stochastic Volatility in Korean Stock Returns

Kook-Hyun Chang*

〈abstract〉

This paper uses the Efficient Method of Moments(EMM) of Gallant and Tauchen to estimate continuous-time stochastic volatility diffusion model for the Korean Composite Stock Price Index, sampled daily over 1995~2002. The estimates display non-normality of stock index return, leptokurtic distribution, and stochastic volatility. Further, this study suggests that two factor stochastic volatility model will be more desirable than one factor stochastic volatility model to estimate daily Korean stock return and also suggests that the stochastic volatility diffusions should allow for Poisson jumps of time-varying intensity.

Keywords : Volatility, SVM, EMM, Continuous-Time Model, Risk Management

* College of Business Administration, Konkuk University

** This work was supported by Korea Research Foundation Grant.